Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

*УДК 512.542*

# О $p$-сверхразрешимости конечных групп с заданными $s$-добавлениями к ее подгруппам

Н.С. Косенок

Подгруппа $H$ группы $G$ называется $s$-добавляемой в $G$, если существует подгруппа $K$ из $G$ такая, что $G = HK$ и $K/K \cap H_G$. В данной статье нами найден новый критерий $p$-сверхразрешимости группы в зависимости от условия $s$-добавляемости некоторых ее подгрупп.
**Ключевые слова:** сверхразрешимые группы, $s$-добавляемость подгрупп.

A subgroup $H$ of $G$ is called s-supplemented in $G$ if there exists a subgroup $K$ of $G$ such that $G = HK$ and $K/K \cap H_G$. A new criterion for $p$-supersolvability of a group depending on the conditions of $s$-supplemented of some of its subgroups was found.
**Keywords:** supersolvability groups, $s$-supplemented subgroup.

**1. Введение.** Наряду с изучением максимальных подгрупп основной группы во многих исследованиях с успехом реализовалась идея изучения группы с заданными максимальными подгруппами тех или иных собственных подгрупп. Один из интересных подходов в этом направлении связан с изучением максимальных подгрупп силовских подгрупп. Начало этому направлению в теории групп было положено в работе Б. Хупперта [1], где была доказана сверхразрешимость конечной разрешимой группы $G$ при условии, что все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $G$ перестановочны со всеми членами некоторой фиксированной силовской базы группы $G$. Несколько позднее Сринивазан установил сверхразрешимость произвольной конечной группы, у которой все такие подгруппы нормальны [2]. В работе [3] Ванг доказал, развивая последний результат, что заключение в теореме Сринивазана не меняется, если в ней условие нормальности заменить на более слабое условие $c$-нормальности (напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ $c$-нормальна в $G$ [3], если $G$ имеет такую нормальную подгруппу $T$, что $G=HT$ и $T\cap H\subseteq H_G=\bigcap_{x\in G} H^x$. В работе [4] была доказана сверхразрешимость конечной группы $G$ при условии, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из $G$ дополняемы в $G$. В работе [5] было доказано, что конечная группа $G$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая неинвариантная в $G$ максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из $G$ обладает сверхразрешимым добавлением в $G$.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию этих результатов.

**2. Предварительные сведения.** В книге Л.А.Шеметкова [6] символом $\tilde{F}(G)$ обозначена подгруппа, которая определяется следующим образом:

1) $\Phi(G) \subseteq \tilde{F}(G)$;

2) $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$ – цоколь группы $G/\Phi(G)$, т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

В работе [5] было доказано, что группа $G$ сверхразрешима, если любая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $\tilde{F}(G)$ обладает сверхразрешимым добавлением. В данной работе мы расширяем этот результат до класса $p$-сверхразрешимых групп.

**Лемма 1.** *Пусть $N$ и $L$ – нормальные подгруппы группы $G$ такие, что $P/L$ является силовской $p$-подгруппой в $NL/L$, и $M/L$ – максимальная подгруппа в $P/L$. Если $P_p$ – силовская $p$-подгруппа в $P\cap N$, то $P_p$ – силовская $p$-подгруппа в $N$ такая, что $D=M\cap N\cap P_p$ является максимальной подгруппой $P_p$ и $M=LD$.*

**Доказательство.** Так как $P\leq NL$ и $L\leq P$, то $P=P\cap NL=L(P\cap N)$. Из этого следует, что

$$P/L=L(P\cap N)/L\simeq(P\cap N)/(L\cap N\cap P)=(P\cap N)/(L\cap N)\leq N/(L\cap N).$$

