Математические заметки

Том 94 выпуск 3 сентябрь 2013

УДК 512.542

Критерии p-разрешимости и p-сверхразрешимости конечных групп

Юфэнг Лиу, Вэньбинь Го, В. А. Ковалева, А. Н. Скиба

Пусть A, K и H – подгруппы группы G и $K \leqslant H$. Тогда мы говорим, что A покрывает пару (K,H), если $AH = AK$; A изолирует пару (K,H), если $A \cap H = A \cap K$. Пара (K,H) из G называется максимальной, если K является максимальной подгруппой в H. В данной работе мы изучаем конечные группы, в которых некоторые подгруппы покрывают или изолируют выделенные системы максимальных пар этих групп. В частности, получено обобщение ряда известных результатов о (частичных) CAP-подгруппах.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm8836

1. Введение. Все рассматриваемые группы являются конечными. Символом $\mathcal{U}$ будем обозначать класс всех сверхразрешимых групп. Напомним, что *$\mathcal{U}$-корадикалом* группы G называется пересечение всех таких нормальных подгрупп N из G, что $G/N \in \mathcal{U}$; $\mathcal{U}$-корадикал группы G обозначают символом $G^{\mathcal{U}}$. Используется терминология, принятая в [1], [2].

Пусть A, K и H – подгруппы группы G и $K \leqslant H$. Тогда мы говорим, что A *покрывает* пару (K,H), если $AH = AK$; A *изолирует* пару (K,H), если $A \cap H = A \cap K$. Заметим, что $AH = AK$ эквивалентно $H \leqslant K(A \cap H)$, и $A \cap H = A \cap K$ эквивалентно $A \cap H \leqslant K$. Подгруппа A группы G называется *квазинормальной* [3] или *перестановочной* [2], [4] в G, если $AE = EA$ для всех подгрупп E из G. Квазинормальные подгруппы имеют много интересных свойств. В частности, если A – квазинормальная подгруппа в G, то для всякой максимальной пары (K,H) из G, т.е. пары (K,H), где K – максимальная подгруппа в H, A либо покрывает, либо изолирует (K,H).

Следующий пример показывает, что даже если некоторая подгруппа группы G покрывает или изолирует каждую максимальную пару (K,H) из G, то она может не быть квазинормальной.

Пример. Пусть p и q – простые числа, где q делит $p-1$. Пусть $A = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка p^2 и B – группа порядка q. Пусть $G = A \wr B = [K]B$, где $K = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_q$ – база регулярного сплетения G. Пусть $L = \langle a^p \rangle^{\natural}$. Тогда $G/L \simeq \langle a^p \rangle \wr B$ и $L \leqslant \Phi(G)$. Следовательно, группа G сверхразрешима. Пусть R – подгруппа порядка p группы A_1. Предположим, что R квазинормальна в G.

Так как R является силовской p-подгруппой в RB, то $B \leqslant N_G(R)$, и поэтому R нормальна в G; противоречие. Следовательно, R не является квазинормальной в G. С другой стороны, так как группа G сверхразрешима и R субнормальна в G, то R покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G (см. ниже, следствие 4.3).

Необходимо отметить, что теория покрытия и изолирования максимальных пар имеет прямую связь с теорией CAP-подгрупп. Напомним, что подгруппа A группы G называется *CAP-подгруппой* в G [2; A, определение 10.8], если A либо покрывает, либо изолирует каждую пару (K, H), где H/K – главный фактор из G. Подгруппа A называется *частичной CAP-подгруппой* группы G [5], [6], если A либо покрывает, либо изолирует каждую пару (K, H), где H/K – фактор некоторого фиксированного главного ряда из G. Очевидно, что всякая CAP-подгруппа группы G либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что $L \leqslant K < H \leqslant T$, где T/L – главный фактор из G. С другой стороны, всякая частичная CAP-подгруппа группы G либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару (K, H) из G такую, что $G_{i-1} \leqslant K < H \leqslant G_i$ для некоторого i, где $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ – некоторый фиксированный главный ряд из G.

В данной работе мы изучаем группы, в которых некоторые подгруппы покрывают или изолируют выделенные системы максимальных пар этих групп. В частности, получено обобщение ряда известных результатов о (частичных) CAP-подгруппах.

2. Предварительные результаты. Следующие результаты будут использованы в данной работе.

