

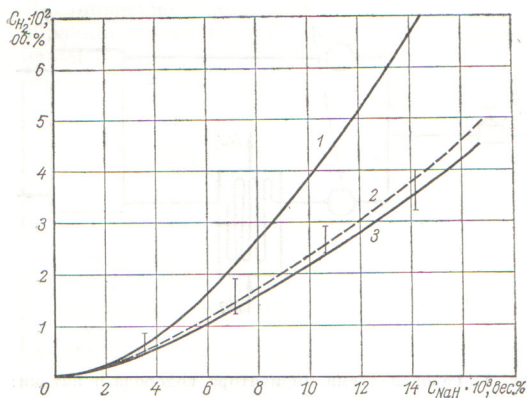


Рис. 3. Тарировка индикатора водорода:

1 — расчет по максимальному значению u ; 2 — эксперимент; 3 — расчет по минимальному значению u .

режима ловушки по температуре и расходу, загрязнения теплоносителя за счет выноса примесей из ловушки не происходит. После очистки натрия холодной ловушкой показания индикатора снижаются до первоначального уровня.

На рис. 3 приведено сравнение расчета показаний водородного индикатора с данными по тарировке. Поскольку в работе [3] приведены различные данные по коэффициенту водородопроницаемости никеля, расчет был проведен по максимальным (кривая 1) и минимальным (кривая 3) значениям этого коэффициента. Концентрация гидрида натрия рассчитывалась по всему водороду, вносимому в натрий с водой [4]. Результаты расчетов приведены в таблице.

Из полученных данных следует, что порог чувствительности индикатора водорода составляет $7 \cdot 10^{-5}$ вес. % водорода в натрии при чувствительности вторичного прибора $2,3 \cdot 10^{-2}$ об. % водорода в аргоне. Диффузион-

Результаты расчетов характеристик натрия при подаче различных количеств воды

Характеристика	Подача воды G_{H_2O} , г			
	2	4	6	8
$C_{NaH} \cdot 10^3$, вес. %	3,61	7,1	10,7	14,2
$P_1 \cdot 10^4$, ама	0,79	3,1	7,2	12,7
μ'	2,16	1,08	0,72	0,54
y'	0,74	0,51	0,4	0,33
$C_{H_2} \cdot 10^2$, об. %	0,49	1,32	2,40	3,44
μ''	6,26	3,14	2,08	1,56
y''	0,97	0,845	0,725	0,625
$C_{H_2} \cdot 10^2$, об. %	0,63	2,19	4,35	6,6
$C_{H_2}^{эксп} \cdot 10^2$	0,74	1,6	2,6	3,6

Примечание. Для величин с одним штрихом $u = 5 \cdot 10^{-3}$, с двумя штрихами $u = 1,45 \cdot 10^{-2}$.

ный датчик индикатора проработал на циркуляционном контуре с натрием 4000 ч без нарушения герметичности.

Поступило в Редакцию 3/II 1969 г.
В окончательной редакции 18/XII 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Субботин и др. «Атомная энергия», 20, 482 (1966).
2. D. Mc Clure, G. Halsey. J. Phys. Chem., 69, 3542 (1965).
3. С. Дешман. Научные основы вакуумной техники. М., «Мир», 1964.
4. Н. Н. Ивановский, Ф. А. Козлов. «Атомная энергия», 17, 406 (1964).

Об измерениях реактивности импульсными методами

Э. А. СТУМБУР

УДК 621.039.516

Реактивность, точнее основа этого понятия $k_{эфф}$, является одной из важнейших характеристик реакторов. Введенная первоначально на основе наглядных, но скорее качественных представлений [1], величина $k_{эфф}$ оказалась весьма удобной для численных расчетов реакторов [2]. В работе [3] дано теоретическое обоснование $k_{эфф}$ в виде собственного значения условнокритического уравнения:

$$\frac{1}{k_{эфф}} \hat{Q}\psi - \hat{L}\psi = 0, \quad (1)$$

где $\hat{Q}$ — оператор процесса деления; $\chi \equiv (1 - \beta) \chi_p +$

* Предполагается, что реактор может иметь произвольную структуру, т. е. операторы $\hat{Q}$ и $\hat{L}$ имеют вид

$$\hat{Q}\psi \equiv \int v \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \psi(\mathbf{r}', \mathbf{v}') d\mathbf{v}';$$

$$\hat{L}\psi \equiv \Omega \nabla \psi - \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d\mathbf{v}' + \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \psi.$$

$+ \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_i$ — спектр нейтронов деления; $\hat{L}$ — оператор рассеяния, утечки и поглощения*.

