Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

*УДК 519.21*

# Стационарное распределение сетей с положительными и отрицательными заявками и двумя типами узлов

В.А. Немилостивая

Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания, содержащая узлы двух типов – однолинейные и многолинейные. Аналогично сетям Геленбе в однолинейные узлы поступают положительные и отрицательные пуассоновские потоки. Положительные заявки требуют обслуживания, в то время как отрицательные уничтожают по одной положительной заявке. В многолинейные узлы могут поступать только положительные требования. Устанавливается достаточное условие эргодичности и находится стационарное распределение.
**Ключевые слова:** открытая сеть массового обслуживания, однолинейные и многолинейные узлы, положительные и отрицательные заявки, условие эргодичности, стационарное распределение.

An exponential queuing network containing nodes of two types – single-line and multi-line is considered. Similar to Gelenbe nets, positive and negative Poisson flows arrive at single-line nodes. Positive orders require servicing, while negative orders consume one positive order. Only positive requirements can come in multi-line nodes. A sufficient ergodicity condition is established and a stationary distribution is found.
**Keywords:** open queuing network, single-line and multi-line nodes, positive and negative customers, ergodicity condition, stationary distribution.

**Введение.** В работе [1] впервые рассматривались однолинейные сети массового обслуживания с положительными и отрицательными требованиями, для них через решение нелинейных уравнений трафика было найдено стационарное распределение в мультипликативной форме. С помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке в [2] доказано существование положительного решения уравнений трафика. В работах [3]–[5] также рассматривались сети с различными типами заявок и ограниченным временем пребывания в узлах. Сети с двумя типами узлов исследовались в работе [6]. В настоящей работе мы обобщили ранее полученные результаты для сетей Джексона и Геленбе на сети с двумя типами узлов – однолинейные и многолинейные.

**Постановка задачи.** В сеть массового обслуживания, содержащую $N$ узлов, поступают $N+M$ независимых пуассоновских потоков. Поток может быть потоком положительных заявок (обычных, требующих обслуживания) $i=\overline{1,N}$ и потоком отрицательных заявок $i=\overline{1,M}$. При поступлении в $i$-ый узел отрицательная заявка мгновенно покидает сеть и в последствии не оказывает никакого влияния. Однако, если в момент поступления отрицательной заявки в узле имеются положительные, то одна из них (для определённости предположим последняя в очереди) мгновенно исчезает из сети. Если же в момент поступления в узле отсутствуют положительные заявки, то поступающая в узел отрицательная заявка пропадает, не оказывая в дальнейшем никакого влияния на поведение сети. Число мест для ожидания заявок в каждом из узлов бесконечное. Также будем полагать, что положительные заявки обслуживаются в порядке их поступления.

В сети имеются два типа узлов – однолинейные и многолинейные (на самом деле многолинейные системы можно считать однолинейными с переменной условной интенсивностью обслуживания $\mu(n)=\mu\cdot \mathrm{I}_{\{n\neq 0\}}$, где $n$ – число заявок в системе, $\mathrm{I}_A$ – индикатор события $A$, равный 1, если $A$ происходит, и равный 0, если $A$ не происходит).

В однолинейные узлы поступают два вида заявок – положительные и отрицательные. Пусть $\Lambda_i$ и $\lambda_i$ – соответственно интенсивности потоков положительных и отрицательных заявок, поступающих в $i$-ый узел извне, $\Lambda_i>0, \lambda_i>0,\ i=\overline{1,M}$. В узлы $i=\overline{M+1,N}$ поступают только потоки положительных заявок с интенсивностью $\Lambda_i$, $\Lambda_i > 0$. После обслуживания положительной заявки в $i$-ом узле ($i = \overline{1,N}$) эта заявка независимо от всех других заявок мгновенно с вероятностью $p_{ij}^+$ переходит в $j$-ый узел ($j = \overline{1,N}$), оставаясь положительной, и с вероятностью $p_{ij}^-$ переходит в $j$-ый узел ($j = \overline{1,M}$), превращаясь в отрицательную, а с вероятностью $p_{i0}$ покидает сеть. Для удобства для $j = \overline{M+1,N}$ введём $p_{ij}^- = 0$. Тогда если обозначим $p_{ij} = p_{ij}^+ + p_{ij}^-$ $\left(i, j = \overline{1,N}\right)$, то

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij} = p_{i0} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = p_{i0} + \sum_{j=1}^{N}\left(p_{ij}^+ + p_{ij}^-\right) = 1,\ i = \overline{1,N}.$$

Состояние сети в момент времени $t$ будем описывать случайным векторным процессом $\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число положительных заявок в $i$-ом узле в момент времени $t$.