Лемма 2.1. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G и (K, H) – максимальная пара из G. Если N изолирует (K, H), то (KN, HN) – максимальная пара в G и $|HN : KN| = |H : K|$.*

Доказательство. Пусть R – такая подгруппа группы G, что $KN \leqslant R \leqslant HN$. Тогда $R = N(R \cap H)$ и $K \leqslant R \cap H \leqslant H$. Следовательно, либо $R \cap H = K$, либо $R \cap H = H$. Если $R \cap H = K$, то

$$R = R \cap HN = N(R \cap H) = KN.$$

Если $R \cap H = H$, то

$$R = R \cap HN = N(R \cap H) = HN.$$

Поэтому (KN, HN) – максимальная пара в G. Так как N изолирует (K, H), то $H \cap N = K \cap N$, и поэтому $|HN : KN| = |H : K|$.

Лемма 2.2. *Пусть M – подгруппа группы G и (K, H) – максимальная пара из G. Если $H \leqslant V \leqslant G$ и M либо покрывает, либо изолирует (K, H), то $M \cap V$ либо покрывает, либо изолирует (K, H).*

Доказательство. Так как $H \leqslant V$, то $M \cap H \cap V = M \cap H$. Если M покрывает пару (K, H), то

$$H = K(M \cap H) = K(M \cap V \cap H),$$

т.е. $M \cap V$ покрывает (K, H). Если M изолирует (K, H), то

$$M \cap H \leqslant K, \qquad (M \cap V) \cap H \leqslant K,$$

т.е. $M \cap V$ изолирует (K, H).

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.3. *Пусть A и B – такие собственные подгруппы группы G, что $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всякого $x \in G$.*

Лемма 2.4. *Пусть G – группа и p – простой делитель порядка G. Пусть подгруппа E из G либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что H не p-разрешима. Тогда в G найдется такая цепь подгрупп $E = E_0 \leqslant E_1 \leqslant \cdots \leqslant E_{n-1} \leqslant E_n = G$, что либо E_{i-1} нормальна в E_i, либо $E_i/(E_{i-1})_{E_i}$ p-разрешима, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть M – такая максимальная подгруппа группы G, что $E \leqslant M$. Предположим, что G не является p-разрешимой. Так как M^x максимальна в G для всякого $x \in G$, то E либо покрывает, либо изолирует пару (M^x, G). Если E покрывает (M^x, G) для некоторого x, то $EM^x = G$, поэтому $MM^x = G$, что противоречит лемме 2.3. Следовательно, E изолирует (M^x, G) для всякого $x \in G$, поэтому $E \leqslant M_G$. По индукции получаем, что найдется такая цепь подгрупп

$$E = E_0 \leqslant E_1 \leqslant \cdots \leqslant E_{t-1} \leqslant E_t = M_G,$$

что либо E_{i-1} нормальна в E_i, либо $E_i/(E_{i-1})_{E_i}$ p-разрешима, $i = 1, \ldots, t$. А поскольку M_G нормальна в G, получаем утверждение леммы.

Подгруппа H группы G называется *примитивной* [7] или $\cap$-*неразложимой* [8] в G, если H отлична от пересечения всех тех подгрупп группы G, в которых она содержится собственно.

Лемма 2.5 [8; с. 133]. *Если K – подгруппа группы G и E – $\cap$-неразложимая подгруппа группы K, то в G найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа X, что $E = K \cap X$.*

Лемма 2.6. *Пусть $G = MN$, где N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $E \leqslant N \cap M$ и E субнормальна в G, то $E \leqslant M_G$.*

Доказательство. Так как E субнормальна в G, то по [2; A, теорема 14.5] $N \leqslant N_G(E)$, и поэтому $E^G = E^{NM} = E^M \leqslant M$. Значит, $E \leqslant M_G$.