В настоящей работе рассматривается наибольшее собственное значение $k_{эфф}$, для которого решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ всюду неотрицательно.

Практическое осуществление $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ может быть достигнуто лишь для критического реактора, т. е. при $k_{эфф} = 1$. Во всех прочих случаях экспериментатор, имея дело с некритическим реактором, регистрирует поток нейтронов иного пространственно-энергетического распределения, чем $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. В основном это распределения, описываемые одним из двух уравнений:

$$\chi \hat{Q}\psi - \hat{L}\psi + S = 0; \quad (2)$$

$$\hat{\chi}_t \hat{Q}\psi - \hat{L}\psi + P_t = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3)$$

Уравнение (2), определяющее поток $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в подкритической системе с постоянным источником нейтронов $S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, используется в методе «обратного умножения» [4], применяемом для измерения реактивности. Уравнение (3) определяет нестационарный поток $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, обусловленный зависящим от времени возмущением $\mathcal{P}_t$, которое может состоять в изменении структуры реактора (методы «установившегося периода», «сброса стержня») или в изменении действия постороннего источника (метод «выброса источника», «нейтронных волн», импульсного облучения) [4, 5].

Для нестационарного уравнения характерен переход от спектра деления χ к оператору $\hat{\chi}_t$ [3], учитывающему временное поведение запаздывающих нейтронов.

Применив преобразование Лапласа (с параметром s) к функциям времени в уравнении (3), получим уравнение для трансформант $\bar{\Phi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s)$:

$$\chi(s) \hat{Q} \bar{\Phi} - \hat{L} \bar{\Phi} - \frac{s}{v} \bar{\Phi} = -\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s). \quad (4)$$

Здесь

$$\chi(s) \equiv (1 - \beta) \chi_p(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \beta_i \chi_i(\mathbf{v})}{\lambda_i + s}, \quad (5)$$

где λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — постоянные распада источников запаздывающих нейтронов.

Спектр собственных значений s однородной формы уравнения (4) в общем случае состоит из конечного числа точек $\text{Re } s > -[\nu \Sigma_t]_{\min}$, определяющих временное поведение потока мгновенных нейтронов [6], а также из m счетных множеств точечного спектра с точками сгущения при $s = -\lambda_i$ [7]. Последние, естественно, связаны с m группами запаздывающих нейтронов. Область сплошного спектра собственных значений $\text{Re } s < -[\nu \Sigma_t]_{\min}$ здесь не рассматривается.

Практически наиболее важными являются два вещественных значения s : $s = -\alpha_0$ (декремент асимптотического затухания потока мгновенных нейтронов, измеряемый в импульсных экспериментах [5]) и $s = -\alpha_T$ (обратная величина установившегося периода T реактора [4]).

Эти собственные значения определяют асимптотические распределения нейтронов Φ_0 и Φ_T , подчиняющиеся уравнению

$$(1 - \beta) \chi_p \hat{Q} \Phi_0 - \hat{L} \Phi_0 + \frac{\alpha_0}{v} \Phi_0 = 0 \quad (6)$$

[уравнение (6) является достаточно корректной аппроксимацией (4) в условиях обычной реализации импульсного метода: $\alpha_0 \gg \lambda_i$] и уравнению

$$\left[(1 - \beta) \chi_p + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \beta_i \chi_i}{\lambda_i + \alpha_T} \right] \hat{Q} \Phi_T - \hat{L} \Phi_T - \frac{\alpha_T}{v} \Phi_T = 0, \quad (7)$$

соответствующему установившемуся периоду реактора.

Распределения нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ из выражения (2), а также $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\Phi_T(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ из (6) и (7) являются, вообще говоря, функциями, не совпадающими с $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, т. е. с решением уравнения (1). Это является основным принципиальным препятствием для точного определения значения $k_{\text{эфф}}$ по экспериментальным данным, получаемым практически из потоков Φ , Φ_0 или Φ_T .

Для определения реакторных функционалов [8] используется общий прием — сопряженные уравнения, в данном случае

$$\frac{1}{k_{\text{эфф}}} \hat{Q}^+ \chi^+ - \hat{L}^+ \psi^+ = 0. \quad (8)$$

Это приводит к соотношениям, связывающим реактивность $\rho \equiv (1 - k_{\text{эфф}})/k_{\text{эфф}}$ с различными функционалами и параметрами, измерение которых составляет задачу эксперимента.

