ний находится с помощью функции Ляпунова v, являющейся решением некоторого нелинейного разностного уравнения.

В работе [3] предложены три способа нахождения v. Два из них позволяют получить аналитическое выражение для v.

Однако они применимы лишь для небольшого подкласса систем с полиномиальным типом нелинейности. Третий приближенный способ, использованный в настоящей работе, является более общим. Каждой точке $y_k^* \in \Omega$ соответствует $v\,(y_k^*)$, определяемая формулой

$$v\,(y_k^*) = 1 - \frac{1 - v_e\,(y_{k+n+1}^*)}{\prod\limits_{r=k}^{n+k}[1 + G\,(y_r^*)]}, \tag{5}$$

где $G\,(y^*)$ — некоторая положительно определенная квадратичная форма; $v_e\,(y^*) = \tilde{y}^* B y^*$. Симметричная матрица B определяется системой

$$\tilde{\mathscr{P}} B \mathscr{P} - B = -C; \tag{6}$$

$$\tilde{y}^* C y^* = G,$$

где $\mathscr{P}$ — матрица коэффициентов линейного приближения системы (4). Точки y_Γ^*, которым соответствует $v\,(y_\Gamma^*) = 1$, принадлежат границе области асимптотической устойчивости. Решение задачи по этому методу проводилось на ЭЦВМ М-20. Найденные кривые $v = \mathrm{const}$ приведены на рис. 1.

В некоторых случаях удобно характеризовать область асимптотической устойчивости радиусом вписанного в нее круга — $\rho_\text{п}$. Зависимость этой величины от параметров системы приведена на рис. 2.

На основании приведенных построений можно сделать следующие выводы:

1. Величина $\rho_\text{п}$ практически не зависит от шага регулирования при изменении последнего в области допустимых значений.

2. В области реальных значений параметров $\sigma_x b^*$ и $\sigma_x \Phi_0$ величина $\rho_\text{п}$ в несколько раз превышает $\underline{x}$, т. е. область допустимых начальных отклонений концентрации ксенона (а следовательно, и мощности) значительно превышает зону линейности регулятора.

Автор благодарит Е. Ф. Сабаева за постановку задачи и критические замечания.

Поступило в Редакцию 15/IV 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Б. Ронжин, Е. Ф. Сабаев. «Атомная энергия», 24, 269 (1968).
2. О. Б. Ронжин, Е. Ф. Сабаев. «Атомная энергия», 26, 377 (1969).
3. R. O'Shea, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-9, 62 (1964).

Точность приближения Вигнера

УДК 621.039.512

Ю. Г. ПАШКИН

Рациональное приближение Вигнера заключается в том, что асимптотическая вероятность вылета нейтрона из блока $1 - P_c$ заменяется простым выражением [1]:

$$1 - P_c = \frac{1}{1 + d\Sigma_t}, \tag{1}$$

где Σ_t — полное макроскопическое сечение материала блока; $d = \langle l \rangle = \frac{4V}{S}$ (символ $\langle\ \rangle$ означает усреднение по всем хордам l в блоке); P_c — асимптотическая вероятность столкновения в блоке для нейтронов, испытавших предыдущее столкновение в блоке при равномерном распределении нейтронов по сечению блока. Величина P_c связана с вероятностью первого столкновения P_0 соотношением [2]

$$P_c = 1 - \frac{P_0}{d\Sigma_t}, \tag{2}$$

где $P_0 = \langle 1 - e^{-l\Sigma_t} \rangle$. Из выражения (2) видно, что приближение (1) означает равенство вероятности первого столкновения и асимптотической вероятности столкновения. В этом легко убедиться, если принять в выражении (2) $P_0 = P_c$.

