Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (99), 2016

УДК 512.542

О конечных группах, в которых каждая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна

В.Н. Семенчук, В.М. Селькин

Получено описание строения конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. В частности, получено описание таких групп в случаях, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных или всех p-разложимых групп.

Ключевые слова: конечная группа, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа, насыщенная формация, формация с условием Шеметкова.

The structure of finite groups in which every primery subgroup is either $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-abnormal is studied, where $\mathfrak{F}$ is a saturated hereditary formation with the Shemetkov property containing all nilpotent groups. In particular, descriptions of these groups have obtained in the cases when $\mathfrak{F}$ is either the formation of all p-nilpotent groups or all of the p-decomposable groups.

Keywords: finite group, $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup, primery subgroup, $\mathfrak{F}$-abnormal subgroup, saturated formation, formation with the Shemetkov property.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Фаттачи описал группы, у которых любая собственная подгруппа либо нормальна, либо абнормальна. Расширяя этот результат, Эберт и Бауман в работе [2] классифицировали группы, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественными обобщениями понятий субнормальности и абнормальности являются, соответственно, понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы и $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппы.

В 1986 г. Ферстер и В.Н. Семенчук, соответственно в работах [3], [4], исследовали строение групп, у которых все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абормальны. Впоследствии В.Н. Семенчук и С.Н. Шевчук в работе [5] начали исследовать группы, у которых каждая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абормальны. В работе В.Н. Семенчука и А.Н. Скибы [6] были описаны группы, у которых каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{U}$-субнормальна, либо $\mathfrak{U}$-абнормальна для случая, когда $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп.

Дальнейшему развитию данного направления и посвящена настоящая работа.

Необходимые определения и обозначения можно найти в монографии [7].

Напомним некоторые из них:

– формация – класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений;

– формация называется насыщенной, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений;

– формация называется наследственной, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы, то есть пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-нормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$ и $\mathfrak{F}$-абнормальной в противном случае.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Следуя Кегелю, назовем подгруппу H $\mathfrak{F}$-субнормальной в группе G, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H,$$

такая, что для любого $i = 1,2,\ldots,m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\Im} \subseteq H_i$.

Подгруппу H группы G назовем $\Im$-абнормальной, если для любой максимальной цепи

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H,$$

подгруппа H_i $\Im$-абнормальна в H_{i-1} для любого $1 \geq 1$.

Минимальная не $\Im$-группа – группа, не принадлежащая $\Im$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\Im$.

Группа Шмидта – минимальная ненильпотентная группа.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G.

Через $|\pi(G)|$ – число простых делителей порядка группы G.

Группа G называется примарной, если $|\pi(G)| = 1$.

Через $\pi(\Im)$ – множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\Im$.

Обозначим через G_p силовскую p-подгруппу группы G.

Формация $\Im$ называется формацией с условием Шеметкова, если любая минимальная не $\Im$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Согласно результатам работ [8], [9], примерами таких формаций являются формации всех p-нильпотентных и всех p-разложимых групп.

1. Предварительные сведения. В дальнейшем нам понадобятся следующие известные свойства $\Im$-субнормальных подгрупп.

Лемма 1. *Пусть $\Im$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\Im} \subseteq H$, то H – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G;

2) если H – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\Im$-субнормальная подгруппа K для любой подгруппы K группы G;

3) если H – $\Im$-субнормальная подгруппа K и K – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G, то H – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G;

4) если H_1 и H_2 – $\Im$-субнормальные подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G;

5) если H – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G, то H^x $\Im$-субнормальна в G для любых $x \in G$.

Лемма 2. *Пусть $\Im$ – наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы и любая минимальная не $\Im$-группа разрешима. Тогда любая группа, не принадлежащая $\Im$, у которой любая собственная подгруппа либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна разрешима.*

Доказательство. Пусть $G \notin \Im$. Очевидно, что G содержит минимальную не $\Im$-подгруппу H. Если $G = H$, то, согласно условию, G – разрешима и лемма доказана.

Пусть H – собственная подгруппа группы G. Если H – примарная подгруппа группы G, то, согласно условию, $H \in \Im$, что невозможно.

Итак, $|\pi(H)| > 1$. Согласно условию, H – разрешима. Нетрудно показать, что $1 \neq H^{\Im}$ – p-группа. Согласно условию, H либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна. Если H – $\Im$-абнормальна в G, то подгруппа $1 \neq H^{\Im}$ не является ни $\Im$-субнормальной, ни $\Im$-абнормальной в G, что невозможно. Итак, H – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G. По лемме 1 $H^{\Im} \neq 1$ – субнормальная подгруппа группы G. А это значит, что группа G содержит минимальную разрешимую подгруппу N.