Согласно уравнениям (2), (6) и (7) получаем

$$\rho = 1/M; \quad \rho = \alpha_0 \Lambda_0 - \beta_0; \quad -\rho = \alpha_T \Lambda_T + \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\beta}_i}{1 + \lambda_i/\alpha_T} \quad (9)$$

где

$$M \equiv \frac{(\psi^+, \chi \hat{Q} \Phi)}{(\psi^+, S)}; \quad \Lambda \equiv \frac{(\psi^+, \frac{1}{v} \Phi)}{(\psi^+, \chi \hat{Q} \Phi)}; \\ \bar{\beta}_i \equiv \beta_i \frac{(\psi^+, \chi_i \hat{Q} \Phi)}{(\psi^+, \chi \hat{Q} \Phi)}; \quad \beta_0 \equiv \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_i, \quad (10)$$

которые представляют собой «умножение», время генерации и эффективную долю запаздывающих нейтронов. Скобочные обозначения скалярных произведений

$$(f, g) \equiv \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} f g.$$

Метод «обратного умножения» требует знания полной формы $\psi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, его трудности и возможности рассмотрены в работе [9], а метод установившегося периода ограничен узким диапазоном реактивности: $1 < k_{\text{эфф}} < 1 + \beta$.

Импульсный метод позволяет измерять значительные подкритичности, однако для его простейшей формы (« α -метода», основанного на сравнении декрементов затухания в критическом и подкритическом реакторах) требуется, чтобы Λ_0 не зависела от $k_{\text{эфф}}$ (величина β_0 достаточно консервативна [10]). Время генерации Λ_0 сохраняет постоянство в голых реакторах (до $k_{\text{эфф}} \gtrsim 0,6$) [11], но в реакторах с отражателями заметно меняется, сильно ограничивая область применимости α -метода [12].

В последние годы получили распространение также различные интегральные импульсные методы измерения реактивности, основанные на использовании полной формы временного поведения потока нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, возбужденного импульсом внешнего источника [5, 13].

Несмотря на первоначально различные пути обоснования интегральных методов, можно показать, что все они являются частными аппроксимациями более общего и точного соотношения (15).

Обычная постановка импульсных экспериментов состоит в облучении системы большой серией очень коротких ($\ll 1/\alpha_0$) одинаковых импульсов быстрых нейтронов: $\mathcal{P} \approx \mathcal{P}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \delta(t - n/R)$, причем частота R их повторения выбирается из условия $\alpha_0 \gg R \gg \lambda_i$.

При этом концентрация источников запаздывающих нейтронов остается практически постоянной во времени, так что полный поток нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ можно представить в форме

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx \Phi_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \Phi_d(\mathbf{r}, \mathbf{v}).$$

Трансформанта Лапласа мгновенной компоненты потока $\bar{\varphi}_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s)$ удовлетворяет уравнению

$$(1 - \beta) \chi_p \hat{Q} \bar{\varphi}_p - \hat{L} \bar{\varphi}_p - \frac{s}{v} \bar{\varphi}_p = -\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s), \quad (11)$$

а интеграл потока мгновенных нейтронов $F_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \int_0^{1/R} \varphi_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dt = \bar{\varphi}_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s=0)$ — уравнению

$$(1 - \beta) \chi_p \hat{Q} F_p - \hat{L} F_p = -\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s=0). \quad (12)$$

Для интегрального потока всех нейтронов $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ из выражений (4) и (5) получим

$$\chi \hat{Q} F - \hat{L} F = -\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s=0). \quad (13)$$

Уравнение для интегрального потока запаздывающих нейтронов $F_d(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv F - F_p$, поэтому

$$\chi \hat{Q} F_d - \hat{L} F_d = -\sum_{i=1}^m \beta_i \chi_i \hat{Q} F_p. \quad (14)$$

Используя уравнение (8), из выражения (14) получим общее соотношение

$$(\rho/\beta) \equiv \frac{1 - k_{\text{эфф}}}{k_{\text{эфф}} \beta} = \frac{(\psi^+, \chi \hat{Q} F_p)}{(\psi^+, \chi \hat{Q} F_d)} = \frac{\int d\mathbf{r} \Psi_f^+(\mathbf{r}) N_p(\mathbf{r})}{\int d\mathbf{r} \Psi_f^+(\mathbf{r}) N_d(\mathbf{r})}, \quad (15)$$

где N_p и N_d — плотности делений, вызванных соответствующими интегральными потоками; $\Psi_f^+(\mathbf{r}) \equiv \int \psi^+ \chi dv$ — ценность нейтронов деления в точке $\mathbf{r}$; $\bar{\beta}$ — эффективная доля запаздывающих нейтронов (определенная на F_p).

Покажем, что из (15) следуют все остальные [5, 13] интегральные методы в условиях различных аппроксимаций.