Удобство такого простого приближения заключается в том, что формула для эффективного резонансного интеграла $I_\text{эфф}$ в гетерогенном случае получается такой же, что и в гомогенном, только всюду сечение потенциального рассеяния Σ_p заменяется на $\Sigma_p + {}^1/_d$. Следовательно, все блоки с одинаковой концентрацией поглотителя и одинаковыми значениями $\Sigma_p + {}^1/_d$ с точки зрения величины $I_\text{эфф}$ эквивалентны независимо от диаметра блока и типа разбавителя, что упрощает проведение различного рода оценок. Возникающая при этом ошибка в величине $I_\text{эфф}$ для узкого изолированного резонанса, имеющего брейт-вигнеровскую форму, при $h \gg 1$ (где $h = \Sigma_{r0}/\Sigma_p$, Σ_{r0} — сечение в пике резонанса), анализируется в монографии Л. Дреснера [1]. Для конечных значений h о величине этой ошибки можно судить по данным табл. 1, в которой приведены отношения эффективных резонансных интегралов, рассчитанных в приближении Вигнера, к точным значениям, рассчитанным на ЭВМ М-20 для нескольких значений h и $d\Sigma_p$.

Поскольку при использовании приближения Вигнера ошибка в величине эффективного резонансного

Таблица 1

Ошибка в величине $I_\text{эфф}$ при использовании приближения Вигнера ($I^{(1)}/I_\text{точн}$)

$d\Sigma_p$	$\lg h_0$: 0	0,5	1,0	1,5	2,0
0,1	0,9859	0,9622	0,9228	0,8993	0,9069
0,5	0,9685	0,9426	0,9344	0,9418	0,9468
1,0	0,9716	0,9587	0,9602	0,9648	0,9668
1,5	0,9777	0,9714	0,9737	0,9769	0,9778
2,0	0,9827	0,9795	0,9815	0,9834	0,9846
2,5	0,9870	0,9849	0,9868	0,9875	0,9882

интеграла может быть довольно большой ($\sim 10\%$), желательно иметь более точное приближение для P_c, которое позволяло бы одновременно получать аналитическое выражение для эффективного резонансного интеграла. Для получения такого приближения необходимо выяснить математический смысл приближения Вигнера.

Выражение для эффективного резонансного интеграла в случае узкого изолированного уровня имеет вид [3]

$$I_{\text{эфф}} = \int \frac{\sigma_c}{\Sigma_t} \Sigma_p \, du + \int \frac{\sigma_c \Sigma_{r0}}{\Sigma_t} \cdot \frac{\langle 1 - e^{-l\Sigma_t} \rangle}{d\Sigma_t} \, du. \quad (3)$$

Введем фактор блокировки $f = I_{\text{эфф}}/I_\gamma$, где $I_\gamma = \pi \Gamma \sigma_{c0}/2E_0$, и заменим в выражении (3) $\langle e^{-x} \rangle$ на $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\langle x \rangle}{n}\right)^{-n}$. Если резонанс имеет брейт-вигнеровскую форму, то, произведя частичное интегрирование в выражении (3), получим

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+h_0}} + \frac{h_0}{d\Sigma_p} \cdot \frac{1}{2(1+h_0)^{3/2}} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h_0}{d\Sigma_p} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^n}{(n + d\Sigma_p)^n} \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^n \, dx}{(1+h_0+x^2)^2 \, (1+h_n+x^2)^n} \right], \quad (4)$$

где $h_n = d\Sigma_{r0}/(n + d\Sigma_p)$.

Если теперь в выражении (4) вместо предела принять $n = 1$, то получим выражение для фактора блокировки в приближении Вигнера:

$$f^{(1)} = 1/\sqrt{1+h_1}.$$

Очевидно, что более точное приближение получится, если давать n значения 2, 3, 4 и т. д. Интегралы в выражении (4) берутся в элементарных функциях. Например, для $n = 2$ и $n = 3$

$$f^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1+h_0}} + \frac{4 + d\Sigma_p}{(2 + d\Sigma_p)^2} \cdot \frac{h_0}{2(1+h_2)^{3/2}} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{2h_0}{(2 + d\Sigma_p)\sqrt{1+h_0}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\sqrt{1+h_0} + 2\sqrt{1+h_2})}{(\sqrt{1+h_0} + \sqrt{1+h_2})^2} \right];$$

$$f^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{1+h_0}} + \frac{9}{(3 + d\Sigma_p)^2} \cdot \frac{h_0}{2(1+h_3)^{3/2}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{h_0(\sqrt{1+h_0} + 2\sqrt{1+h_3})}{\sqrt{1+h_0}\,(\sqrt{1+h_0} + \sqrt{1+h_3})^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(d\Sigma_p)^2}{9(3 + d\Sigma_p)} \left[1 + \frac{9h_0}{4(3 + d\Sigma_p)(1+h_3)} \right] \right\}.$$