В силу предположения, что входящие потоки простейшие, а обслуживание экспоненциальное, $\vec{n}(t)$ является многомерной цепью Маркова с непрерывным временем и фазовым пространством $X = Z_+^N$, $Z_+ = \{0,1,\ldots\}$.

**Изолированный узел.** Рассмотрим систему массового обслуживания, представляющую собой изолированный от сети $i$-ый узел ($i = \overline{1,M}$), состоящий из единственного экспоненциального прибора с интенсивностью обслуживания $\mu_i$. В эту систему поступают два независимых между собой простейших потока заявок. Первый – поток обычных (положительных) заявок, требующих обслуживания, с интенсивностью поступления $\lambda_i^+$, второй – поток отрицательных заявок, действующих точно также, как и отрицательные заявки, поступающие в $i$-ый узел сети, с интенсивностью поступления $\lambda_i^-$. Позже мы подберём $\lambda_i^+$ и $\lambda_i^-$ так, чтобы эти интенсивности совпадали с интенсивностями потоков положительных и отрицательных заявок соответственно, проходящих через $i$-ый узел исследуемой сети. Изолированный узел ведёт себя точно также, как и узел сети. Отличие только в том, что в него поступают пуассоновские потоки, а суммарные поступающие потоки в узел сети (извне и из других узлов) не являются простейшими.

Состоянием системы в момент времени $t$ назовём число заявок $\tilde{n}_i(t)$ в системе в момент времени $t$. Очевидно, что $\tilde{n}_i(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $X_i = Z_+ = \{0,1,\ldots\}$, хотя вообще говоря $n_i(t)$ не будет марковской цепью. Легко заметить, что конечномерные распределения цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$ и цепи Маркова $\tilde{\tilde{n}}_i(t)$, выражающей число заявок в момент времени $t$ в системе $M|M|1$ с интенсивностью входящего потока $\lambda_i^+$ и интенсивностью обслуживания $\mu_i + \lambda_i^-$, при одном и том же начальном распределении совпадают. Обе цепи консервативны, регулярны и имеют совпадающие уравнения Колмогорова. Поэтому вероятности перехода для этих цепей совпадают.

**Лемма 1.** Цепь Маркова $\tilde{n}_i(t)$ консервативна и регулярна. Для её эргодичности необходимо и достаточно чтобы загрузка системы

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \lambda_i^-} < 1, \quad i = \overline{1,M}.$$

Стационарные вероятности её состояний удовлетворяют следующему уравнению равновесия для так называемых вертикальных сечений:

$$\lambda_i^+ p_i(n_i - 1) = \left(\mu_i + \lambda_i^-\right) p_i(n_i), \quad n_i = 1,2,\ldots$$

и имеют вид

$$p_i(n_i) = \rho_i^{n_i}(1 - \rho_i), \quad n_i = 0,1,\ldots \tag{1}$$

Загрузку $\rho_i$ можем понимать как вероятность занятости прибора в стационарном режиме.

Теперь изолируем от сети $i$-ый узел, где $i=\overline{M+1,N}$. Получим систему массового обслуживания с поступающим пуассоновским потоком обычных положительных заявок с интенсивностью поступления $\lambda_i^+$ и интенсивностью обслуживания $\mu_i(n_i)$, зависящей от $n_i$. Состоянием системы в момент времени $t$ назовём число заявок $\tilde{n}_i(t)$ в системе в момент времени $t$. Очевидно, что $\tilde{n}_i(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $\mathrm{X}_i=\mathrm{Z}_+=\{0,1,\ldots\}$. Очевидно, что эта цепь Маркова консервативна и регулярна.

Стационарные вероятности её состояний удовлетворяют следующему уравнению равновесия для вертикальных сечений:

$$\lambda_i^+ p_i(n_i-1)=\mu_i(n_i)p_i(n_i),\quad n_i=1,2,\ldots,\ i=\overline{M+1,N}.$$

Стационарное распределение цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$:

$$p_i(n_i)=p_i(0)\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)},\qquad p_i(0)=\left(\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)}\right)^{-1},\quad n_i=1,2,\ldots,\ i=\overline{M+1,N}. \tag{2}$$

Необходимым и достаточным условием эргодичности цепи $\tilde{n}_i(t)$, описывающей изолированный узел, будет сходимость ряда $\sum\limits_{n_i=1}^{\infty}\prod\limits_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)}<\infty$.

