В. В. Можаровский
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОРТОТРОПНОГО ПОКРЫТИЯ, ЖЕСТКО СКРЕПЛЕННОГО С ОСНОВАНИЕМ

На современном этапе развития машиностроения актуальной задачей является создания новых термостабильных износостойких слоев из композитов с анизотропией механических свойств и градиентной структурой. В некоторой степени эти свойства касаются и для материалов покрытий на основе нитридов железа и хрома, хотя, следует отметить, что исследователи при расчетах элементов конструкций учитывают, в основном, только анизотропию сопротивления деформированию, не считая изменения деформированного и напряженного состояний вследствие анизотропии упругих свойств. Сложность учета анизотропии механических свойств еще заключается в том, что недостаточное внимание уделяется экспериментальным исследованиям и разработке, и созданию математических моделей расчета деформированного и напряженного состояний в покрытиях и основаниях.

В настоящей работе представлена математическая модель асимптотического расчета деформирования ортотропного покрытия, жестко скрепленного с основанием. В частности, приводятся основные зависимости, необходимые для реализации расчета перемещений в покрытиях при действии граничных нормальных и касательных усилий, например, диапазоне (-a, a). Используя предложенный алгоритм [1] создания функции Грина, легко строится интегральное уравнение для решения контактных задач с учетом трения в области контакта. Рассмотрим слоистый материал, армированный волокнами, которые ориентированы в направлении одной из осей X или У (координатные оси совпадают с основными направлениями материала (рисунок 1).

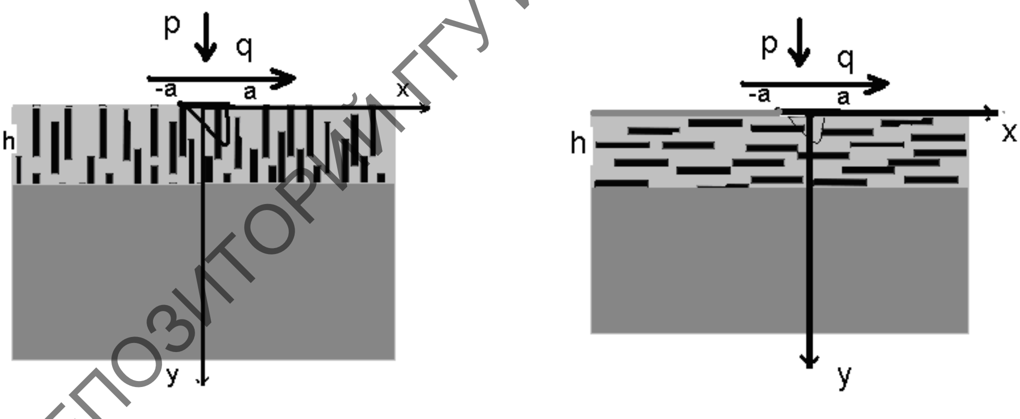

Рисунок 1 – Схема расчета покрытия армированного волокнами

С позиций макромеханики расчет напряженного и деформированного такого материала при действии граничной нагрузки необходимо рассматривать на основе закономерностей ортотропии. Основным элементом слоистого материала является слой (или полоса), характеризующийся упругими постоянными S_{11} и S_{22}, S_{12}, S_{66}, который определяется обычно как трансверсально-изотропное или ортотропное тело. При наличии упругих постоянных материала экспериментально полученных, можно рассчитать его напряженно-деформированное состояние. Для упрощения решения задачи расчета выделяется отдельная полоса слоистого материала (рисунок 1), что моделирует задачу о расчете покрытия жестко скрепленного с основанием. С помощью интегралов Фурье определяется напряженно-деформированное состояние покрытия [1]. Примем физические соотношения для плоского ортотропного композита в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy}, ε_x, ε_y, γ_{xy} – компоненты тензора напряжений и деформаций, v, u – перемещения.

Входящие в уравнение коэффициенты при плоской деформации равны:

$$S_{11} = \frac{1 - \upsilon_{31}\upsilon_{13}}{E_1}; \qquad S_{22} = \frac{1 - \upsilon_{32}\upsilon_{23}}{E_2};$$

$$S_{12} = \frac{-\upsilon_{12} - \upsilon_{13}\upsilon_{31}}{E_1}; \qquad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии: $\upsilon_{j3} = \upsilon_{3j} = 0,\ j = \overline{1,2};\ E_x = E_1,\ E_y = E_2;\ \upsilon_{xy} = \upsilon_{12};$ где E_j, G_{12}, υ – технические постоянные материала.