1. Если предположить, что $N_p(\mathbf{r})$ и $N_d(\mathbf{r})$ отличаются лишь множителем, т. е. F_p и F_d имеют одинаковое пространственно-энергетическое поведение, то из выражения (15) получим определение реактивности по Свёстранду [5]:

$$(\rho/\beta)_{\text{СИ}} = \frac{|F_p|}{|F_d|}. \quad (16)$$

2. Подбором постоянной ζ ($\approx \beta/\Lambda$), удовлетворяющей соотношению

$$(\psi^+, \chi \hat{Q} F) = \left(\psi^+, \chi \hat{Q} \int_0^{1/R} e^{\zeta t} \varphi_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dt \right), \quad (17)$$

можно привести (15) к выражению для реактивности в форме

$$\begin{aligned} (\rho/\beta) &= \frac{\alpha_0 - \zeta}{\zeta} \left[\frac{1 + \sum_{j=1}^N G_j}{1 + \sum_{j=1}^N G_j \left(\frac{\alpha_0 - \zeta}{\alpha_j - \zeta} \right)} \right] \approx \\ &\approx \frac{\alpha_0 - \zeta}{\zeta} \equiv (\rho/\beta)_{GR}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аппроксимацию Гарелиса—Рассела [5] можно получить, если пренебречь вкладами G_j высших гармоник $\varphi_j(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ потока нейтронов. Приняв $\varphi_p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{j=0}^N A_j \varphi_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}) e^{-\alpha_j t}$, получим выражения для G_j :

$$G_j = \frac{A_j \alpha_0 Z_j}{A_0 \alpha_j Z_0}, \quad (19)$$

где

$$A_j \equiv \frac{(\psi^+, \varphi_j)}{(\psi^+, \frac{1}{v} \varphi_j)}; \quad Z_j \equiv (\psi^+, \chi \hat{Q} \varphi_j).$$

3. Если поток запаздывающих нейтронов $\varphi_d(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ аппроксимировать фундаментальной гармоникой мгновенных нейтронов $\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, то из выражения (15) следует

$$(\rho/\beta) = \frac{A_0}{\alpha_0 |F_d|} \left(1 + \sum_{j=1}^N G_j \right) \approx \frac{A_0}{\alpha_0 |F_d|} \equiv (\rho/\beta)_{G_0}. \quad (20)$$

Формула Гозани [5] получается при отбрасывании всех высших гармоник потока мгновенных нейтронов.

4. Методика Вальтера—Раби [13] по существу эквивалентна (20) при учете еще одной гармоники потока мгновенных нейтронов (и при $Z_1 \approx Z_0$):

$$(\rho/\beta)_{WR} = \frac{A_0}{\alpha_0 |F_d|} + \frac{A_1}{\alpha_1 |F_d|}, \quad (21)$$

Следует отметить, что все перечисленные выше интегральные импульсные методы вообще корректны при измерениях только в активной зоне, а используемые в них допущения не могут быть обоснованы [10, 14] в общем случае.

Наиболее последовательным и точным способом определения реактивности, согласно (15), является измерение в импульсном эксперименте интегральных плотностей делений $N_p(\mathbf{r})$ и $N_d(\mathbf{r})$ по всей активной зоне (с использованием детектора деления). Кроме этого, необходимо измерить относительное распределение ценности нейтронов деления $\psi_f^+(\mathbf{r})$ по активной зоне. Это может быть сделано, например, по измерениям умножений в подкритической системе при различных положениях постоянного источника, имитирующего спектр нейтронов деления [15].

Применение такого комбинированного интегрального метода довольно трудоемко, зато результат не зависит от ограничений моделей кинетики, расположения импульсного источника или способов пренебрежения вкладами высших гармоник.

Поступило в Редакцию 12/XI 1969 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Вейнберг, Е. Вигнер. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
3. Л. Н. Усачев. В сб. «Реакторостроение и теория реакторов». М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 251.

4. Д. Ж. Киппин. Физические основы кинетики ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1967.
5. Pulsed Neutron Research. V. II Vienna, IAEA, 1965, p. 3.
6. С. Б. Шихов, А. А. Шкурпелов. Препринт НИИАР П-22, 1968.
7. J. Mika. Nukleonik, 9, 46 (1967).
8. Г. И. Марчук, В. В. Орлов. В сб. «Нейтронная физика». М., Атомиздат, 1961, стр. 30.
9. Физика промежуточных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
10. C. Masters, K. Cady. Nucl. Sci. and Engng, 29, 272 (1967).
11. D. Bach et al. Nucl. Sci. and Engng, 11, 199 (1961).
12. Э. А. Стумбур и др. «Атомная энергия», 27, 215 (1969).
13. A. Waltar, L. Ruby. Nukleonik, 8, 287 (1967); 10, 70 (1967).
14. C. Preskitt et al. Nucl. Sci. and Engng, 29, 283 (1967).
15. R. Tuttle. Nucl. Sci. and Engng, 21, 451 (1965).