Рассмотрим фактор-группу G/N. Согласно лемме 1, нетрудно показать, что любая собственная подгруппа G/N либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна в G/N. Если $G/N \notin \Im$, то, по индукции, G/N разрешима. Отсюда следует, что G разрешима. Аналогичным образом, нетрудно показать, что $\Phi(G) = 1$.

Итак, мы показали, что $N = G^{\mathfrak{I}}$.

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G. Если $N = G^{\mathfrak{I}} \subseteq M$, то M – максимальная $\mathfrak{I}$-нормальная подгруппа группы G. Нетрудно показать, что, согласно условию любая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{I}$-нормальна в M. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, то, очевидно, что $M \in \mathfrak{I}$. Пусть $N \not\subseteq M$. Тогда $G = N\lambda M$. Так как $G/N \in \mathfrak{I}$, то $M \in \mathfrak{I}$. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то G – минимальная не $\mathfrak{I}$-группа. А это значит, что G разрешима. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{I}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда любая не p-нильпотентная группа, у которой каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна разрешима.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{I}$ – формация всех p-разложимых групп. Тогда любая не p-разложимая группа, у которой каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна разрешима.*

Следствие 3 [6]. *Пусть $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда любая группа, у которой каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{U}$-достижима, либо $\mathfrak{U}$-абнормальна разрешима.*

В следующей лемме приведены известные свойства насыщенных наследственных формаций с условием Шеметкова (см. [10], [11]).

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация, с условием Шеметкова. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H и K – перестановочные $\mathfrak{I}$-субнормальные подгруппы группы G, то HK – $\mathfrak{I}$-субнормальная подгруппа группы G;

2) любая группа $G = AB$, где A и B $\mathfrak{I}$-субнормальные $\mathfrak{I}$-подгруппы принадлежат $\mathfrak{I}$;

3) если все силовские подгруппы группы G $\mathfrak{I}$-субнормальна в G, то $G \in \mathfrak{I}$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{I}$ – насыщенная наследственная формация. Пусть G – группа такая, что $G \notin \mathfrak{I}$, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{I})$ и любая примарная подгруппа из G либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна в G. Тогда:*

1) $G^{\mathfrak{I}} \subset G$.

2) $G = G^{\mathfrak{I}} G_p$, где $G^{\mathfrak{I}}$ – собственная подгруппа группы G, а силовская p-подгруппа G_p группы G $\mathfrak{I}$-абнормальна в G и является добавлением к $G^{\mathfrak{I}}$ в G.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $G^{\mathfrak{I}} = G$. Согласно условию любая, силовская p-подгруппа G_p, где $p \in \pi(G)$, является $\mathfrak{I}$-абнормальной в G. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, то $G_p \in \mathfrak{I}$ для любого простого числа p из $\pi(G)$. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то любая собственная неединичная подгруппа из G_p $\mathfrak{I}$-субнормальна в G_p, что невозможно. Итак, $|G_p| = p$ для любого простого числа p из $\pi(G)$. Отсюда следует разрешимость группы G. Так как $G_p \in \mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}$-абнормальна в G, то по теореме 15.1 из [7] G_p – $\mathfrak{I}$-проектор группы G. Согласно теореме 15.3 из [7] все $\mathfrak{I}$-проекторы группы G сопряжены в G. Отсюда нетрудно заметить, что $|G| = p$. А это значит, что $G \in \mathfrak{I}$. Получили противоречие.

Пусть в G существует $\mathfrak{I}$- абнормальная примарная p-подгруппа N, где $p \in \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{I})$. Так как $\mathfrak{I}$ – насыщенная формация, то $G_p \in \mathfrak{I}$. Пусть N – собственная подгруппа из G_p. Так как $\mathfrak{I}$ – наследственная формация, то N $\mathfrak{I}$-субнормальна в G_p, что невозможно. Итак, $N = G_p$. Выше мы показали, что $G^{\mathfrak{I}}$ – собственная подгруппа группы G. Покажем, что G_p является добавлением к $G^{\mathfrak{I}}$ в G. Предположим противное. Тогда в G_p найдется собственная подгруппа K такая, что $G^{\mathfrak{I}} K = G$. Согласно условию, K либо $\mathfrak{I}$-субнормальна, либо $\mathfrak{I}$-абнормальна в G. Как показано выше, K не может быть $\mathfrak{I}$-

абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, K $\Im$-субнормальна в G. Отсюда следует, что K содержится либо в некоторой максимальной $\Im$-нормальной подгруппе M группы G, либо в некоторой нормальной подгруппе группы G. Пусть M – $\Im$-нормальная подгруппа. Тогда $G^{\Im} \subseteq M$, отсюда $G = G^{\Im}K \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа группы . Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\Im)$, то $G/M \in \Im$. Из того факта, что $G/G^{\Im} \in \Im$, следует, что $G/M \cap G^{\Im}$. Отсюда $G^{\Im} \subseteq M$. Тогда $G = G^{\Im}K \subseteq M$, что невозможно. Итак, G_p – добавление к $G^{\Im}$ в G. Пусть L – произвольная примарная подгруппа, отличная от G_p. Согласно условию, L либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна в G. Так как либо $L \subseteq G^{\Im}$, либо $L \subset G_p$, то нетрудно заметить, что L – $\Im$-субнормальна подгруппа группы G. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\Im$ – насыщенная наследственная формация, с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Если в группе G примарные подгруппы либо $\Im$-субнормальны, либо $\Im$-абнормальны, то в G любая собственная подгруппа либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна.*

Доказательство. Пусть G – группа, у которой каждая примарная подгруппа либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна. Если в группе G все силовские подгруппы $\Im$-субнормальны, то согласно лемме 3 $G \in \Im$. Так как $\Im$ – наследственная формация, то любая собственная подгруппа группы G $\Im$-субнормальна в G.

Пусть в группе G найдется силовская p-подгруппа G_p, которая является $\Im$-абнормальной в G. Согласно лемме 4 $G^{\Im}$ – собственная подгруппа группы G. Ввиду леммы 4 $G = G^{\Im}G_p$, где G_p является минимальным дополнением к $G^{\Im}$ в G.

Пусть H – любая собственная подгруппа группы G, содержащая G_p. Так как G_p – $\Im$-абнормальная подгруппа G, то, очевидно, что H – $\Im$-абнормальная подгруппа группы G. Покажем, что все другие собственные подгруппы группы G $\Im$-субнормальны в G.

Пусть T – произвольная собственная подгруппа группы G, не содержащая G_p. Очевидно, что $T_p \subset G_p$. Так как $G_p \in \Im$ и $\Im$-наследственная формация, то T_p – $\Im$-субнормальная подгруппа G_p. Теперь, согласно лемме 1, получим, что T_p – $\Im$-субнормальная подгруппа G.

Рассмотрим подгруппу $G^{\Im}T$. Если $G^{\Im}T = G$, то известно, что $G_p = T_pG_p^{\Im}$. Так как T_p и $G_p^{\Im}$ – $\Im$-субнормальные подгруппы группы G, то по лемме 3 $T_pG_p^{\Im} = G_p$ – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G, что невозможно. Итак, $G^{\Im}T \subset G$. Очевидно, что все силовские подгруппы из $G^{\Im}T$ $\Im$-субнормальны. По лемме 3 $G^{\Im}T \in G$. Так как $\Im$ наследственная формация, то T – $\Im$-субнормальна в $G^{\Im}T$. По лемме 1 $G^{\Im}T$ $\Im$-субнормальна в G. Тогда по лемме 1 T – $\Im$-субнормальна в G. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\Im$ – насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы $G \notin \Im$ либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна, когда G имеет следующее строение:*

1) G *– разрешимая группа;*

2) $G_{p'} \lozenge G_p$, где $G_{p'} = G^{\Im} \in \Im$, G_p – циклическая подгруппа Картера. Группы G и G_p – $\Im$-проектор группы G;

3) любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Im$ – наследственная насыщенная формация с условием Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы и любая примарная подгруппа группы $G \notin \Im$ либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна. Согласно лемме 4, любая собственная подгруппа группы G либо $\Im$-достижима, либо $\Im$-абнормальна. Так как любая минимальная не $\Im$-группа разрешима, то, и группа G, согласно лемме 2, разрешима.

Пусть в G любая силовская подгруппа $\Im$-субнормальна в G. Тогда по лемме 3 $G\in\Im$, что невозможно. Итак, согласно условию, в группе G найдется силовская подгруппа G_p, которая является $\Im$-абнормальной в G.

Так как $\Im$ содержит все нильпотентные группы, то $G_p\in\Im$. По теореме 15.1 из [7] G_p – $\Im$-проектор группы G. Так как по теореме 15.3 из [7] все $\Im$-проекторы сопряжены, то все силовские G_q группы G, где $q\neq p$ являются $\Im$-субнормальными подгруппами группы G. По лемме 4 $G^{\Im}$ – собственная подгруппа группы G. По лемме 4 $G=G^{\Im}G_p$, где G_p является минимальным добавлением к $G^{\Im}$ в G.