Лемма 2.7 [9; лемма 2.8]. *Пусть G – p-сверхразрешимая группа. Если выполнено $O_{p'}(G) = 1$, то G сверхразрешима.*

Лемма 2.8 [10; лемма 2.8]. *Пусть $G = [N]M$, где N – минимальная нормальная подгруппа группы G и M – разрешимая максимальная подгруппа из G. Тогда N является абелевой группой.*

Лемма 2.9 [11; лемма 1]. *Если N – нормальная подгруппа группы G и V – CAP-подгруппа из G, то NV – CAP-подгруппа в G.*

Лемма 2.10. *Пусть E – разрешимая нормальная подгруппа группы G. Предположим, что каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы E является CAP-подгруппой в G. Если M – некоторая максимальная подгруппа из G такая, что $EM = G$, и V – максимальная подгруппа некоторой силовской подгруппы из E, то найдется такой элемент $x \in G$, что V покрывает или изолирует пару (M^x, G).*

Доказательство. Пусть $|G:M| = q^a$ и V – максимальная подгруппа силовской p-подгруппы P группы G. Предположим, что $V \nleqslant M^x$ для всякого $x \in G$. Тогда $q = p$. Покажем, что $VM = G$. Ввиду леммы 2.9, не нарушая общности доказательства, мы можем предполагать, что $M_G = 1$, поэтому $G = [N]M$ для некоторой минимальной нормальной подгруппы N из G, содержащейся в E. Предположим, что $N \nleqslant V$. Тогда $V \cap N = 1$, откуда ввиду максимальности подгруппы V в P получаем, что $V = 1$. Значит, $N \leqslant V$, и поэтому $G = VM$.

3. Критерии p-разрешимости и разрешимости групп. В этом разделе, основываясь на теории покрытия и изолирования максимальных пар, мы даем новые критерии p-разрешимости и разрешимости групп.

Пусть p – простое число. Мы говорим, что подгруппа A группы G является *слабой CAP_p-подгруппой* в G, если в G существует такой композиционный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G,$$

что A либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что $G_{i-1} \leqslant K < H \leqslant G_i$ для некоторого i, где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H не является p-разрешимой группой.

Напомним, что *нильпотентным корадикалом* группы G называется пересечение всех таких нормальных подгрупп N из G, что G/N нильпотентна.

Теорема 3.1. *Пусть G – группа, p – простое число. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *G p-разрешима*;

(2) *каждая подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой в G*;

(3) *каждая максимальная подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой в G*;

(4) *каждая 2-максимальная подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой в G*;

(5) *каждая силовская p-подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой в G*;

(6) *либо G является примарной группой, т.е. группой, порядок которой является степенью некоторого простого числа, либо в G существуют две p-разрешимые максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что $(|G:M_1|, |G:M_2|) = r^a q^b$ для некоторых простых чисел r, q и некоторых $a, b \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и M_1 и M_2 являются слабыми CAP_p-подгруппами в G*;

(7) *каждая несверхразрешимая подгруппа Шмидта из G является слабой CAP_p-подгруппой в G.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Так как группа G p-разрешима, каждая подгруппа из G также является p-разрешимой, поэтому каждая подгруппа из G является слабой CAP_p-подгруппой по определению.

Импликации (2) $\Rightarrow$ (3)–(5) и (2) $\Rightarrow$ (7) очевидны.

(3),(4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что каждая 2-максимальная (каждая максимальная) подгруппа M из G является слабой CAP_p-подгруппой в G. Покажем, что группа G p-разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Прежде покажем, что G/N p-разрешима, где N – произвольная минимальная нормальная подгруппа из G. Если N – максимальная или 2-максимальная подгруппа в G, то это очевидно. Пусть N не является максимальной (в случае (3)) или 2-максимальной (в случае (4)) подгруппой в G. Проверим, что условие теоремы справедливо для G/N. Пусть M/N – максимальная (2-максимальная) подгруппа из G/N. Тогда M является максимальной (2-максимальной) подгруппой в G. Поэтому по условию теоремы M является слабой CAP_p-подгруппой в G, и, значит, найдется такой композиционный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ в G, что M либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (Q, R) из G, что $G_{i-1} \leqslant Q < R \leqslant G_i$ для некоторого i, где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и R не p-разрешима.

Рассмотрим ряд

$$1 = G_0N/N < G_1N/N < \cdots < G_nN/N = G/N.$$

Ввиду изоморфизмов

$$G_iN/G_{i-1}N \simeq G_iNG_{i-1}/G_{i-1}N \simeq G_i/G_i \cap G_{i-1}N = G_i/G_{i-1}(G_i \cap N),$$

не нарушая общности доказательства, мы можем предполагать, что этот ряд является композиционным в G/N, причем $|G_i : G_{i-1}| = |G_iN/N : G_{i-1}N/N|$. Пусть $(K/N, H/N)$ – максимальная пара из G/N и

$$G_{i-1}N/N \leqslant K/N < H/N \leqslant G_iN/N$$

для некоторого i, где p делит $|G_iN/N : G_{i-1}N/N|$ и H/N не является p-разрешимой группой. Покажем, что M/N покрывает или изолирует пару $(K/N, H/N)$.