Ясно, что

$$|NL/L|=|N/L\cap N|,\ |P/L|=|(P\cap N)/(L\cap N)|,$$

и так как $P/L$ – силовская $p$-подгруппа $NL/L$, мы видим что $|N/(L\cap N) : (P\cap N)/(L\cap N)|$ не делится на $p$. Это показывает, что $(P\cap N)/(L\cap N)$ – силовская $p$-подгруппа в $N/(L\cap N)$. Аналогично, ввиду того, что $M/L=(M\cap N)L/L\simeq(M\cap N)/(L\cap N)$,мы имеем

$$|NL/L:M/L|=|N/(L\cap N):(M\cap N)/(L\cap N)|.$$

Но $(M\cap N)/(L\cap N)\leq(P\cap N)/(L\cap N)$, это показывает, что $(M\cap N)/(L\cap N)$ – максимальная подгруппа в $(P\cap N)/(L\cap N)$. Пусть $P_p$–силовская $p$-подгруппа в $P\cap N$. Тогда

$$P_p(L\cap N)/(L\cap N)=(P\cap N)/(L\cap N).$$

Так как $p$ не делит $|N/(L\cap N):(P\cap N)/((L\cap N)|$, то $P_p$ – силовская $p$-подгруппа группы $N$. Поскольку

$$M\cap N=M\cap N\cap P_p(L\cap N)=(L\cap N)(M\cap N\cap P_p),$$

мы имеем

$$p=|(P\cap N)/(L\cap N):(M\cap N)/(L\cap N)|=|(P\cap N):(M\cap N)|=|P_p(L\cap N):(L\cap N)(M\cap N\cap P_p)|=$$

$$=\frac{|P_p(L\cap N)|}{|(L\cap N)(M\cap N\cap P_p)|}=\frac{|P_p||L\cap N||L\cap N\cap M\cap N\cap P_p|}{|L\cap N||M\cap N\cap P_p||P_p\cap L\cap N|}=\frac{|P_p|}{|M\cap N\cap P_p|}$$

Это показывает, что $D=M\cap N\cap P_p$ – максимальная подгруппа в $P_p$. Из выше сказанного мы также видим, что $M\cap N=(L\cap N)D$, и поэтому $M=M\cap LN=L(M\cap L)=L(L\cap N)D=LD$.

Лемма доказана.

**Лемма 2 [6].** Пусть $N$ – нормальная подгруппа группы $G$ такая, что факторгруппа $N/N\cap\Phi(G)$ нильпотентна. Тогда $N$ также нильпотентна.

**Лемма 3 [7].** Пусть $N\leq \mathrm{Soc}(G)$, где $N\trianglelefteq G$. Тогда существует нормальная подгруппа $T$ в $G$ такая, что $(G)=N\times T$.

**Лемма 4 [8]**. Пусть $H/K$ – главный фактор группы $G$. Тогда $\mathrm{F}(G)\subseteq C_G(H/K)$.

**Лемма 5 [8]**. Пусть $G$ – разрешимая группа. Тогда $C_G(\mathrm{F}(G))\subseteq \mathrm{F}(G)$.

**3. Основной результат.** Назовем подгруппу $H$ группы $G$ $s$-добавляемой в $G$, если существует подгруппа $K$ из $G$ такая, что $G = HK$ и $K/K\cap H_G$.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ – разрешимая группа, которая содержит неединичную нормальную подгруппу $N$ с сверхразрешимой факторгруппой $G/N$. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из* $\mathrm{F}(N)$, *не являющаяся нормальной в $G$, имеет $p$-сверхразрешимое $s$-добавление в $G$, то $G$ $p$-сверхразрешима.*

**Доказательство**. Предположим, что эта теорема не верна и пусть $G$ – контрпример минимального порядка.

Сначала покажем, что условие теоремы выполняется для факторгруппы $G/\Phi$, где $\Phi=\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини в $G$. Рассмотрим $T/\Phi=\mathrm{F}(N\Phi/\Phi)$ Тогда

$$T=T\cap N\Phi=\Phi(T\cap N).$$

Так как $T/\Phi$ – нильпотентная нормальная подгруппа в $G/\Phi$, то по лемме 2, $T$ – нильпотентная нормальная подгруппа в $G$. Следовательно, $T\cap N\leq \mathrm{F}(N)$. С другой стороны, поскольку

$$\mathrm{F}(N)/\mathrm{F}(N)\cap\Phi \simeq \mathrm{F}(N)\Phi/\Phi\leq \mathrm{F}(N\Phi/\Phi),$$

мы имеем $\mathrm{F}(N)\subseteq T$. Следовательно, $T\cap N = \mathrm{F}(N)$. И таким образом,

$$\mathrm{F}(N\Phi/\Phi) = T/\Phi = (T\cap N)\Phi/\Phi = \mathrm{F}(N)\Phi/\Phi.$$

