А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, Д. А. Волков
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Введение. В последние годы объектом повышенного внимания являются многочлены, удовлетворяющие нестандартным соотношениям ортогональности. Такие многочлены естественным образом возникают в качестве знаменателя аппроксимаций Паде для системы марковских функций [1]. В этом контексте их принято называть *полиортогональными* многочленами. Для полиортогональных многочленов соотношения ортогональности распределены между несколькими мерами $\mu_1,...,\mu_k$. Особый интерес представляют меры, для которых общую теорию ортогональных многочленов можно распространить на полиортогональные многочлены. Ряд основополагающих результатов в этом направлении исследований получен в [2]–[5]. Будем рассматривать близкую по постановке задачу. В классической теории ортогональных многочленов хорошо известно представление ортогонального многочлена Q_n в виде:

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

где

$$s_i = \int_\Delta x^i \, d\mu(x) \; (i = 0,1,...)$$

– последовательность степенных моментов меры μ с носителем Δ. Тождество (1) устанавливается [1] в результате процесса ортогонализации Грамма−Шмидта линейно независимой системы $1, x, ..., x^n$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ. В данной работе доказывается, что аналогичное представление справедливо и для полиортогонального многочлена. В частности, найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности полиортогонального многочлена, при выполнении которых он представляется в детерминантном виде.

Полиортогональные многочлены. Определения и свойства.

Множество $k-$ мерных мультииндексов (индексов) $n = (n_1, ..., n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $n = (n_1, ..., n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + ... + n_k$.

Пусть $s = (s_0, s_1, ...)$ – произвольная последовательность комплексных чисел. В комплексном линейном пространстве $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, состоящем из многочленов, определим линейный функционал $\mathfrak{S}_s$: если $T \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и

$$T(z) = t_0 + t_1 z + ... + t_n z^n ,$$

то полагаем $\mathfrak{S}_s(T(z)) := t_0 s_0 + t_1 s_1 + ... + t_n s_n$.

Определение 1. Тождественно не равный нулю многочлен Q, $\deg Q \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$ будем называть n-ым ортогональным многочленом относительно последовательности s, если

$$\mathfrak{S}_s(Q(z) \cdot z^\nu) = 0, \nu = 0, 1, ..., n-1 .$$

При $n = 0$ 0-ым ортогональным многочленом по определению считаем многочлен $Q(z) \equiv 1$.

Рассмотрим теперь k произвольных последовательностей $s^j = (f_0^j, f_1^j, ...)$ и соответствующий им набор (систему) $f = (f_1, ..., f_k)$, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, \; j = 1, 2, ..., k . \tag{2}$$

Обозначим через $\mathfrak{S}_{s^j}$ функционал, соответствующий последовательности s^j.

Определение 2. Пусть $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Тождественно не равный нулю многочлен $Q = Q_{|n|}$, $\deg Q \leqslant |n|$ будем называть n-ым полиортогональным многочленом (II-го типа) для набора формальных степенных рядов (2), если

$$\mathfrak{S}_{s^j}(Q(z) \cdot z^\nu) = 0, \nu = 0, 1, ..., n_j - 1; \; j = 1, ..., k \tag{3}$$

Здесь предполагается, что $n_j \neq 0$. Если $n_{j_0} = 0$, то в (3) индекс j пробегает значения $\{1, ..., j_0 - 1, j_0 + 1, ..., k\}$, т. е. последовательность s^{j_0} и ряд f_{j_0} в определении полиортогонального многочлена не участвуют. Для $n = (0, ..., 0)$ 0-ым полиортогональным многочленом по определению считаем $Q(z) \equiv 1$.

В том случае, когда μ_j при каждом $j = 1, ..., k$ является положительной борелевской мерой на вещественной прямой с компактным бесконечным спектром, носителем которой являются отрезок Δ_j, а

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j, \ j = 1,...,k$$

– соответствующий набор марковских функций, соотношения ортогональности (3) принимают привычный вид:

$$\int_{\Delta_j} Q(x) \cdot x^\nu d\mu_j(x) = 0, \quad \nu = 0,1,...,n_j - 1; \quad j = 1,...,k \ .$$

При этом функция f_j представляется соответствующим рядом (2), где

$$f_i^j = \int_{\Delta_j} x^i d\mu_j(x), \quad i = 0,1,... .$$

Полиортогональный многочлен Q условиями (3) определяется не однозначно, а с точностью до числового множителя. Эта неединственность может быть и более существенной.

Определение 3. Будем говорить, что n-ый полиортогональный многочлен Q однозначно определяется условиями (3), если для любых двух таких многочленов $Q^{'}$, $Q^{''}$ найдётся комплексное число λ, что $Q^{''} \equiv \lambda Q^{'}$.

Центральными в теории полиортогональных многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы.

Определение 4. Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ называется нормальным для системы f, если для любого n-го полиортогонального многочлена Q имеем $\deg Q = |n|$.