Заметим, что $G_{i-1}N \leqslant K < H \leqslant G_iN$ и (K, H) – максимальная пара в G. Так как $K = N(K \cap G_i)$ и $H = N(H \cap G_i)$, то

$$\begin{aligned}|H : K| &= (|H \cap G_i||N|/|G_i \cap H \cap N|) : (|K \cap G_i||N|/|G_i \cap K \cap N|)\\ &= (|H \cap G_i||N|/|G_i \cap N|) : (|K \cap G_i||N|/|G_i \cap N|) = |H \cap G_i : K \cap G_i|.\end{aligned}$$

Следовательно, $K \cap G_i \neq H \cap G_i$. Покажем, что $(K \cap G_i, H \cap G_i)$ – максимальная пара в G. Так как $K \neq H$, то $N(K \cap G_i) \neq N(H \cap G_i)$, т.е. N не покрывает пару $(K \cap G_i, H \cap G_i)$. Поэтому в G существует такая максимальная пара (L, T), что

$$K \cap G_i \leqslant L < T \leqslant H \cap G_i$$

и N не покрывает (L, T). Действительно, если N покрывает каждую такую максимальную пару (U, W), что

$$K \cap G_i \leqslant U < W \leqslant H \cap G_i,$$

то, очевидно, N покрывает пару $(K \cap G_i, H \cap G_i)$; противоречие. Так как N нормальна в G, то N либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару из G. Поэтому N изолирует пару (L, T). Тогда по лемме 2.1 (LN, TN) – максимальная пара в G и $|TN : LN| = |T : L|$. Но

$$K = N(K \cap G_i) \leqslant NL < NT \leqslant N(H \cap G_i) = H.$$

Следовательно, $K \cap G_i = L$ и $H \cap G_i = T$. Поэтому $(K \cap G_i, H \cap G_i)$ – максимальная пара в G. При этом легко заметить, что $G_{i-1} \leqslant K \cap G_i < H \cap G_i \leqslant G_i$. Так как H/N

не является p-разрешимой группой, то $H \cap G_i$ также не является p-разрешимой, так как

$$H/N = (H \cap G_i)N/N \simeq H \cap G_i/H \cap G_i \cap N.$$

Поэтому по условию теоремы M либо покрывает, либо изолирует $(K \cap G_i, H \cap G_i)$. Если M покрывает $(K \cap G_i, H \cap G_i)$, то

$$MH = MN(G_i \cap H) = MN(G_i \cap K) = MK,$$

т.е. M покрывает (K, H). Тогда

$$(M/N)(H/N) = MH/N = MK/N = (M/N)(K/N),$$

т.е. M/N покрывает $(K/N, H/N)$. Если M изолирует $(K \cap G_i, H \cap G_i)$, то

$$\begin{aligned} M \cap H = M \cap N(G_i \cap H) = N(M \cap G_i \cap H) = N(M \cap K \cap G_i) \\ = M \cap N(K \cap G_i) = M \cap K, \end{aligned}$$

т.е. M изолирует (K, H). Значит,

$$(M/N) \cap (H/N) = (M \cap H)/N = (M \cap K)/N = (M/N) \cap (K/N),$$

т.е. M/N изолирует $(K/N, H/N)$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G/N, поэтому согласно выбору группы G факторгруппа G/N p-разрешима. Так как класс всех p-разрешимых групп является насыщенной формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, N не является абелевой, p делит $|N|$ и $N \nleqslant \Phi(G)$. Таким образом, $C_G(N) = 1$.

Пусть $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$ – прямое произведение изоморфных простых групп. Покажем, что в группе G существует такая максимальная подгруппа V, что p не делит $|G : V|$, $NV = G$ и $N_i \neq V \cap N_i \neq 1$ для всех $i = 1, \ldots, t$.

