

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОДГРУППЫ ШМИДТА

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает группу; подгруппа A группы G называется *модулярной* в G [1], если выполняются следующие условия:

- (i) $\langle X, A \cap Z \rangle = \langle X, A \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$ и
- (ii) $\langle A, Y \cap Z \rangle = \langle A, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $A \leq Z$.

Подгруппа H группы G называется \mathcal{U} -нормальной [2] или *строго \mathcal{U} -субнормальной* [3] в G , если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является циклическим.

Напомним также, что G называется *группой Шмидта*, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна. С изучением и применениями групп Шмидта связано большое число публикаций (см., в частности, книги [4]–[7]) и, прежде всего, это мотивировано тем, что каждая ненильпотентная группа содержит хотя бы одну подгруппу Шмидта.

В работе [8] В. Н. Семенчук доказал, что если каждая подгруппа Шмидта ненильпотентной группы G субнормальна в G , то G метанильпотентна, т. е. $G/F(G)$ является нильпотентной группой. Это важное наблюдение было развито в различных направлениях. В частности, В. С. Монахов и В. Н. Княгина доказали [9], что в группах G с таким условием производная подгруппа G' нильпотентна. А в работе В. А. Ведерникова [10] было получено полное описание групп с субнормальными подгруппами Шмидта. В работе [11] И. В. Блинец и В. М. Селькин установили, что если каждая подгруппа Шмидта ненильпотентной группы G модулярна в G' , производная подгруппа G' нильпотентна.

В последние годы исследования многих авторов (см., например, [12]–[23]) были связаны с изучением и применениями так называемых σ -субнормальных подгрупп [12]. Напомним, что подгруппа A в G называется σ -субнормальной в G [12], если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной, т. е. $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ_i -группой для некоторого i , для всех $i = 1, \dots, n$.

Отмеченные выше результаты работ [8], [9], [11] получили дальнейшее развитие также в теории σ -субнормальных подгрупп. В частности, доказано, что если каждая подгруппа Шмидта группы G σ -субнормальна, то G' является σ -нильпотентной группой, т. е. является прямым произведением σ -примарных групп [14]. Более того, в каждой группе G' , удовлетворяющей этому условию, имеется нормальная σ -нильпотентная подгруппа N с циклической фактор-группой G/N [21]. В работе [15] было доказано, что G' является σ -нильпотентной группой и в случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы G является либо σ -субнормальной, либо модулярной в G .

В данной работе докажем следующий результат в этом направлении.

Теорема 0.1 *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо \mathcal{U} -нормальна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 0.2 [8, теорема 2]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то $G/F(G)$ нильпотентна.*

Следствие 0.3 (см. теорему в [9]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 0.4 (см. теорему в [11]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G , то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Список использованных источников

1 Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. — Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1994 – 590 p.

2 Hu, B. Finite groups with only \mathfrak{F} -normal and \mathfrak{F} -abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

3 Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – № 550. – P. 69–85.

4 Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag. – 1967 – 793 p.

5 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 271 p.

6 Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – Москва : Наука, 1989. – 255 p.

7 Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Springer, Dordrecht, 2006. – Vol. 584. – 385 p.

8 Семенчук, В. Н. Конечные группы с системами минимальных не \mathfrak{F} -подгрупп / В. Н. Семенчук, в книге: Подгрупповое строение конечных групп. – Минск : Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.

9 Монахов, В. С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В. С. Монахов, В. Н. Княгина // Сибирск. матем. ж. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

10 Ведерников, В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В. А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.

11 Близнац, И. В. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И. В. Близнац, В. М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.

12 Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -per-mutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

13 Beidleman, J. C. On τ_σ -quasinormal subgroups of finite groups / J. C. Beidleman A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.

14 Al-Sharo, K. A. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / K. A. Al-Sharo, A. N. Skiba // Comm. Algebra. – 2017. – Vol. 45. – P. 4158–4165.

15 Hu, B. On finite groups with generalized σ -subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // *Comm. Algebra.* – 2017. – Vol. 46, № 2. – P. 1–8.

16 Skiba, A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A. N. Skiba // *J. Algebra.* – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.

17 Skiba, A. N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A. N. Skiba // *J. Belarusian State Univ. Math. Informatics.* – 2019. – № 3. – P. 35–47.

18 Guo, W. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal / W. Guo, A. N. Skiba // *Sci. China Math.* – 2019. – № 62 – P. 1355–1372.

19 On σ -subnormality criteria in finite σ -soluble groups / A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, M. C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig // *RACSAM.* – 2020. – Vol. 114, № 94. – <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4>.

20 On σ -subnormal subgroups of factorised finite groups / A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, M. C. Pedraza-Aguilera, X. Yi // *J. Algebra.* – 2020. – № 559. – P. 195–202.

21 Yi, X. Finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S. F. Kamornikov // *J. Algebra.* – 2020. – № 560. – P. 181–191.

22 Kamornikov, S. F. On σ -subnormal sub-groups of finite groups / S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyaynov // *Siberian Math. J.* – 2020. – Vol. 60, № 2. – P. 337–343.

23 Kamornikov, S. F. On σ -subnormal sub-groups of finite $3'$ -groups / S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyaynov // *Ukrainian Math. J.* – 2020. – Vol. 72, № 6. – P. 806–811.