А. Н. Скиба
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО СЛАБО СУБНОРМАЛЬНЫМИ И ЧАСТИЧНО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Все рассматриваемые в нашем сообщении группы конечны, и G всегда обозначает группу; G называется *группой Шмидта,* если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа из G нильпотентна. Подгруппа H из G называется: *полуперестановочной* в G [1], если H имеет такое добавление B в G, что H перестановочна с каждой подгруппой L из B, т. е. $HL = LH$; $\mathfrak{U}$-*нормальной* в G [2], если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является циклическим. Символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G [3], т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G со свойством $G/N \in \mathfrak{F}$ Мы используем $G^{\mathfrak{N}}$ и $G^{\mathfrak{U}}$ для обозначения нильпотентного и сверхразрешимого корадикалов группы G, соответственно.

Подгруппа A **группы** G называется *субнормальной* в G, **если** $A = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = G$, где $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ всех $i = 1, ...,n$. Субнормальные и обобщенно субнормальные подгруппы нашли широкие приложения при изучении групп G с различными ограничениями на характер вложения в G выделенных систем подгрупп. В данной работе мы рассмотрим следующие два обобщения субнормальности.

Определение. *Мы говорим, что подгруппа H группы G является: (i) слабо субнормальной* в G, если $H = \langle A, B\rangle$ **для некоторой субнормальной** подгруппы A и полуперестановочной подгруппы B из G; (ii) *частично субнормальной в* G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппы B из G.

Ясно, что все субнормальные и все перестановочные подгруппы слабо субнормальны; все субнормальные подгруппы и все $\mathfrak{U}$-нормальные **подгруппы частично** субн**ормальны** в G. Теперь рассмотрим следующий

Пример. Пусть $7 < p<q<r<t$ – простые числа, где r делит $t - 1$. Пусть P – простой точный F_pC_q-модуль и A – **подгруппа** порядка p из P. Тогда $A < P$ так как $q > p$.

(i) Пусть $G = (P \rtimes C_q) \times A_5$, где A_5 – знакопеременная группа степени 5. Пусть $H = AB$, где B – группа порядка 12 в A_5. Тогда A субнормальна и B полуперестановочна в G, и поэтому H является слабо субнормальной в G. Поскольку $B = H \cap A_5$ не является субнормальной в A_5, H не является субнормальной в G по [4, глава **A,** лемма 14.1 (b)]. Понятно, что $H_G = 1$, поэтому каждая неединичная подгруппа из H не является $\mathfrak{U}$-нормальной в G. Следовательно, H не является частично субнормальной в G.

(ii) Пусть теперь $G = (C_7 \rtimes (C_2 \times C3)) \times (P \rtimes C_q)$, где $C_2 \times C_3 = Aut(C_7)$. И пусть $H = AB$, где $B = C_2$. Тогда $H_G = 1$ и B является $\mathfrak{U}$ -нормальной в G, поскольку $B^G = C_7 \rtimes C_2$. Следовательно, H является частично субнормальной в G. Предположим, что H слабо субнормальна в G, т. е. $H = LT$ для некоторой субнормальной подгруппы L и некоторой полуперестановочной подгруппы T из G. Пусть V – такая подгруппа в G, что

$G = TV$ и T перестановочна со всеми подгруппами из V. Сначала предположим, что $T = H = AB$. Но тогда для каждого $x \in G$ имеет место $TC_3^x = C_3^xT$ (см. ниже лемму 2.2), и поэтому $BC_3^x = C_3^xB = C_3^x \times B$ поскольку любые две холловские {2, 3}-подгруппы G сопряжены. Следовательно, $(C_3)^G = C7 \rtimes C3 \leq C_G(C_2)$. Но тогда $[C_7, C_2] = 1$, противоречие. Следовательно, $T < H$. Понятно, что H не является субнормальной в G, поэтому A является наибольшей субнормальной подгруппой группы G, содержащейся в H. Следовательно, $L = A$ и $T = B$. Теперь, применяя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что $[C_7, C_2] = 1$. Это противоречие показывает, что H не является слабо субнормальной в G.

Бэр доказал [5] (см. также [6, глава 1, теорема 1.13]), что если $G = AB$, где A и B – нормальные сверхразрешимые подгруппы в G, и производная подгруппа G' нильпотентна, то G также сверхразрешима. Этот результат был обобщен многими авторами (см., например, недавние статьи [7]–[11]). В данной работе мы докажем следующий факт в этом направлении исследований.