Пусть $N_p \leqslant P$, где N_p – силовская p-подгруппа группы N и P – силовская p-подгруппа группы G. Тогда $N \cap P = N_p$ нормальна в P, и поэтому $P \leqslant N_G(N_p)$. Следовательно, в G существует такая максимальная подгруппа V, что $N_G(N_p) \leqslant V$. Тогда $G = NN_G(N_p) = NV$, и поэтому $V_G = 1$. Так как $N_G(N_p) \leqslant V$, то $P \leqslant V$. Пусть P_i – силовская p-подгруппа из N_i. Тогда $P_i \leqslant P^x$ для некоторого $x \in G$. Так как $G = NV$, то $x = vn$, где $n \in N$ и $v \in V$. Поэтому $P_i \leqslant (P^v)^n$, где $P^v \leqslant V$. Следовательно, $(P_i)^{n^{-1}} \leqslant V$. Так как N_i нормальна в N, то $(P_i)^{n^{-1}} \leqslant N_i$. Поэтому $V \cap N_i \neq 1$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Если $N_i \leqslant V$ для некоторого i, то по лемме 2.6 $N_i \leqslant V_G = 1$; противоречие. Следовательно, $V \cap N_i \neq N_i$ для всех i.

Пусть $D = V \cap N_1$, и пусть M_1 – такая максимальная подгруппа из V, что $D \leqslant M_1$ (в случае (4)), либо $M_1 = V$ (в случае (3)). По условию теоремы в группе G найдется такой композиционный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G,$$

что M_1 либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что $G_{i-1} \leqslant K < H \leqslant G_i$ для некоторого i, где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H не p-разрешима. Так как G_1 – минимальная субнормальная подгруппа в G, то по [2; A, теорема 14.5] получаем, что $N \leqslant N_G(G_1)$. Следовательно, $G_1 \leqslant N$, так как в противном случае $NG_1 = N \times G_1$, и поэтому, $G_1 \leqslant C_G(N) = 1$, что невозможно. Поэтому, не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $G_1 = N_1$. Тогда M_1 либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из N_1, что H не является p-разрешимой группой. Следовательно, по лемме 2.2 получаем, что $D = M_1 \cap N_1$ либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (U, W) из N_1, что W не p-разрешима. Поэтому по лемме 2.4 найдется такая цепь подгрупп

$$D = M_1 \cap N_1 = D_0 \leqslant D_1 \leqslant \cdots \leqslant D_{t-1} \leqslant D_t = N_1$$

в N_1, что либо D_{i-1} нормальна в D_i, либо $D_i/(D_{i-1})_{D_i}$ p-разрешима, $i = 1, \ldots, t$. Так как $N_1 = G_1$ и $1 \neq D \neq N_1$, то D_{t-1} не является нормальной подгруппой в N_1. Значит, $N_1/(D_{t-1})_{N_1}$ p-разрешима, причем, так как G_1 – простая группа, $(D_{t-1})_{N_1} = 1$. Следовательно, N_1 p-разрешима. Полученное противоречие завершает доказательство импликаций (3) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1).

(5) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть P – силовская p-подгруппа группы G и

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

– такой композиционный ряд из G, что P либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что $G_{i-1} \leqslant K < H \leqslant G_i$ для некоторого i, где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H не p-разрешима. Так как G не p-разрешима, найдется такой индекс i, что G_i/G_{i-1} – простая неабелева группа и p делит $|G_i/G_{i-1}|$. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $i = 1$. Тогда $P \cap G_1 \neq G_1$. По лемме 2.2 $P \cap G_1$ либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (U, W) из G_1, что W не p-разрешима. Тогда по лемме 2.4 найдется такая цепь подгрупп

$$P \cap G_1 = P_0 \leqslant P_1 \leqslant \cdots \leqslant P_{t-1} \leqslant P_t = G_1$$

в G_1, что либо P_{i-1} нормальна в P_i, либо $P_i/(P_{i-1})_{P_i}$ p-разрешима, $i = 1, \ldots, t$. Так как G_1 – простая группа и $P \cap G_1 \neq G_1$, то P_{t-1} не является нормальной в G_1. Значит, $G_1/(P_{t-1})_{G_1}$ p-разрешима. Но так как $(P_{t-1})_{G_1} = 1$, то G_1 также p-разрешима. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (5) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (6) Пусть G не является примарной группой. Тогда в G найдутся две такие максимальные подгруппы M_1 и M_2, что $|G : M_1| = p^a$ для некоторого $a \in \mathbb{N}$ и p не делит $|G : M_2|$. Тогда $(|G : M_1|, |G : M_2|) = 1$. Согласно (2) группа M_i является слабой CAP_p-подгруппой в G. Поэтому (1) $\Rightarrow$ (6).