Определение запаса реактивности методом двойной перекompенсации

Т. С. ДИДЕЙКИН, В. П. ШИШИН

УДК 621.039.51

Измерение больших надкритичностей ядерного реактора связано со значительными трудностями. Характерными в этом отношении являются опыты по определению запаса реактивности реактора путем измерения дифференциальной реактивности [1, 2].

В настоящей работе предлагается способ определения запаса реактивности на основе измерения реактивности в подкритическом реакторе.

Известно, что реактивность размножающей системы ρ является функцией всех физических параметров, влияющих на размножающие свойства реактора [2, 3], т. е. $\rho = \rho(x, y, \dots, z)$.

Пусть надкритическая система с набором параметров $x_0, y_0, \dots, z_0$ характеризуется реактивностью

$$\rho(x_0, y_0, \dots, z_0) > 0. \quad (1)$$

Положительную реактивность можно скомпенсировать изменением одного из параметров, например x_0 , до значения x_1 , оставив остальные параметры неизменными. Реактивность такой критической системы

$$\rho(x_1, y_0, \dots, z_0) = 0. \quad (2)$$

Аналогичным образом первоначальную надкритическую систему можно привести в критическое состояние изменением другого параметра — y .

Тогда

$$\rho(x_0, y_1, \dots, z_0) = 0. \quad (3)$$

Если в реакторе одновременно изменить параметры x_0 на x_1 и y_0 на y_1 , оставив остальные без изменения, то такой реактор станет подкритическим:

$$\rho(x_1, y_1, \dots, z_0) < 0. \quad (4)$$

Между реактивностями (1) и (4) существует строгая связь. Установим эту связь, воспользовавшись разложением $\rho(x, y, \dots, z)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, \dots, z) = & \rho(x_0, y_0, \dots, z_0) + (x-x_0) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \\ & + (y-y_0) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \\ & + 2 \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{2!} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + \dots + R_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Возможность такого разложения устанавливается на основании анализа остаточного члена R_n , который

должен стремиться к нулю при возрастании числа членов в разложении (5) [4]. Рассмотрим выражение (5) при $x=x_1, y=y_1$. В левой части этого выражения стоит реактивность дважды перекompенсированного реактора, в правой части — первый член представляет собой реактивность надкритического реактора, а остальные слагаемые — соответствующие поправочные члены, которые можно найти в рамках любой математической модели реактора, зная зависимость реактивности от параметров $x, y, \dots, z$.

Таким образом, выражение (5) позволяет находить надкритичность системы (запас реактивности) на основе подкритических измерений реактивности. Отрицательная реактивность может быть измерена любым доступным в конкретных условиях способом: импульсным методом, методом анализа шумов и т. п. При этом необходимо оценить поправочные члены. Покажем, что для «голого» реактора в одногрупповом диффузионном приближении запас реактивности по абсолютной величине точно равен величине $1 - K_{эфф}$ подкритического реактора при перекompенсации реактора путем введения дополнительного поглотителя нейтронов и изменения геометрического параметра, а при перекompенсации путем одновременного изменения двух геометрических параметров реактора, например радиуса и высоты активной зоны, равен реактивности подкритического реактора.

Запишем реактивность «голого» цилиндрического реактора в виде

$$\rho = 1 - \frac{\Sigma_c (1 + \kappa_R^2 M^2 + \kappa_H^2 M^2)}{v \Sigma_f}, \quad (6)$$

где Σ_c, Σ_f — макроскопические сечения поглощения и деления; v — выход нейтронов на одно деление; κ_R^2, κ_H^2 — радиальный и высотный геометрические параметры; M^2 — квадрат длины миграции нейтронов.

При перекompенсации путем введения дополнительного поглотителя и изменения геометрических размеров реактора реактивность записывается так:

$$\rho(x, y, \dots, z) = 1 - \frac{x(1+y)}{v \Sigma_f}, \quad (7)$$

где $x = \Sigma_c; y = \kappa_R^2 M^2 + \kappa_H^2 M^2$.

При перекompенсации путем изменения радиуса и высоты реактивность

$$\rho(x, y, \dots, z) = 1 - \frac{\Sigma_c (1 + x + y)}{v \Sigma_f}, \quad (8)$$