Покажем, что $G^{\Im}=G_{p'}$. Так как G_p является минимальным добавлением к $G^{\Im}$ в G, то

$$G_p^{\Im}\subseteq G^{\Im}\cap G_p\subseteq\Phi(G_p).$$

По лемме Фраттини

$$G=G^{\Im}N_G(G_{p'})=G_p^{\Im}G_{p'}N_G(G_{p'})=G_p^{\Im}N_G(G_{p'}).$$

Если $N_G(G_{p'})\neq G$, то это противоречит тому, что $G_p^{\Im}\subseteq\Phi(G_p)$. Следовательно, $G_{p'}$ нормальна в G.

Отсюда следует, что $G_{p'}=G^{\Im}$. Так как $G^{\Im}$ – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G, то, очевидно что все примарные подгруппы из $G^{\Im}$ $\Im$-субнормальны в $G^{\Im}$. По лемме 3 $G^{\Im}\in\Im$.

Покажем, что G_p – циклическая подгруппа Картера группы G.

Пусть G_p – нециклическая подгруппа группы G. Тогда в G_p найдутся две несопряженные максимальные подгруппы H_1 и H_2 такие, что

$$G=G^{\Im}H_1G^{\Im}H_2.$$

Очевидно, что $G^{\Im}H_i$ $(i=1,2)$ – собственная $\Im$-субнормальная подгруппа группы G. Покажем, что $G^{\Im}H_i\in\Im$ $(i=1,2)$. Так как $G^{\Im}$ и H_i $\Im$=достижимы в G и принадлежат $\Im$, то по лемме 3 $G^{\Im}H_i\in\Im$. Так как $\Im$ – насыщенная наследственная формация с условием Шеметкова, то по лемме 3 $G\in\Im$, что невозможно. Итак, G_p – циклическая подгруппа группы G.

Так как G_p – $\Im$-абнормальная подгруппа группы G, то нетрудно показать, что $N_G(G_p)=G_p$. Следовательно, G_p – подгруппа Картера группы G.

Покажем, что максимальная подгруппа G_p^* из G_p нормальна в группе G. Как и выше, нетрудно показать, что $G_{p'}G_p^*\in\Im$. Очевидно, что $G_{p'}G_p^*$ – нормальная подгруппа в группе G. Рассмотрим подгруппу $G_qG_p^*$, где $q\neq p$. Очевидно, что G_q нормальна в $G_qG_p^*$. Предположим, что G_p – ненормальная подгруппа $G_qG_p^*$. Так как $G_qG_p^*\in\Im$, то по лемме 4.5 из [7]

$$G_qG_p^*/F_q(G_qG_p^*)\in f(q),$$

где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\Im$. Отсюда следует, что $p\in\pi(f(q))$. Так как $\Im$ – насыщенная наследственная формация, с условием Шеметкова, то, по теореме 1 из [12], формация $\Im$ имеет локальный экран h такой, что

$$h(q)=\mathrm{S}_{\pi(f(q))}$$

для любого q из $\pi(G)$.

Рассмотрим подгруппу G_qG_p. Очевидно, что G_q нормальна в G_qG_p. Как показано выше, $p\in\pi(f(q))$. Отсюда следует, что $G_qG_p/F_q(G_qG_p)\in h(q)$ и $G_qG_p/F_p(G_qG_p)\in h(p)$. Отсюда, согласно лемме 4.5 из [7], следует, что $G_qG_p\in\Im$. Так как G_p – $\Im$-абнормальная подгруппа из группы G, то G_pG_q – $\Im$-абнормальная подгруппа из G. По теореме 15.1 из [7] G_qG_p – $\Im$-проектор группы G, что невозможно. Итак, G_p^* нормальна в $G_qG_p^*$, где q – любое простое число из $\pi(G)$. Отсюда следует, что G_p^* – нормальная подгруппа группы G.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условию из пунктов 1)–3). И пусть K – произвольная примарная подгруппа группы G. Если $K = G_p$, то K – $\Im$-проектор группы G. А это значит, что K – $\Im$-абнормальная подгруппа группы G.