(6) $\Rightarrow$ (1) Пусть в группе G существуют две p-разрешимые максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что $(|G : M_1|, |G : M_2|) = r^a q^b$ для некоторых простых чисел r, q и некоторых $a, b \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и M_1 и M_2 являются слабыми CAP_p-подгруппами в G. Покажем, что G p-разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что $N \leqslant M_1 \cap M_2$. Тогда M_1/N и M_2/N – p-разрешимые максимальные подгруппы в G/N и

$$(|G/N : M_1/N|, |G/N : M_2/N|) = (|G : M_1|, |G : M_2|) = r^a q^b.$$

Кроме того, M_1/N и M_2/N являются слабыми CAP_p-подгруппами в G/N (см. доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1)). Значит, условие теоремы справедливо для G/N. Поэтому по выбору группы G факторгруппа G/N p-разрешима. С другой стороны, если $N \nleqslant M_1 \cap M_2$, например $N \nleqslant M_1$, то $G/N = M_1N/N \simeq M_1/M_1 \cap N$ является p-разрешимой. Поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $N \nleqslant \Phi(G)$, N не является абелевой и p делит $|N|$.

Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ – множество простых делителей порядка группы N. Так как N не p-разрешима, то $t > 2$ и $G = NM_1 = NM_2$. С другой стороны, поскольку $(|G : M_1|, |G : M_2|) = r^a q^b$ для некоторых простых чисел r и q и $t > 2$, то найдется такое $p_i \in \pi$ и такая силовская p_i-подгруппа P_i из G, что либо $P_i \leqslant M_1$, либо $P_i \leqslant M_2$. Пусть $P_i \leqslant M_1$, и пусть L – такая минимальная субнормальная подгруппа группы G, что M_1 либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H), что $K < H \leqslant L$ и H не p-разрешима. Как и при доказательстве импликации (3) $\Rightarrow$ (1), можно показать, что $1 \neq M_1 \cap L \neq L$, что ввиду леммы 2.4 приводит к противоречию.

(7) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Покажем, что условие теоремы справедливо для подгрупп группы G. Пусть V – произвольная подгруппа из G и M – несверхразрешимая подгруппа Шмидта группы V. Тогда по условию теоремы M является слабой CAP_p-подгруппой в G. Значит, найдется такой композиционный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

в G, что M либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K_1, H_1) из G, что $G_{i-1} \leqslant K_1 < H_1 \leqslant G_i$ для некоторого i, где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H_1 не p-разрешима. Рассмотрим ряд

$$1 = G_0 \cap V \leqslant G_1 \cap V \leqslant \cdots \leqslant G_n \cap V = V.$$

Пусть (K, H) – такая максимальная пара, что

$$G_{i-1} \cap V \leqslant K < H \leqslant G_i \cap V,$$

где p делит $|(G_i \cap V)/(G_{i-1} \cap V)|$ и H не p-разрешима. Тогда $KG_{i-1} \neq HG_{i-1}$ (в противном случае

$$H = H \cap HG_{i-1} = H \cap KG_{i-1} = K(H \cap G_{i-1}) \leqslant K(V \cap G_{i-1}) \leqslant K,$$

что противоречит выбору пары (K, H)). Значит, G_{i-1} не покрывает пару (K, H). Но так как G_{i-1} – нормальная подгруппа в G_i, то G_{i-1} изолирует (K, H). Следовательно, по лемме 2.1 $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$ – максимальная пара в G_i. Кроме того, $G_{i-1} \leqslant G_{i-1}K < G_{i-1}H \leqslant G_i$. Так как

$$G_i \cap V/G_{i-1} \cap V \simeq (G_i \cap V)G_{i-1}/G_{i-1},$$

то p делит $|G_i/G_{i-1}|$, и поскольку H не p-разрешима, то $G_{i-1}H$ также не является p-разрешимой. Следовательно, по условию теоремы M либо покрывает, либо изолирует $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$. Если M изолирует $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$, то $M \cap G_{i-1}K =$

$M \cap G_{i-1}H$, и поэтому

$$M \cap K = M \cap K(V \cap G_{i-1}) = M \cap V \cap G_{i-1}K \\ = M \cap V \cap G_{i-1}H = M \cap H(V \cap G_{i-1}) = M \cap H,$$