Теперь пусть $P/\Phi$ – силовская $p$-подгруппа группы $T/\Phi$, и пусть $M/\Phi$ – максимальная подгруппа в $P/\Phi$ и $P_p$ – силовская $p$-подгруппа в $P\cap\mathrm{F}(N)$. Тогда по лемме 1, $P_p$ – силовская $p$-подгруппа в $\mathrm{F}(N)$, и $L=M\cap\mathrm{F}(N)\cap P_p$ – максимальная подгруппа в $P_p$. По условию подгруппа $L$ либо нормальна в $G$, либо $L$ имеет $p$-сверхразрешимое $s$-добавление $T$ в $G$. По лемме 1, мы имеем, что $M =\Phi L$. Если $L$ – нормальная подгруппа в $G$, то $L\Phi$ нормальна в $G$, и $M/\Phi =\Phi/\Phi$ нормальна в $G/\Phi$. Если $L$ имеет $p$-сверхразрешимое $s$-добавление $T$ в $G$, то очевидно подгруппа $T\Phi/\Phi$ является $p$-сверхразрешимым $s$-добавлением к $L\Phi/\Phi$ в $G/\Phi$. Таким образом, группа $G/\Phi$ имеет нормальную подгруппу $N\Phi/\Phi$ такую что каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $\mathrm{F}(N\Phi/\Phi) = \mathrm{F}(N)\Phi/\Phi$ либо имеет $p$-сверхразрешимое $s$-добавление в $G/\Phi$, либо она нормальна в $G/\Phi$. Поскольку

$$(G/\Phi)/(N\Phi/\Phi) \simeq G/N\Phi \simeq (G/N)/(N\Phi/N)$$

– сверхразрешимая группа, мы видим, что условие теоремы все еще выполняется для $G/\Phi$.

Если $\Phi\neq 1$, то $|G/\Phi| < |G|$ и поэтому $G/\Phi$ $p$-сверхразрешима, по выбору группы $G$. Следовательно, $G$ $p$-сверхразрешима . Это противоречит нашему предположению о $G$. Следовательно, $\Phi(G) = 1$, и по лемме 3, $\mathrm{F}(G) = R_1\times R_2\times\ldots\times R_t$, где $R_1$, $R_2$, …, $R_t$ – минимальные нормальные подгруппы группы $G$. Пусть $M_i$ – максимальная подгруппа $R_i$, $i=1, 2, \ldots, t$. Предположим, что для некоторого индекса $i$, мы имеем $|M_i| \neq 1$. Также мы допустим, что $R_i \nsubseteq N$. Тогда $NR_i/N$ – главный фактор сверхразрешимой группы $G/N$, и поэтому $|NR_i/N|$ – простое число. Но $R_i \simeq NR_i/N$, и поэтому мы видим, что $M_i = 1$. Это противоречие показывает, что $R_i \leq N$. Пусть теперь $R_i$– $q$-группа и $R$ – силовская $q$-подгруппа в $\mathrm{F}(N)$. Так как $N \trianglelefteq G$ и $\mathrm{F}(G)$ char $N$, мы видим, что $\mathrm{F}(N)$ нормальна в $G$. Следовательно, $R \trianglelefteq G$, поскольку $R$ char $\mathrm{F}(N)$. Применяя лемму 3, мы видим, что $R= R_i\times D$ для некоторой нормальной подгруппы $D$ из $G$. Пусть $M=M_iD$. Так как $|R:M|=|R_i:M_i|=q$, то $M$ – максимальная подгруппа в $R$. Если $M \trianglelefteq G$, то

$$M\cap Ri=MiD\cap Ri=Mi(Ri\cap D) = Mi \trianglelefteq G,$$

и $|M_i| = 1$. Это противоречие показывает, что $M$ ненормальна в $G$ и, следовательно, $M$ имеет $p$-сверхразрешимое $s$-добавление $T$ в $G$.