Хорошо известно [1], что при $k = 1$ индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ является нормальным тогда и только тогда, когда определитель Ганкеля H_n, элементами которого являются коэффициенты ряда f_1,

$$H_0 = 1, H_1 = f_0^1, H_n = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \cdots & f_{n-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \cdots & f_{2n-2}^1 \end{vmatrix}, \quad n > 1$$

отличен от нуля. Для $k > 1$ критерий нормальности индекса нам неизвестен.

Определение 5. Система f называется совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для f.

Нормальность индекса n является достаточным условием единственности n-го полиортогонального многочлена. Легко привести пример, который показывает, что нормальность индекса n, вообще говоря, не является необходимым условием единственности многочлена Q.

Критерий единственности. Явный вид полиортогонального многочлена.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для $n_j \neq 0$ определим матрицы порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{pmatrix} f_0^j & f_1^j & \cdots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \cdots & f_{|n|+1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \cdots & f_{|n|+n_j-1}^j \end{pmatrix}, \quad j = 1,...,k \ ;$$

а затем матрицу порядка $|n|\times(|n|+1)$ $F_n=\begin{bmatrix}F^1 & F^2 & \ldots & F^k\end{bmatrix}^T$.

При $n_j=0$ матрица F_n не содержит блок-матрицу F^j. Если к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку $E(z)=\begin{pmatrix}1 & z & \ldots & z^{|n|-1} & z^{|n|}\end{pmatrix}$, то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид $det\begin{bmatrix}F^1 & F^2 & \ldots & F^k & E(z)\end{bmatrix}^T$.

Определение 6. Индекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$ будем называть допустимым для f, если ранг матрицы F_n равен $|n|$.

Определение 7. Систему f будем называть почти совершенной, если все индексы $n\in\mathbb{Z}_+^k$ являются допустимыми для f.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы для ненулевого индекса $n\in\mathbb{Z}_+^k$ и системы f n-ый полиортогональный многочлен $Q_{|n|}$ определялся условиями (3) однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был допустимым для f, т. е. $rang\,F_n=|n|$.*

Если $rang\,F_n=|n|$, то при определённом выборе мультипликативного множителя полиортогональный многочлен $Q_{|n|}$ представляется в виде

$$Q_{|n|}(z)=det\begin{bmatrix}F^1 & F^2 & \ldots & F^k & E(z)\end{bmatrix}^T. \qquad (4)$$

Замечания и следствия.

В первую очередь следует сказать, что если индекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$ не является допустимым для f, то многочлен $Q_{|n|}$, определённый равенством (4), не является n-м полиортогональным многочленом для f. Так для системы функций (f_1, f_2)

$$f_1(z)=-f_2(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\ldots$$

$Q_2(z)=(a+bz)-(a+2b)z^2/4$. Однако, если этот многочлен находить по формуле (4), то получим, что $Q_2(z)\equiv 0$.

Легко заметить, что компонента n_j мультииндекса $n=(n_1,\ldots,n_k)$ определяет число коэффициентов ряда f_j, которое учитывается при построении многочленов $Q_{|n|}$. Если, например, $n=(n_1,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}_+^k$, то $|n|=n_1$. Отождествляя n_1 с n получим представление в точности совпадающее с классической формулой (1).

Опираясь на теорему 1, нетрудно получить критерий нормальности индекса $n\in\mathbb{Z}_+^k$ при $k>1$.

Следствие 1. Ненулевой индекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$ является нормальным для f тогда и только тогда, когда определитель

$$H_n^k=\begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \ldots & f_{|n|-1}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \ldots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0^k & f_1^k & \ldots & f_{|n|-1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \ldots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{vmatrix}\neq 0.$$

Следствие 2. Полиортогональный многочлен Q_n определен однозначно для всех мультииндексов $n \in \mathbb{Z}_+^k$ тогда и только тогда, когда система f является почти совершенной.

Следствие 3. Пусть ненулевой мультииндекс $n = (n_1, \ldots, n_k)$ является допустимым для системы f. Тогда

$$\deg P_n^j = |n| - 1 \Leftrightarrow H_n^k \cdot f_0^j \neq 0.$$

Список использованных источников

1 Никишин, Е. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин. – Москва : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.

2 Aptekarev, A. I. Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi-Bessel polynomials / A. I. Aptekarev, F. Marcellán, I. J. Rocha // Approx. Theory. – 1997. – № 90 (1). – P. 117–146.

3 Aptekarev, A. I. Multiple orthogonal polynomials / A. I. Aptekarev // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – № 99 (1–2). – P. 423– 447.

4 Van Assche, W. Some classical multiple orthogonal polynomials / W. Van Assche, E. Coussement // J. Comput. Appl. Math. – 2001 – Vol. 127.– P. 317–347.

5 Aptekarev, A. I. Multiple orthogonal polynomials for classcal weights / A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – Vol. 355 (10). – P. 3887–3914.