т.е. M изолирует (K, H). Если M покрывает $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$, то имеем $MG_{i-1}K = MG_{i-1}H$, и поэтому

$$MH = M(V \cap G_{i-1}H) = V \cap MG_{i-1}H = V \cap MG_{i-1}K = M(G_{i-1}K \cap V) = MK,$$

т.е. M покрывает (K, H). Таким образом, условие теоремы справедливо для подгрупп группы G. Следовательно, согласно выбору группы G все подгруппы из G p-разрешимы. Понятно, что G не q-нильпотентна, где q – наименьший простой делитель $|G|$, и поэтому ввиду [12; IV, теорема 5.4] в G существует q-замкнутая подгруппа Шмидта H. Пусть Q – нильпотентный корадикал группы H. По [1; теорема 26.1] получаем, что Q – нормальная силовская q-подгруппа группы H и $Q/\Phi(Q)$ – нецентральный главный фактор из H. Если H сверхразрешима, то $|Q/\Phi(Q)| = q$ и $|H/C_H(Q/\Phi(Q))|$ делит $q-1$. Следовательно, $C_H(Q/\Phi(Q)) = H$; противоречие. Поэтому H не является сверхразрешимой. Предположим, что группа G проста. Тогда в G существует единственный композиционный ряд $1 < G$. По условию теоремы (7) H либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (U, W) из G, что W не p-разрешима, что ввиду леммы 2.4 приводит к противоречию. Следовательно, группа G не является простой.

Пусть M – такая максимальная нормальная подгруппа группы G, что G/M не является абелевой и p делит $|G/M|$. Пусть L – собственная субнормальная подгруппа из G. Тогда $L \leqslant M$. Действительно, если $L \nleqslant M$, то $G = ML$ p-разрешима, что противоречит выбору группы G. Предположим, что $M \neq \Phi(G)$. Тогда в G найдется такая максимальная подгруппа E, что $EM = G$. Но так как подгруппы E и M p-разрешимы, то G также p-разрешима. Это противоречие показывает, что $M = \Phi(G)$.

Пусть $H \leqslant E$, где E – максимальная подгруппа из G. Так как $M = \Phi(G)$, то по условию теоремы H либо покрывает, либо изолирует (E^x, G) для всякого $x \in G$. Если H покрывает (E^x, G) для некоторого x, то $HE^x = G$, и поэтому $EE^x = G$, что противоречит лемме 2.3. Следовательно, H изолирует пару (E^x, G) для всех $x \in G$, т.е. $H \leqslant E^x$ для всякого $x \in G$. Поскольку $M = \Phi(G) \leqslant E$ и E_G – наибольшая нормальная подгруппа из G, содержащаяся в E, то $E_G = M$. Значит, $H \leqslant E_G = M = \Phi(G)$, и, следовательно, H нильпотентна, что противоречит выбору подгруппы H. Следовательно, (7) $\Rightarrow$ (1). Теорема доказана.

Мы говорим, что подгруппа A группы G является *слабой CAP-подгруппой* в G, если она является слабой CAP_p-подгруппой в G для всякого простого делителя p порядка группы G.

Следствие 3.2. *Пусть G – группа. Следующие утверждения эквивалентны*:
(1) *G разрешима*;
(2) *каждая подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G*;
(3) *каждая максимальная подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G*;
(4) *каждая 2-максимальная подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G*;

(5) *каждая силовская подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G;*
(6) *в G существует такая разрешимая максимальная подгруппа M, что M является слабой CAP-подгруппой в G;*
(7) *каждая несверхразрешимая подгруппа Шмидта из G является слабой CAP-подгруппой в G;*
(8) *каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G является слабой CAP-подгруппой в G.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.1 нам нужно лишь доказать импликации (6) $\Rightarrow$ (1) и (8) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что импликация (6) $\Rightarrow$ (1) не верна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G. Если $N \nleqslant M$, то $G = NM$, и поэтому $G/N = NM/N \simeq M/M \cap N$ разрешима. Пусть $N \leqslant M$. Тогда M/N – разрешимая максимальная подгруппа в G/N. Как и при доказательстве импликации (3) $\Rightarrow$ (1) теоремы 3.1, можно показать, что M/N является слабой CAP-подгруппой в G/N. Следовательно, для G/N справедливо условие следствия, и поэтому по выбору группы G факторгруппа G/N разрешима. Значит, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, N не является абелевой и $G = NM$. Если $N \cap M = 1$, то $G = [N]M$, и поэтому по лемме 2.8 N – абелева группа. Но тогда G разрешима, что противоречит выбору группы G. Полученное противоречие показывает, что $M \cap N \neq 1$, что ввиду леммы 2.4 так же, как и при доказательстве импликации (3) $\Rightarrow$ (1) в теореме 3.1, приводит к противоречию.