Теорема 1. G *сверхразрешима тогда и только тогда, когда* G = AB, *где* A *и* B – сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G и любая подгруппа Шмидта группы G частично субнормальна в G.

Фактически, теорема 1 является следствием наших следующих двух результатов, которые, возможно, независимо интересны, поскольку они обобщают некоторые уже известные результаты.

Первая теорема обобщает вышеупомянутый результат Бэра.

Теорема 2. *Предположим, что* G = AB, *где* A *и* B *– сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в* G. *Тогда* G *разрешима. Более того, если производная подгруппа G' нильпотентна, тогда G сверхразрешима.*

Следствие 1. (см. теорему 3.8 в [12]). *Предположим, что* G = *AB, где* A *и* B *– такие сверхразрешимые подгруппы в G, что A перестановочна со всеми подгруппами из* B *и* B *перестановочна со всеми подгруппами из* A. *Если производная подгруппа G' нильпотентна, тогда G сверхразрешима.*

Следствие 2. *Если G = AB, где A и B – сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G, то* $(\boldsymbol{G}')^{\mathfrak{N}} = \mathbf{G}^{\mathfrak{U}}$.

Доказательство. Пусть $D = (\boldsymbol{G}')^{\mathfrak{N}}$. Тогда гипотеза справедлива для G/D по лемме 2.1(1) ниже, поэтому G/D сверхразрешима по теореме 2. Следовательно, $\mathbf{G}^{\mathfrak{U}} \leq D$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $D = \mathbf{G}^{\mathfrak{U}}$. Следствие доказано.

Из следствия 4 получаем

Следствие 3. (см. теорему 2.1 в [10]). *Если G = AB, где A и B – такие сверхразрешимые подгруппы в G, что A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A, то* $(\boldsymbol{G}')^{\mathfrak{N}} = \mathbf{G}^{\mathfrak{U}}$.

Следствие 4. (см. теорему 2 в [9]). *Если G = AB, где A и B – сверхразрешимые субнормальные подгруппы в G, то* $(\boldsymbol{G}')^{\mathfrak{N}} = \mathbf{G}^{\mathfrak{U}}$.

Теорема 3. *Если каждая подгруппа Шмидта в G частично субнормальна в G, то производная подгруппа G нильпотентна.*

Следствие 5. (см. теорему 2 в [13]). Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то G/F(G)*нильпотентна.*

Следствие 6. (см. теорему в [8]). Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то G/F(G)*абелева.*

Подгруппа M группы G называется модулярной в G, если M является модулярным элементом (в том смысле Куроша [14, стр. 43]) решетки всех подгрупп группы G, т. е. (i) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G$, $Z \leq G$, таких, что $X \leq Z$ и (ii) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G$, $Z \leq G$, таких, что $M \leq Z$. В силу теоремы 5.2.5 монографии [14] каждая модулярная подгруппа $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Из этого факта и теоремы 7 мы получаем также следующее

Следствие 7. (см. теорему 1.1 в [15]). Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то G/F(G)*абелева.*

Список использованных источников

1 Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.

2 Hu, B. Finite groups with only ^-normal and F-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22. – № 5. – P. 915–926.

3 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.

4 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter, Berlin–New York. – 1992. – 891 p.

5 Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – 115–187.

6 Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein [ed. al.]. – Passaic, New Jersey : Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.

7 Васильев, А. Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Известия Вузов. Математика. – 1997. – Vol. 11. – С. 10–14.

8 Monakhov, V. S. On finite groups with some subnormal Schmidt subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Knyagina // Siberian Math. Zh. – 2004. – Vol. 46. – P. 353–372.

9 Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Siberian Math. Zh. – 2017. – Vol. 58. – № 2. – P. 271–280.

10 Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of mutually permutable products, Problems of Physics, Mathematics and Technics / V. S. Monakhov. – 2018. – Vol. 34. – № 1. – P. 69–70.

11 Monakhov, V. S. Finite groups with two supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2019. Vol. 22. – № 2. – P. 297–312.

12 Asaad, M. On the supersolvabilitv of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–226.

13 Семенчук, В. Н. Конечные группы с системами минимальных не F-подгрупп, в книге: Подгрупповое строение конечных групп / В. Н. Семенчук // Наука и Техника, Минск, 1981. – С. 138–149.

14 Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin – New York : Walter de ruyter, 1994 – 590 p.

15 Близнец, И. В. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И. В. Близнец, В. М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4(41). – С. 36–38.