Теперь докажем, что $M_G=D$. Действительно, $D \leq M_G$, и $M_G = M_G\cap M_iD=D(M_i\cap M_G)$. Предположим, что $M_i\cap M_G \neq 1$. Тогда $M_G\cap R_i \neq 1$, следовательно, $R_i \leq M_G$, ввиду минимальности $R_i$. Таким образом,

$$R_i = R_i \cap M_iD = M_i(R_i\cap D) = M_i,$$

противоречие. Таким образом, $M_G=D$ и $T/T\cap M_G=T/T\cap D$ –$p$-сверхразрешимая группа. Но $T\cap D \leq T\cap R$, и поэтому $T/T\cap R\simeq TR/R=TM/R=G/R$ – $p$-сверхразрешимая группа. Если $q\neq p$, то $R$ – $p'$-группа, и $G$ – $p$-сверхразрешима. Это противоречит выбору группы $G$. Следовательно, $R$ –

силовская $p$-подгруппа F($N$). Без потери общности, мы можем предположить что i=1 и что $R=R_1\times R_2\times\ldots\times R_n$, где $D=R_2\times\ldots\times R_n$.

Теперь докажем, что n $\geq$ 3. Действительно предположим, что $R=R_1\times R_2$. Если $R_1\leq T$, то $TM=TR_2$, и $G/R_2=TR_2/R_2\simeq T/T\cap R_2$ – $p$-сверхразрешимая группа. Это означает, что $R_1\simeq R_1R_2/R_2$ – группа простого порядка, что противоречит нашему выбору подгруппы $R_1$. Следовательно, $R_1\nleq T$. Если $R_2\leq T$, то $TM=TM_1=G$ и, следовательно, $|G:T|\leq|M_1|<|R_1|$. Но $R_1T=G$ и $|G:T|=|R_1|$. Это противоречие показывает что $R_2\nleq T$. С другой стороны, если $R_1R_2\cap T=1$, то $G=TM_1R_2=TR_1R_2$ и мы имеем $|G:T|=|R_1||R_2|$. Но из того, что $TM_1R_2=G$ мы получаем, что $|G:T|\nleq|M_1||R_2|<|R_1||R_2|$, противоречие. Следовательно, $\Delta=R_1R_2\cap T\neq 1$. Поскольку $R_1R_2$ – абелева группа, то $\Delta=R_1R_2\cap T$ – нормальная подгруппа в $G$. Пусть $R_j$ – минимальная нормальная подгруппа из $G$, содержащаяся в $\Delta$. Поскольку $R_1\nleq T$, $R_2\nleq T$ и $R_j\leq T$, мы видим, что $R_j\neq R_1$, и $R_j\neq R_2$. Следовательно, $P=R_1R_2=R_jR_2$, и $P/R_2\simeq R_1\simeq R_j$. Аналогично мы можем доказать, что $R_1\simeq R_2$. Мы также заметим, что

$$\Delta=\Delta\cap R_1R_2 = \Delta\cap R_1R_j=R_j(\Delta\cap R_1) = R_j.$$

Следовательно,

$$|G|=\frac{|T||R_1R_2|}{|T\cap R_1R_2|}=\frac{|T||R_1||R_2|}{|R_j|}=|T||R_1|$$

и $|G:T| = |R_1|$. Пусть $E=R_1T$. Предположим, что $E\neq G$. Тогда $|G:T| = |E:T||G:E|>|R_1|$, противоречие. Следовательно, $E=G=R_1T$. Пусть $L=R_2\cap T$. Тогда $L\trianglelefteq T$ и $L\trianglelefteq R_1R_2$. Но $G=TMR_2$ и $L\trianglelefteq G$. Учитывая, что $R_2\nleq T$, мы имеем, что $L\neq R_2$. Следовательно, $L=1$, и $G/R_1\simeq T/R_1\cap T\simeq T$ – $p$-сверхразрешимая группа. Но $R_2R_1/R_1$ – минимальная нормальная p-подгруппа в $G/R_1$ и $|R_2| = |R_1| = p$. Это противоречие показывает, что n $\geq$ 3 .