**Основной результат.** Подберём теперь $\lambda_i^+$ и $\lambda_i^-$ так, чтобы эти интенсивности совпадали с интенсивностями потоков положительных и отрицательных заявок соответственно, проходящих через $i$-ый узел исследуемой сети. Поскольку заявки не рождаются и не теряются при прохождении узлов, то в стационарном режиме выполняется следующий закон сохранения интенсивностей потоков при прохождении узлов:

$$\lambda_i^+=\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\mu_j\lambda_j^+}{\mu_j+\lambda_j^-}p_{ji}^+ +\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_j^+p_{ji}^+,\quad i=\overline{1,N},$$

$$\lambda_i^-=\lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\mu_j\lambda_j^+}{\mu_j+\lambda_j^-}p_{ji}^-,\quad i=\overline{1,M}. \tag{3}$$

Эти уравнения также называют уравнениями трафика. Нетрудно видеть, что так как $\Lambda_i>0,\lambda_i>0,\ i=\overline{1,N}$ любое решение $(\lambda_1^+,\lambda_2^+,\ldots,\lambda_N^+,\lambda_1^-,\lambda_2^-,\ldots,\lambda_M^-)$ является строго положительным и цепь Маркова $\vec{n}(t)$ неприводима [7].

Если стационарное распределение $\{p(\vec{n}),\vec{n}\in \mathrm{Z}_+^N\}$ цепи Маркова $\vec{n}(t)$ существует, то стационарные вероятности её состояний удовлетворяют уравнениям глобального равновесия:

$$\begin{aligned}
p(\vec{n})\left[\sum_{i=1}^{M}\left[\Lambda_i+(\mu_i+\lambda_i)\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}\right]+\sum_{i=M+1}^{N}\left[\Lambda_i+\mu_i(n_i)\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}\right]\right]=\sum_{i=1}^{M}\Big[p(\vec{n}+e_i)(\mu_ip_{i0}+\lambda_i)+p(\vec{n}-e_i)\Lambda_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}+\\
+\sum_{j=1}^{M}\left(p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_jp_{ji}^+\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}+p(\vec{n}+e_j+e_i)\mu_jp_{ji}^-+p(\vec{n}+e_j)\mu_jp_{ji}^-\mathrm{I}_{\{n_i=0\}}\right)+\\
+\sum_{j=M+1}^{N}\left(p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)p_{ji}^+\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}\right)\Big]+\sum_{i=M+1}^{N}\Big[p(\vec{n}+e_i)\mu_i(n_i+1)p_{i0}+p(\vec{n}-e_i)\Lambda_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}+\\
+\sum_{j=M+1}^{N}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)p_{ji}^+\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}+\sum_{j=1}^{M}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_jp_{ji}^+\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}\Big].
\end{aligned} \tag{4}$$

**Теорема.** *Пусть* $\Lambda_i>0,\lambda_i>0,\ i=\overline{1,N}$. *Случайный процесс* $\vec{n}(t)$ *консервативен, регулярен и неприводим. Если*

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \lambda_i^-} < 1, \quad i = \overline{1, M},$$

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)} < \infty, \; i = \overline{M+1, N}, \tag{5}$$

*то он эргодичен, а его стационарное распределение имеет вид*

$$\left\{ p(\vec{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \ldots p_N(n_N), \quad \vec{n} \in Z_+^N \right\}, \tag{6}$$

*где* $\{p_i(n_i),\, n_i \in Z_+\}$, $i = \overline{1, N}$ *– стационарное распределение изолированного узла, задаваемое с помощью (1) и (2).*

