А. Ф. Васильев, А. Г. Коранчук
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ФОРМАЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ ЛОКАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Свойства примарных подгрупп и их нормализаторов, так называемых локальных подгрупп, широко применялись при классификации простых неабелевых групп. Теория локальных конечных групп изначально была направлена на установление разрешимости групп нечетного порядка в пределах классификации простых групп. В дальнейшем эффективность и полезность локальных подгрупп проявилась при исследовании непростых, в частности, разрешимых групп.

Рассматривается следующая общая проблема. *Выяснить как свойства локальных подгрупп влияют на строение непростых групп*?

В настоящее время данная проблема изучается в различных направлениях. Первое направление связано с исследованием строения групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп (кратко, силовские нормализаторы) принадлежат данной формации.

В 1986 году М. Г. Бьянки, А. Джиллио, Б. Майри, П. Хаук в работе [1, с. 193–197] установили, что группа нильпотентена, если силовские нормализаторы, т. е. нормализаторы ее силовских подгрупп, нильпотентны.

А. Баллестер-Болинше и Л. А. Шеметков [2, с. 1–2] доказали, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда нормализатор каждой силовской p-подгруппы p-нильпотентен для любого простого числа p. Много работ различных авторов посвящено исследованию строения групп, у которых силовские нормализаторы принадлежат данной насыщенной формации F, см. обзор [3].

Другое направление связано с изучением свойств групп с заданным вложением ее локальных подгрупп. Например, хорошо известно, что группа нильпотентна, если каждая ее силовская подгруппа нормальна (субнормальна) в ней. Классическая теорема Глаубермана (1970) [4] утверждает, что группа является p-группой для некоторого простого числа p, если ее силовские подгруппы самонормализуемы.

В настоящее время широко применяется следующее обобщение субнормальности, введенное Т. Хоуксом (1969) в разрешимом случае и Л. А. Шеметковым (1978) в произвольном случае, см. [5, с. 236.].

Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\boldsymbol{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\boldsymbol{F}} \leq H_{i\text{-}1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Если $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$ – класс всех нильпотентных групп, то любая $\boldsymbol{N}$-субнормальная подгруппа будет субнормальной в группе. В общем случае обратное утверждение не выполняется, но для разрешимых групп понятия $\boldsymbol{N}$-субнормальной и субнормальной подгрупп эквивалентны.

Интересное обобщение субнормальной подгруппы (понятие $\boldsymbol{F}$-достижимой или согласно [5, с. 236] K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной подгруппы) было предложено О. Кегелем (1978).

Подгруппа H группы G называется K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i\text{-}1}$ нормальна в H_i, либо $H_i^{\boldsymbol{F}} \leq H_{i\text{-}1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Ясно, что в любой группе субнормальная подгруппа является K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной, однако обратное утверждение неверно в общем случае. Эквивалентность понятий субнормальной и K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной подгруппы имеет место для $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$.

В монографии [5], [6] вошли результаты многочисленных работ, в которых изучались свойства $\boldsymbol{F}$-субнормальных и K-$\boldsymbol{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения. В работе [7] было начато рассмотрение следующей проблемы.

Как $\boldsymbol{F}$*-субнормальные* (K-$\boldsymbol{F}$*-субнормальны*е) *силовские подгруппы влияют на строение всей группы* ($\boldsymbol{F}$ *– непустая формация*).

В работе [8] была введена и изучалась конструкция следующего класса групп.

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация. Через $w\boldsymbol{F}$ обозначается класс групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\boldsymbol{F})$ и любая силовская подгруппа из G $\boldsymbol{F}$-субнормальна в G.

Теорема 2 [8]. Класс групп $w\boldsymbol{F}$ *является наследственной насыщенной формацией всякий раз, как* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация*.

Теорема 3 [8]. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $w\boldsymbol{F}$ *совпадает с* $\boldsymbol{F}$*;*

2) *для разрешимой минимальной не* $\boldsymbol{F}$*-группы* G *либо* $|G|$ *– простое число, либо* G *– бипримарная дисперсивная группа*;

3) *для неразрешимой минимальной не $\boldsymbol{F}$-группы G с единичной подгруппой Фиттинга G является монолитической группой такой, что ее цоколь $Soc(G)$ – неабелева группа и $G/Soc(G)$ – примарная группа.*

В работе В. Н. Семенчука [9] была получена следующая

Теорема 4. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая наследственная формация, у которой любая минимальная не $\boldsymbol{F}$-группа разрешима. Любая группа G, у которой все силовские подгруппы $\boldsymbol{F}$-субнормальны и принадлежат $\boldsymbol{F}$, принадлежит $\boldsymbol{F}$, тогда и только тогда, когда любая минимальная не $\boldsymbol{F}$-группа G является либо бипримарной p-замкнутой группой ($p \in \pi(G)$), либо примарной группой.*

В [10] В. С. Монахов и И. Л. Сохор получили новые свойства класса $w\boldsymbol{F}$.