Пусть K – собственная подгруппа из G_p. Тогда $K \subseteq G_{p'} \times G_p^*$, где $G_{p'} = G^{\Im} \in \Im$, G_p^* – максимальная подгруппа из G_p. Так как $\Im$ содержит все нильпотентные группы, то $G_p^* \in \Im$. Так как $\Im$ – формация, то нетрудно показать, что $G_{p'} \times G_p^* \in \Im$. Так как $\Im$ – наследственная формация, то K – $\Im$-субнормальная подгруппа из $G_{p'} \times G_p^*$. Так как $G^{\Im} = G_{p'}$, то, по лемме 1, $G_{p'} \times G_p^*$ – $\Im$-субнормальна в G. Отсюда по лемме 1 K – $\Im$-субнормальна в G. Если K – q-группа, где $q \neq p$, то $K \subseteq G_{q'}$. Как и выше, нетрудно показать, что K – $\Im$-субнормальная подгруппа группы G. Теорема доказана.

Следствие 1 [5]. *Пусть $\Im$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы G, не принадлежащей $\Im$, либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна, когда $G = G_p \Diamond G_q$, где $q \neq p$, G_q – циклическая подгруппа Картера группы G, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\Im}$.*

Доказательство. Согласно [8] формация $\Im$ всех p-нильпотентных групп является формацией с условием Шеметкова. Тогда из теоремы и того факта, что G не p-нильпотентная группа, следует, что G – разрешимая группа $G_{q'} \Diamond G_q$, где $q \neq p$, $p \in \pi(G_{q'})$, $G_{q'}$ – p-нильпотентна, G_q – $\Im$-абнормальная циклическая подгруппа Картера группы G и любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G.

Покажем, что $G_q = G_p$. Пусть $r \neq p$ принадлежит $\pi(G_{q'})$. Рассмотрим подгруппу $G_r G_q$. Так как G_q – $\Im$-абнормальная подгруппа группы G, то $G_q G_r$ также $\Im$-абнормальна в G, что невозможно. Итак, $G_{q'} = G_p$.

Следствие 2. *Пусть $\Im$ – формация всех p-разложимых групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа не p-разложимой группы G либо $\Im$-субнормальна, либо $\Im$-абнормальна, когда G – разрешимая группа одного из следующих типов:*

1) $G = G_p \Diamond G_q$, где $q \neq p$, G_q – циклическая подгруппа Картера группы G, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\Im}$.

2) $G = G_{p'} \Diamond G_p$, где $G_{p'} = G^{\Im}$, G_p – циклическая подгруппа Картера группы G и любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G.

Согласно [9] формация $\Im$ всех p-разложимых групп является формацией с условием Шеметкова. Так как G не p-разложима, то $p \in \pi(G)$. Из теоремы следует, что либо $G = G_{q'} \Diamond G_q$, либо $G = G_{p'} \Diamond G_p$, где $q \neq p$. Если $G = G_{q'} \Diamond G_q$, то, как и в следствии 1, нетрудно показать, что $G = G_p \Diamond G_q$, где $G_p = G^{\Im}$ и G_q – циклическая подгруппа Картера группы G.

Пусть $G = G_{p'} \Diamond G_p$. Тогда утверждение 2) следует из теоремы.

Литература

1. Fattachi, A. Groups with only normal and abnormal subgroups / A. Fattachi // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28, № 1. – P. 15–19.

2. Ebert, G. A note on subnormal and abnormal chains / G. Ebert, S. Bauman // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 2. – P. 287–293.

3. Förster, P. Finite groups all of whose subgroups are $\Im$-subnormal or or $\Im$-subabnormal / P. Förster // J. Algebra. – 1986. – Vol. 103, № 1. – P. 285–293.

4. Семенчук, В.Н. Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1986. – № 2. – С. 50–55.

5. Семенчук, В.Н. Конечные группы, у которых примарные подгрупы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 8. – С. 46–55.

6. Semenchuk, V.N. On one generalization of finite U-critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // Journal of Algebra and its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 1650063-1 – 1650063-11.

7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

8. Ito, N. Note on (LM)-groups of finite order / N. Ito // Kodai Math.Sem.Rep. – 1951. – Vol. 1–2. – P. 1–6.

9. Чунихина, И.К. О p-разложимых группах / И.К. Чунихина, С.А. Чунихин // Мат. сборник. – 1944. – 15 (57):2. – С. 325–342.

10. Велесницкий, В.Ф. О конечных группах с перестановочными обобщенно субнормальными подгруппами / В.Ф. Велесницкий, В.Н. Семенчук // Украінский математичный журнал. – 2013. – P. 1555–1559.

11. Семенчук, В.Н. Разрешимая $\mathfrak{F}$-радикальная формация / В.Н. Семенчук // Мат. заметки. – 1996. – Т. 59, № 2. – С. 262–266.

12. Семенчук, В.Н. Характеризация локальных формаций по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск : Наука и техника, 1984. – С. 175–181.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 09.11.2016