**Доказательство.** Консервативность цепи Маркова $\vec{n}(t)$ очевидна, неприводимость ранее нами уже была доказана. Регулярность цепи следует из того, что интенсивность выхода из любого состояния ограничена, $q(\vec{n}) \le \sum_{i=1}^{N} (\Lambda_i + \mu_i + \lambda_i)$. Для доказательства эргодичности воспользуемся следующим вариантом теоремы Фостера [8]. Для того, чтобы неприводимая консервативная, регулярная цепь Маркова с непрерывным временем была эргодичной, необходимо и достаточно, чтобы существовало нетривиальное решение системы уравнений равновесия $\{p(\vec{n}),\, n \in X\}$, для которого ряд $\sum_{n \in X} |p(\vec{n})| < \infty$. Если выполняются условия (5), то для $\{p(\vec{n})\}$, задаваемого с помощью (6) $\sum_{n \in X} |p(\vec{n})| = \sum_{n \in X} \prod_{i=1}^{M} \rho_i^{n_i} (1 - \rho_i) \prod_{i=M+1}^{N} p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_i^+}{\mu_i(l)} < \infty$. Остается проверить, что (6) является решением уравнений глобального равновесия (4). Для начала подставим $I_{\{n_i=0\}} = 1 - I_{\{n_i \ne 0\}}$ в (4). Тогда получим

$$p(\vec{n}) \left[ \sum_{i=1}^{M} \left[ \Lambda_i + (\mu_i + \lambda_i) I_{\{n_i \ne 0\}} \right] + \sum_{i=M+1}^{N} \left[ \Lambda_i + \mu_i(n_i) I_{\{n_i \ne 0\}} \right] \right] = \sum_{i=1}^{M} \Big[ p(\vec{n} + e_i)(\mu_i p_{i0} + \lambda_i) + p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i I_{\{n_i \ne 0\}} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M} \Big( p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} + p(\vec{n} + e_j + e_i) \mu_j p_{ji}^- + p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- - p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- I_{\{n_i \ne 0\}} \Big) +$$
$$+ \sum_{j=M+1}^{N} \Big( p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} \Big) \Big] + \sum_{i=M+1}^{N} \Big[ p(\vec{n} + e_i) \mu_i (n_i + 1) p_{i0} + p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i I_{\{n_i \ne 0\}} +$$
$$+ \sum_{j=M+1}^{N} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{j=1}^{M} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} \Big]. \tag{7}$$

Разобьём теперь это уравнение на уравнения локального равновесия:

$$p(\vec{n}) \left[ \sum_{i=1}^{M} \Lambda_i + \sum_{i=M+1}^{N} \Lambda_i \right] = \sum_{i=1}^{M} \left[ p(\vec{n} + e_i)(\mu_i p_{i0} + \lambda_i) + \sum_{j=1}^{M} \Big( p(\vec{n} + e_j + e_i) \mu_j p_{ji}^- + p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- \Big) \right] +$$
$$+ \sum_{i=M+1}^{N} p(\vec{n} + e_i) \mu_i (n_i + 1) p_{i0}, \tag{8}$$

$$p(\vec{n}) \left[ \sum_{i=1}^{M} (\mu_i + \lambda_i) I_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{i=M+1}^{N} \mu_i(n_i) I_{\{n_i \ne 0\}} \right] = \sum_{i=1}^{M} \Big[ p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i I_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{j=1}^{M} \Big( p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} -$$
$$- p(\vec{n} + e_j) \mu_j p_{ji}^- I_{\{n_i \ne 0\}} \Big) + \sum_{j=M+1}^{N} \Big( p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} \Big) \Big] + \sum_{i=M+1}^{N} \Big[ p(\vec{n} - e_i) \Lambda_i I_{\{n_i \ne 0\}} +$$
$$+ \sum_{j=M+1}^{N} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j (n_j + 1) p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} + \sum_{j=1}^{M} p(\vec{n} + e_j - e_i) \mu_j p_{ji}^+ I_{\{n_i \ne 0\}} \Big]. \tag{9}$$

Последнее уравнение разобьём более детально, приравнивая между собой в суммах отдельные слагаемые. Для $i = \overline{1, M}$:

$$p(\vec{n})(\mu_i+\lambda_i)=p(\vec{n}-e_i)\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\left(p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j p_{ji}^{+}-p(\vec{n}+e_j)\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{j=M+1}^{N}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}, \quad (10)$$

и для $i=\overline{M+1,N}$:

$$p(\vec{n})\mu_i(n_i)=p(\vec{n}-e_i)\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}p(\vec{n}+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}. \quad (11)$$

Уравнения глобального равновесия (4) это следствие уравнений локального равновесия (8), (10), (11). Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно показать, что (6) удовлетворяют (8), (10) и (11).