Теорема 5 [10]. *Пусть в каждой бипримарной минимальной не $\boldsymbol{F}$-группе $\boldsymbol{F}$-корадикал является силовской подгруппой. Тогда*

1) *если $G \in w\boldsymbol{F}$, то $\boldsymbol{F}$ принадлежит любая бипримарная подгруппа из G;*

2) *любая разрешимая минимальная не $w\boldsymbol{F}$-группа является бипримарной минимальной не $\boldsymbol{F}$-группой;*

3) *разрешимая группа G принадлежит $w\boldsymbol{F}$ тогда и только тогда, когда любая метанильпотентная подгруппа группы G принадлежит $\boldsymbol{F}$.*

В работе [11] были введены и изучались классы $\mathrm{W}_\pi\boldsymbol{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\boldsymbol{F}$, которые являются обобщениями класса $w\boldsymbol{F}$.

Весьма эффективным оказалось введенное в работе [12] следующие

Определение 2. Подгруппа H группы G называется $\mathbf{P}$-субнормальной в G, если либо $H=G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

В работе [13] В. С. Монахов и В. Н. Княгина установили, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда в ней все силовские нормализаторы $\mathbf{P}$-субнормальны.

Учитывая, что всякая $\boldsymbol{U}$-субнормальная подгруппа является $\mathbf{P}$-субнормальной, естественно рассмотреть следующее

Определение 3 [14]. Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустая формация групп. Подгруппа H группы G называется сильно К-$\boldsymbol{F}$-субнормальной в G, если $N_G(H)$ является $\boldsymbol{F}$-субнормальной подгруппой в G.

Любая сильно *К-$\boldsymbol{F}$-*субнормальная подгруппа является К-$\boldsymbol{F}$-субнормальной в группе. Это следует из того, что подгруппа группы нормальна в своем нормализаторе. Обратное утверждение в общем случае не выполняется.

Теорема 6. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – наследственная насыщенная формация, состоящая из дисперсивных групп, и G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $G \in \boldsymbol{F}$;

2) $\pi(G) \subseteq \pi(\boldsymbol{F})$ *и каждая силовская подгруппа из G сильно К-$\boldsymbol{F}$-субнормальна в G.*

Следствие 7. *Группа G сверхразрешима всякий раз, как каждая силовская подгруппа из G сильно К-$\boldsymbol{U}$-субнормальна в G.*

Здесь $\boldsymbol{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп.

Теорема 8. Пусть $\boldsymbol{F}$ – насыщенная формация, состоящая из метанильпотентных групп*, и G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $G \in \boldsymbol{F}$;

2) $\pi(G) \subseteq \pi(\boldsymbol{F})$ *и каждая силовская подгруппа из G сильно К-$\boldsymbol{F}$-субнормальна в G.*

Используя понятие сильно К-$\boldsymbol{F}$-субнормальной подгруппы, в [15] был введен следующий класс групп.

Определение 4. Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации $\boldsymbol{F}$ введем следующий класс групп:

$w_\pi{}^*\boldsymbol{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\boldsymbol{F})$ и для любого $q \in \pi \cap \pi(G)$ всякая силовская q-подгруппа является сильно $\boldsymbol{F}$-субнормальной в $G)$ и $w_\pi{}^*\boldsymbol{F} = w^*\boldsymbol{F}$ для $\pi = \mathbf{P}$.

В [15] получены свойства класса $w_\pi{}^*\boldsymbol{F}$.

Теорема 9. 1) Если $\boldsymbol{F}$ – непустая формация, то $w^*\boldsymbol{F}$ – гомоморф такой, что $\boldsymbol{N}_{\pi(\boldsymbol{F})} \subseteq w^*\boldsymbol{F} \subseteq w^*\boldsymbol{H}$, *где* $\boldsymbol{H}$ – формация и $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{H}$.

2) Если $\boldsymbol{F}$ – непустая наследственная формация, то $\boldsymbol{F} \subseteq w^*\boldsymbol{F} = w^*(w^*\boldsymbol{F})$ – S_H-замкнутая формация.