Корни характеристического уравнения [1, с. 55]), будут

$\gamma_i = \sqrt{\dfrac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{\left(S_{66} + 2S_{12}\right)^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}}$, коэффициенты $\beta_i = 1/\gamma_i$

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}; \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2S_{12} + S_{66}}{S_{22}}$$

для изотропного покрытия $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Асимптотические зависимости для определения деформированного состояния ортотропной полосы.

Впервые метод нахождения асимптотических зависимостей при решении контактных задач для изотропной упругой полосы на жестком основании с учетом трения разработали Александров В. М. [2], Соловьев А. С. [3]. Были представлены решения интегральных уравнений в форме степенных рядов малого параметра. Затем, Alblas J. B., Kuipers M. [4] получили аналитические зависимости и численные результаты для определения параметров контакта для полосы, скрепленной с жестким основанием. Решения для ортотропной полосы было дальше развито в работе [1, с. 66]. Аналогично как и для изотропной полосы, находим асимптотические зависимости для определения перемещений $v(x,0)$ и $u(x,0)$ ортотропной полосы на жестком основании при действии нормальной $p(x)$ и касательной $q(x)$ нагрузок на границе $-a < x < a$. Рассмотрим **случай** $h < a$**.** Согласно, работе [1, с. 118] пренебрегая членами высших порядков, имеем перемещения:

$$v(x,0) = \left(S_{22} - \frac{S_{12}^2}{S_{11}} \right) hp(x), \quad -a < x < a; \ u(x,0) = -S_{66} hq(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = S_{12} q(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S_{22} \frac{1}{h} q(x), \quad -a < x < a.$$

Случай $h > a$**.** Ранее были получены перемещения полосы на жестком основании при различных нагрузках. Нетрудно показать, что перемещения выражаются через интегралы вида

$$I_1=\int_0^\infty R_1\left(\beta_1\right)\frac{\cos\beta\xi}{\beta}\,d\beta\,;\qquad I_2=\int_0^\infty R_2\left(\beta\right)\frac{\sin\beta\xi}{\beta}\,d\beta\,,\qquad \xi=\left(x-t\right)/h\,.$$

Разложив $\cos\beta\xi$ и $\sin\beta\xi$ в степенные ряды, получим I_1 и I_2 в виде сумм степенных рядов, которые сходятся при $|\xi|<2$, $|x|<a$. Для симметричной нормальной нагрузки $p(x)$, перемещение (осадка поверхности) будет

$$v=\frac{S_{22}}{\pi}\left(\beta_2+\beta_1\right)\left[\int_{-a}^{a}p\left(t\right)\ln\left|\frac{t-x}{h}\right|dt+\sum_{i=0}^{\infty}d_i\int_{-a}^{a}p\left(t\right)\left(\frac{t-x}{h}\right)^{2i}dt\right],\quad |x|<a.$$

Для касательной нагрузки $q(x)$, перемещение (осадка поверхности) будет

$$v=\frac{-(S_{22}\beta_1\beta_2+S_{12})}{2}+\left[\frac{S_{22}}{\pi}\left(\beta_2+\beta_1\right)(\sum_{i=1}^{\infty}b_i\int_{-a}^{a}q\left(t\right)\left(\frac{t-x}{h}\right)^{2i-1}dt)\right],\ |x|<a.$$

Коэффициенты b_i определяются численным интегрированием (аналогично, как в [1, с. 41]):

$$d_0=\int_0^\infty\frac{(1-T\left(\beta\right)/D\left(\beta\right))-e^{-\beta}}{\beta}\,d\beta;\qquad d_j=\frac{\left(-1\right)^j}{\left(2j\right)!}\int_0^\infty(1-T\left(\beta\right)/D\left(\beta\right))\beta^{2j-1}d\beta,\ j=1,\ldots n\,,$$