Ошибка, которая вносится различными приближениями при $n = 1 \div 5$ в величину резонансного интеграла при $d\Sigma_p$, равных 0,1 и 1,0, приведена в табл. 2. Видно, что уже при $n = 2$ ошибка уменьшается приблизительно в два раза, а при $n \geqslant 5$ меняет знак. Перемена знака ошибки происходит из-за того, что $1 - \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\langle x \rangle}{n}\right)^{-n} = 1 - e^{-\langle x \rangle} > \langle 1 - e^{-x} \rangle$, т. е. при увеличении n в пределе мы получаем завышенное значение $I_{\text{эфф}}$, тогда как приближение Вигнера дает заниженное значение. Поэтому оптимальным с точки зрения наилучшего приближения к точному значению $I_{\text{эфф}}$ будет значение $n = 4 \div 5$.

Таблица 2

Значения $f^{(n)}/f_{\text{точн}}$ и $\tilde{f}^{(1)}/f_{\text{точн}}$, где $\tilde{f}^{(1)}$ рассчитывается по формуле (5)

n	$\lg h_0$: 0	0,5	1,0	1,5	2,0
	$d\Sigma_p = 0,1$				
1	0,9859	0,9622	0,9228	0,8993	0,9069
2	0,9953	0,9865	0,9691	0,9581	0,9640
3	0,9986	0,9953	0,9872	0,9814	0,9850
4	1,0002	0,9999	0,9969	0,9940	0,9957
5	1,0012	1,0027	1,0031	1,0020	1,0019
По формуле (5)	0,9932	0,9694	0,9287	0,9033	0,9108
	$d\Sigma_p = 1,0$				
1	0,9716	0,9587	0,9602	0,9648	0,9669
2	0,9877	0,9828	0,9852	0,9873	0,9876
3	0,9944	0,9920	0,9939	0,9944	0,9945
4	0,9979	0,9969	0,9979	0,9980	0,9980
5	1,0000	1,0000	1,0005	1,0000	1,0000
По формуле (5)	1,0000	0,9952	0,9791	0,9775	0,9830

Следует отметить, что приближение с $n = 1$ можно улучшить, особенно при $d\Sigma_p \gg 1$, если в выражении (4) вместо $n^n/(n + d\Sigma_p)^n$ записать $e^{-d\Sigma_p}$, а под интегралом принять $n = 1$.

Тогда для фактора блокировки получим выражение

$$\tilde{f}^{(1)} = \frac{(1 + d\Sigma_p)\, e^{-d\Sigma_p}}{\sqrt{1+h_1}} +$$

$$+ \frac{1 - (1 + d\Sigma_p)\, e^{-d\Sigma_p}}{\sqrt{1+h_0}} \left[1 + \frac{h_0}{2d\Sigma_p (1+h_0)} \right]. \quad (5)$$

В табл. 2 приведена также ошибка при определении эффективного резонансного интеграла с использованием формулы (5). Из табл. 2 видно, что, увеличивая n, можно уменьшить ошибку в величине эффективного резонансного интеграла до менее 2%, не выходя из рамок аналитического выражения для $I_{\text{эфф}}$.

Поступило в Редакцию 18/II 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Дреснер. Резонансное поглощение в ядерных реакторах. М., Госатомиздат, 1962.
2. Дж. Стюарт. Многократное рассеяние нейтронов. «Вопросы ядерной энергетики», № 6, 71 (1958).
3. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.