Теорема 10. *Если F – наследственная формация, то* $w^*\boldsymbol{F} \subseteq w_\pi^*\boldsymbol{F} = w_\pi^*(w_\pi^*\boldsymbol{F})$ *и* $w_\pi^*\boldsymbol{F}$ *является* S_H*-замкнутой формацией*.

Результаты работы [14] получили дальнейшее развитие в [16].

В [14] приведен пример разрешимой группы, нильпотентной длины 4, у которой силовские нормализаторы $\boldsymbol{F}$-субнормальны в G, но G не принадлежит $\boldsymbol{F}$. Данный пример мотивирует следующее

Определение 4 [17]. Пусть $\boldsymbol{F}$ – формация. Подгруппа H группы G называется абсолютно K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной (абсолютно $\boldsymbol{F}$-субнормальной) в G, если любая содержащая H подгруппа R является K-$\boldsymbol{F}$-субнормальной (соответственно, $\boldsymbol{F}$-субнормальной) в G.

Теорема 11 [17]. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– разрешимая насыщенная наследственная формация. Группа G принадлежит* $\boldsymbol{F}$ *тогда и только тогда, когда* $\pi(G) \subseteq \pi(\boldsymbol{F})$ *и каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно* K-$\boldsymbol{F}$*-субнормальной подгруппой в G*.

Следствие 12 [17]. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Группа G принадлежит* $\boldsymbol{F}$ *тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа группы G является абсолютно* K-$\boldsymbol{F}$*-субнормальной подгруппой в G*.

В заключение отметим, что к настоящему времени изучены группы, у которых циклические примарные подгруппы **P**-субнормальны [18], $\boldsymbol{F}$-субнормальны (K-$\boldsymbol{F}$-субнормальны) [19].

Проблема. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– непустая формация групп. Установить строение групп, у которых нормализаторы примарных циклических подгрупп* $\boldsymbol{P}$*-субнормальны* ($\boldsymbol{F}$*-субнормальны,* K-$\boldsymbol{F}$*-субнормальны*).

Список использованных источников

1 Bianci, M. G. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M. G. Bianci, A. Gillio Berta Mayri, P. Hauck // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47. – P. 193–197.

2 Ballester-Bolinches, A. On normalizers of Sylow subgroups in finite groups / A. Ballester-Bolinches, L. A. Shemetkov // Siberian Math. J. – 1999. – Vol. 40, № 1. – P. 1–2.

3 D'Aniello, A. A. Survey on Sylow Normalizers and Classes of groups / A. D'Aniello, L. S. Kazarin, A. Mart'inez-Pastor, M. D. P'erez-Ramos // Appl. Math. Sci. – 2014. – Vol. 8, № 134. – P. 6745–6752.

4 Glaubermann, G. Prime-power factor groups of finite groups II / G. Glaubermann // Math. Z. – 1970. – Vol. 117. – P. 46–56.

5 Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups. / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro / – Dordrecht : Springer-Verl., – 2006. – 385 p.

6 Каморников, С. Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. – Минск: Бел. навука, 2003. – 254 с.

7 Васильев, А. Ф. О влиянии примарных F-субнормальных подгрупп на строение группы / А. Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

8 Васильев, А. Ф. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // ПФМТ. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

9 Семенчук, В. Н. Конечные группы с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / В. Н. Семенчук // ПФМТ. – 2016. – № 3 (28). – С. 58–60.

10 Монахов, В. С. Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами / В. С. Монахов, И. Л. Сохор // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, № 4. – С. 851–863.

11 Васильев, А. Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. С. Вегера // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

12 Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

13 Kniahina, V. N. On supersolvability of finite groups with P-subnormal subgroups / V. N. Kniahina, V. S. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

14 Васильев, А. Ф. Конечные группы с сильно K-F-субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев // ПФМТ. – 2018. – № 4 (37). – С. 66–71.

15 Vasilyeva, T. I. On one operation on the formations of finite groups / T. I. Vasilyeva, A. G. Koranchuk // ПФМТ. – 2020. – № 2 (43). – С. 58–63.

16 Васильев, А. Ф. О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. Г. Коранчук // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, № 5. – С. 680–692.

17 Васильев, А. Ф. Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами / А. Ф. Васильев, А. Г. Мельченко // ПФМТ. – 2019. – № 4 (41). – С. 44–50.

18 Monakhov, V. S. Finite groups with P-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ricerche mat. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.

19 Мурашко, В. И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В. И. Мурашко // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.