где

$$D\left(\beta\right)={}_1\,R_1Q_1+\beta_2R_2Q_2+\left(\beta_1R_1Q_2+\beta_2R_2Q_1\right)sh\frac{\beta}{\beta_1}sh\frac{\beta}{\beta_2}-\left(\beta_1Q_1R_2+\beta_2Q_2R_1\right)ch\frac{\beta}{\beta_1}ch\frac{\beta}{\beta_2}$$

$$T\left(\beta\right)=(R_2Q_1sh\frac{\beta}{\beta_1}ch\frac{\beta}{\beta_2}-R_1Q_2sh\frac{\beta}{\beta_2}ch\frac{\beta}{\beta_1})(\beta_2-\beta_1)$$

$$F(\beta)=\left[\left(R_2Q_1^2+R_1Q_2^2\right)sh\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)sh\left(\frac{\beta}{\beta_2}\right)-\left(R_1+R_2\right)Q_1Q_2ch\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)ch\left(\frac{\beta}{\beta_2}\right)+Q_1Q_2\left(R_1+R_2\right)\right]$$

$$N\left(\beta\right)=F\left(\beta\right)\frac{\beta_1\beta_2}{(S_{22}\beta_1\beta_2+S_{12})}$$

$$b_j=\frac{\left(-1\right)^{j+1}}{\left(2j-1\right)!}\frac{(S_{22}\beta_1\beta_2+S_{12})}{S_{22}\left(\beta_2+\beta_1\right)}\int_0^\infty(1-N\left(\beta\right)/D\left(\beta\right))\beta^{2j-2}d\beta;\quad \left|\frac{t-x}{h}\right|<2$$

где $Q=S_{12}\gamma_i-\dfrac{S_{22}}{\gamma_i}$; $R_i=S_{11}\gamma_i^2-S_{12}$; $i=1{,}2$;

Используя действия сосредоточенной касательной силы определяем перемещения v_q в виде интеграла:

$$v_q=\frac{\beta_1\beta_2}{\pi}\int_0^\infty\frac{F\left(\beta\right)\dfrac{\sin(\frac{x\beta}{h})}{\beta}}{D\left(\beta\right)}\,d\beta;$$

Расчеты по данной зависимости практически совпадают с расчетами по асимптотическим формулам. Выше приведенные формулы можно применять для изотропного случая, если β_1, β_2 стремятся к 1 .Например, пусть задан волокнистый материал с модулями упругости $E_x = E_1 = E_{\max} = 50.8$ ГПа; $E_y = E_2 = 4.21$ ГПа; модуль сдвига $- G_{12} = 2.10$ Гпа. Для оценки влияния анизотропии упругого покрытия рассматривалась задача для покрытия из стекловолокна для 2-х случаев – когда ось X направлена вдоль волокон (случай модули упругости равны: коэффициент Пуассона $\upsilon_{12} = 0.3$) (плосконапряженное состояние) поперек волокон . Для тестирования программы расчета по выше приведенными зависимостями был рассмотрен частный случай когда $E_1 = 80.8$, $E_2 = 80.78$, $G_{12} = 31.07$ и $\upsilon_{12} = \upsilon_{13} = \upsilon_{31} = \upsilon_{23} = 0.3$ для плоского деформированного состояния, что соответствует изотропному состоянию. Расчет показал, что $\beta_1 = 0.990126, \beta_2 = 1.00984$ Все рассчитываемые коэффициенты d и b совпадают с коэффициентами рассчитанными по методике [1, с. 40].

Таким образом, в работе предложена методика расчета деформативности покрытий, обладающих анизотропными свойствами. Используя данную методику можно численно решать контактные задачи как для ортотропных материалов, так и для изотропных.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ, задание № Т20УКА – 012.

Список использованных источников

1 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 280 с.

2 Александров В. М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления и трения / В. М. Александров // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34. – Вып. 2. – С. 246–257.

3 Solov'ev, A. S. An integral equation and its application to contact problems in the theory of elasticity with friction and cohesion forces / A. S. Solov'ev // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1969. – Vol. 33. – № 6. – P. 1042–1050.

4 Alblas, J. B. The two dimensional contact problem of a rough stamp sliding slowly on an elastic layer–I. General considerations and thick layer asymptotics / J. B. Alblas, M. Kuipers // Int. J. Solids Structures – 1971. – Vol. 7(1) – P. 99–109.