Рассуждая как выше, видим, что $R_1\nleq T$ и $T/T\cap R_2\ldots R_n$ – $p$-сверхразрешимая группа. Предположим, что $\Delta\nleq T$ для каждой минимальной нормальной подгруппы $\Delta$ из $G$, содержащейся в $R_2\ldots R_n$. Тогда, очевидно, $T\cap R_2\ldots R_n=1$ и, следовательно, $|G:TR_2\ldots R_n|\leq|M_1|$. Ясно, что $TR_2\ldots R_n\neq G$. Но так как $R_1TR_2\ldots R_n=G$, мы имеем $|G:TR_2\ldots T_n| = |R_1|$, противоречие. Следовательно, найдется такая минимальная нормальная подгруппа $\Delta_1$ в $G$, что $\Delta_1\leq T\cap R_2\ldots R_n$. Заметим, что поскольку

$$\bigcap\nolimits_{i=1}^{n} R_2\ldots R_{i-1}R_{i+1}=1,$$

то найдется индекс $j$ такой, что

$$R_2\ldots R_{j-1}R_jR_{j+1}\ldots R_n=R_2\ldots R_{j-1}\Delta_1R_{j+1}\ldots R_n.$$

Таким образом мы можем предполагать, без потери общности, что найдется индекс $2\leq i<n$ такой, что $R_2,\ldots,R_{i-1}\leq T$ и что для каждой минимальной нормальной подгруппы $\Delta_2$ из $G$ содержащейся в $R_i\ldots R_n$, имеет место $\Delta_2\nleq T$. Это, в частности означает, что $T\cap R_i\ldots R_n=1$. Теперь пусть $\Delta_3=R_1R_i\ldots R_n\cap T$. Предположим, что $\Delta_3=1$. Тогда

$$G=TR_1\ldots R_n=TR_1R_i\ldots R_n,$$

что влечет

$$|G:T| = |R_1||R_i|\ldots|R_n|.$$

С другой стороны,

$$G=TM_1R_2\ldots R_n=TM_1R_i\ldots R_n,$$

что влечет

$$|G:T|\leq|M_1||R_i|\ldots|R_n|,$$

противоречие. Следовательно, $\Delta_3\neq 1$.

Пусть $L$ – минимальная нормальная подгруппа в $G$, содержащаяся в $\Delta_3$. Поскольку $L\leq T$, то $L\nleq R_i\ldots R_n$. Но $L\leq R_1R_i\ldots R_n$ и поэтому $LR_i\ldots R_n=R_1R_i\ldots R_n$, что влечет

$$G=TR_1R_2\ldots R_n=R_2\ldots R_iTR_1R_i\ldots R_n=R_2\ldots R_iTLR_i\ldots R_n=R_2\ldots R_iTR_i\ldots R_n=TR_i\ldots R_n.$$

Следовательно, $G/R_i\ldots R_n\simeq T/(T\cap R_i\ldots R_n)$ – $p$-сверхразрешимая группа. Это означает, что $R_1\simeq R_1R_i\ldots R_n/R_i\ldots R_n$ – группа простого порядка, противоречие.

Таким образом, мы видим, что для каждого i=1, 2,…t группа $R_i$ имеет простой порядок. Теперь не трудно показать, что $G/C_G(R_i)$ – абелева группа. Пусть

$$C=\bigcap_{i=1}^{t}C_G(R_i).$$

Тогда ясно, что $C=C_G(F(G))$. По лемме 4 $F(G)\leq C$. Но из леммы 5, мы имеем, что $C\leq F(G)$ и, следовательно, $C=F(G)$ и $G/F(G)$ – абелева группа. Это показывает, что каждая максимальная подгруппа $M$ из $G$, содержащая $F(G)$, является нормальной в $G$ и, следовательно, $|G:M|$ – простое число. С другой стороны, если $M$ – максимальная подгруппа в $G$ такая, что $F(G)\nsubseteq M$, тогда $G=R_iM$ для некоторого $i\in\{1,2,\ldots,t\}$, и $|G:M|=|R_i|$ является простым числом (так как $R_i$ – абелева минимальная нормальная подгруппа в $G$). Таким образом, группа $G$ – сверхразрешима. Это противоречие заканчивает доказательство теоремы.

## Литература

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. –Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967. – 793 p.

2. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1990. – V. 35. – P. 210–214.

3. Wang, Y. c-Normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – № 180. – P. 954–965.

4. Wang, Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – № 224. – P. 467–478.

5. Веньбинь, Го. G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп / Го Веньбинь, К.П. Шам, А.Н. Скиба // Сиб. мат. журнал. – 2004. – № 3. – С. 527–539.

6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

7. Шеметков, Л.А.Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.

8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации

Поступила в редакцию 02.11.2016