В. И. Мироненко, В. В. Мироненко
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ПОДОБНЫХ МАТРИЦЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \ \ t \in R, \ \ x \in R^n, \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой $2\omega-$периодической $n \times n$ матрицей $P(t)$.

Для $2\omega-$периодических систем известна [1, с. 183], (см. также [2, с. 79]), теорема Флоке, согласно которой фундаментальная матрица решений $X(t)$ периодической системы (1) представима в виде $X(t) = \Phi(t)e^{A_0 t}$, где $\Phi(t)$ есть $2\omega-$ периодическая матрица, а A_0 – постоянная матрица. Эта матрица играет основную роль в вопросах существования и устойчивости периодических решений.

При изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений периодической системы (1) важную роль играет также отображение Пуанкаре (отображение за период) [3, с. 209], (см. также [4, с. 216]), где дано определение отображения Пуанкаре и для параболических уравнений в частных производных.

В 1984 году Мироненко В. И. было введено понятие отражающей функции [5].

Изучение отражающей функции показало ее большую эффективность при рассмотрении различных вопросов теории обыкновенных дифференциальных систем. Различные работы, относящиеся к этому, публиковались, в основном, в журнале «Дифференциальные уравнения» на русском языке. Применение отражающей функции всякий раз требовало повторения как определения, так и свойств отражающей функции. В связи с этим была издана монография [6]. А позже появилась необходимость расширить монографию [6]. Так появилась монография [7]. Авторам данной работы особенно приятно появление серьезных исследований в области теории отражающей функции, публиковавшихся на английском и китайском языках, и изложенных на китайском языке в монографии [8].

Приведем здесь необходимые для дальнейшего понимания этой работы сведения по теории отражающей функции.

Отражающая функция $F(t, x)$ для системы

$$\frac{dx}{dt} = Y(t, x), \ \ t \in R, \ \ x \in R^n, \tag{2}$$

связывает прошлое состояние $x(-t)$ этой системы с ее будущим состоянием $x(t)$ формулой $x(-t) = F(t, x(t))$. Дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией предыдущей системы (2) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t,F) = 0, \;\; F(0,x) \equiv x.$$

Если $F(t,x)$ есть отражающая функция $2\omega-$ периодической системы (2), то ее отображение Пуанкаре за период $[-\omega;\omega]$ задается формулой $x(\omega) = F(-\omega, x(-\omega))$, если только решения системы (2) продолжимы на $[-\omega;\omega]$. Этим объясняется целесообразность применения отражающей функции к изучению периодических систем. В частности, если система (2) $2\omega-$ периодична и нечетна по t, т. е. $X(-t,x) + X(t,x) \equiv 0$, то, как легко проверить, $F(t,x) \equiv x$ и потому все продолжимые на $[-\omega,\omega]$ решения такой системы будут $2\omega-$ периодичны. Отсюда следует, что отображение за период $[-\omega;\omega]$ иногда удается найти даже для систем неинтегрируемых в квадратурах.

Основные факты теории отражающей функции содержатся не только в отдельных журнальных статьях, но, конечно же, с ними лучше всего знакомиться по монографиям [6–7], где они излагаются последовательно и систематически.

Для линейных систем (1) теория отражающей функции особенно прозрачна и потому, в частности, что все решения линейной системы всегда продолжимы на R. Так как мы будем в дальнейшем иметь дело только с линейными системами (1), то в силу необходимости приведем основные факты из теории отражающей функции для линейной системы (1). Доказательства этих фактов содержатся в [6–7], но они настолько просты, что читатель может восстановить их самостоятельно без особых усилий:

1. Для линейной системы (1) с фундаментальной матрицей $X(t)$ отражающая функция линейна и имеет вид $\bar{x} = F(t)x = X(-t)X^{-1}(t)x.$

Матрица $F(t) = X(-t)X^{-1}(t)$ называется отражающей матрицей. Если $F(t)$ есть отражающая матрица системы (1), то для любого решения $x(t)$ системы (1) $x(-t) = F(t)x(t).$

2. Дифференцируемая матрица $F(t)$ является отражающей матрицей системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{dF}{dt} + FP(t) + P(-t)F = 0, \;\; F(0) = E. \tag{3}$$

Здесь и далее E есть единичная матрица.

3. Если матрица $P(t)-$ нечетна по t, то отражающая матрица системы (1) есть единичная матрица, т. е. $F(t) \equiv E$, и все ее решения четны.

4. Если $F(t)$ есть отражающая матрица $2\omega-$периодической системы (1), то ее отображение за период $[-\omega;\omega]$ задается формулой $x(\omega) = F(-\omega)x(-\omega).$

Таким образом матрица $F(-\omega)$ является матрицей отображения Пуанкаре на периоде $[-\omega;\omega]$.

Основные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах, в которых используются обозначения $P_e(t) = \dfrac{P(t)+P(-t)}{2}$ и $P_v(t) = \dfrac{P(t)-P(t)}{2}$.

Теорема 1. *Пусть существуют четные матрицы* $\Phi(t)$, $A(t)$ *и нечетная матрица* Δ, *для которых* $P_e\Phi = \Phi A$, $\dfrac{d\Phi}{dt} = P_v\Phi + \Phi\Delta$; A, Δ *и* $\int_0^t A(\tau)d\tau$ *коммутируют друг с другом. Тогда отражающая матрица системы (1) имеет вид* $F(t) = \Phi(t)\exp(-2\int_0^t A(\tau)d\tau)\Phi^{-1}$, *а матрица отображения Пуанкаре* $2\omega-$ *периодической системы (1) за период* $[-\omega,\omega]$ *подобна матрице* $\exp(2\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau)$.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 1, то матрица* $F(-\omega)$ *отображения Пуанкаре системы (1) на периоде* $[-\omega,\omega]$ *задается формулой* $F(-\omega)=\Phi(\omega)B(-\omega)\Phi^{-1}(\omega)$.

Теорема 2. *Пусть для* $2\omega-$ *периодической непрерывной на* R *матрицы* $P(t)$ *существует дифференцируемая матрица* $\Phi(t)$, *приводящая матрицу* $P_e(t)$ *к непрерывной, не меняющей своей структуры при всех* $t\in R$, *матрице Жордана* $J(t)$, *т. е.* $P_e(t)\Phi(t)=\Phi(t)J(t)$, *для которой* $\dfrac{d\Phi}{dt}=P_\nu(t)\Phi$.

Тогда фундаментальная матрица $X(t)$ *системы (1) может быть записана в виде* $X(t)=\Phi(t)\exp\int_0^t J(\tau)d\tau$. *При этом* $\Phi(t)$ *есть четная* $2\omega-$ *периодическая матрица.*

Список использованных источников

1 Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

2 Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – Москва : Мир, –1990. – 720 с. (Перевод с английского: Hartman Philip. Ordinary Differential Equations. – John Wiley & Sons, New York–London–Sidney, 1964.)

3 Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов / В. И. Арнольд. – 3-е изд. – Москва : Наука, 1984. – 272 с.

4 Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 370 с. (Перевод с английского: Henry Dan. Geometric Theory of semilinear Parabolic Equations. – Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1981.

5 Мироненко, В. И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В. И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. –Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

6 Мироненко, В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В. И. Мироненко. – Минск : изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

7 Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.

8 Zhou, Zhengxin. The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications / Zhengxin Zhou. – China Machine Press, Beijing. – 2014. – 218 p.