Разделим (8) на $p(\vec{n})$ и подставим в него (6). Используя уравнения трафика, получим

$$\sum_{i=1}^{M}\Lambda_i+\sum_{i=M+1}^{N}\Lambda_i=\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}(\mu_i p_{i0}+\lambda_i)+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}\mu_j p_{ji}^{-}+\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\mu_j p_{ji}^{-}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}\mu_i(n_i+1)p_{i0}=\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}(\mu_i p_{i0}+\lambda_i)+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\cdot\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}+\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i(n_i+1)}\mu_i(n_i+1)p_{i0}=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i p_{ij}^{+}-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i p_{ij}^{-}$$

$$+\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\left(\lambda_i^{-}-\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i(n_i+1)}\mu_i(n_i+1)\left(1-\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}(\mu_i+\lambda_i^{-})-\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\sum_{j=1}^{N}\mu_i p_{ij}^{+}+\sum_{i=M+1}^{N}\left(\lambda_i^{+}-\sum_{j=1}^{N}\lambda_i^{+}p_{ij}^{+}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{M}\Lambda_i+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j p_{ji}^{+}-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_i p_{ij}^{+}+\sum_{i=M+1}^{N}\Lambda_i+\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_i+\lambda_i^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+$$

$$+\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_j^{+}p_{ji}^{+}-\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\lambda_i^{+}p_{ij}^{+}-\sum_{i=M+1}^{N}\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_i^{+}p_{ij}^{+}=\sum_{i=1}^{M}\Lambda_i+\sum_{i=M+1}^{N}\Lambda_i.$$

То есть (6) удовлетворяет (8). Теперь разделим (10) на $p(\vec{n})$ и подставим в него (6).

$$\mu_i+\lambda_i=\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j p_{ji}^{+}-\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\mu_j p_{ji}^{+}-\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}\right)+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j(n_j+1)}\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\left(\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_j^{+}p_{ji}^{+}\right)-\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}=\frac{\mu_i+\lambda_i^{-}}{\lambda_i^{+}}\lambda_i^{+}-\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{-}=$$

$$=\mu_i+\lambda_i^{-}+\lambda_i-\lambda_i^{-}=\mu_i+\lambda_i.$$

Теперь проверим, что (6) удовлетворяет (11). Разделим (11) на $p(\vec{n})$ и подставим в него (6).

$$\mu_i(n_i)=\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j(n_j+1)}\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\mu_j(n_j+1)p_{ji}^{+}=$$

$$=\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\left[\Lambda_i+\sum_{j=1}^{M}\frac{\lambda_j^{+}}{\mu_j+\lambda_j^{-}}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=M+1}^{N}\lambda_j^{+}p_{ji}^{+}\right]=\frac{\mu_i(n_i)}{\lambda_i^{+}}\lambda_i^{+}=\mu_i(n_i),$$

т. е. (6) удовлетворяет (11). Теорема доказана.

**Заключение.** Поскольку стационарное распределение найдено, то можно найти различные показатели эффективности функционирования сети в стационарном режиме. Например, легко находится среднее число заявок в узлах $i = \overline{1, M}$ по формуле

$$\overline{n_i} = \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i p_i(n_i) = (1-\rho_i)\sum_{n_i=0}^{\infty} n_i \rho_i^{n_i} = \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)}.$$

Для нахождения средних времён пребывания или ожидания заявок в узлах можно воспользоваться формулами Литтла.

Полученные результаты могут быть применены при проектировании новых и модернизации уже существующих сетей передачи данных и информационно-вычислительных сетей.

## Литература

1. Gelenbe, E. Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – V. 28. – P. 656–663.

2. Gelenbe, E. Stability of G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probability in the Engineering and Informational Sciences.– 1992. – V. 6. – P. 271–276.

3. Якубович, О. В. Стационарное распределение сети массового обслуживания с различными типами сигналов и положительных заявок и ограничением на время пребывания / О. В. Якубович // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – Ч. 2. – С. 207–211.

4. Якубович, О. В. Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания положительных, отрицательных заявок и сигналов / О. В. Якубович, В. Е. Евдокимович// Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 63–67.

5. Малинковский, Ю. В. Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания / Ю. В. Малинковский // АВТ. – 2017. – № 10. – С. 155–167.

6. Малинковский, Ю. В. Стационарное распределение сетей Джексона с экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок / Ю. В. Малинковский, В. А. Немилостивая // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 73–77.

7. Гихман, И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М. : Наука, 1997. – 658 с.

8. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : РУДН, 1995. – 529 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 29.10.2020