(8) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть P – силовская p-подгруппа из G, где p – наименьший простой делитель $|G|$, и V – максимальная подгруппа из P. Пусть

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

– такой композиционный ряд из G, что V либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что $G_{i-1} \leqslant K < H \leqslant G_i$ для некоторого i и H не является разрешимой. Прежде предположим, что G_1 не является абелевой. Тогда p делит $|G_1|$ и для силовской p-подгруппы W из G_1 имеем $W \neq G_1$. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $V \cap G_1 \leqslant W$. Если $V \cap W = 1$, то, так как V максимальна в P, $|W| = p$. Следовательно, G_1 p-нильпотентна по [12, V, теорема 2.8], что противоречит минимальности G_1. Следовательно, $V \cap W \neq 1$, что ввиду лемм 2.2 и 2.4 приводит к противоречию. Значит, G_1 – q-группа для некоторого простого числа q. Следовательно, $O_q(G) \neq 1$ по [13]. Если N – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $O_q(G)$, то так же, как в доказательстве импликации (7) $\Rightarrow$ (1) в теореме 3.1, можно показать, что условие теоремы справедливо для G/N. Поэтому G/N разрешима по выбору группы G. Но тогда группа G также разрешима. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (8) $\Rightarrow$ (1).

Следствие 3.3 (Го, Шам [10]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из G является CAP-подгруппой в G.*

Следствие 3.4 (Фан, Го, Шам [14]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из G является частичной CAP-подгруппой в G.*

Пусть H – подгруппа группы G. H называется *c-нормальной* [15] в G, если найдется такая нормальная подгруппа N из G, что $G = HN$ и $H \cap N \leqslant H_G$. Легко заметить, что c-нормальная подгруппа группы G является частичной CAP-подгруппой в G.

Следствие 3.5 (Ванг [15]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G c-нормальна в G.*

Следствие 3.6 (Го, Шам [10]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является CAP-подгруппой в G, то G разрешима.*

Следствие 3.7 (Фан, Го, Шам [14]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является частичной CAP-подгруппой в G, то группа G разрешима.*

Следствие 3.8 (Го, Шам [10]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в G найдется такая максимальная подгруппа M, что M – разрешимая CAP-подгруппа в G.*

Следствие 3.9 (Ванг [15]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в G найдется такая максимальная подгруппа M, что M – разрешимая c-нормальная подгруппа в G.*

Следствие 3.10 (Го, Шам [10]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа из G является CAP-подгруппой в G.*

Следствие 3.11 (Фан, Го, Шам [14]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа из G является частичной CAP-подгруппой в G.*

4. Критерии p-сверхразрешимости и сверхразрешимости групп. Пусть A, K и H – подгруппы группы G и $K \leqslant H$. Мы говорим, что A *условно* покрывает или изолирует пару (K, H), если найдется такой элемент $h \in H$, что A покрывает или изолирует пару (K^h, H).

В работе [11] Эскуэрро получил характеризации p-сверхразрешимых групп в терминах CAP-подгрупп. В этом разделе мы даем новые характеризации для p-сверхразрешимых, p-нильпотентных и сверхразрешимых групп в терминах условного покрытия и изолирования максимальных пар.

Теорема 4.1. *Пусть G – группа и p – простое число. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G p-сверхразрешима;*
(2) *каждая подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что p делит $|H : K|$;*
(3) *G p-разрешима и всякая субнормальная подгруппа из G покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что p делит $|H : K|$;*
(4) *G p-разрешима и всякая $\cap$-неразложимая подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что p делит $|H : K|$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть A – некоторая подгруппа группы G и (K, H) – такая максимальная пара из G, что p делит $|H : K|$. Тогда $|H : K| = p$. Если $H < G$, то по выбору группы G подгруппа $A \cap H$ условно покрывает или изолирует (K, H), т.е. найдется такой $h \in H$, что $A \cap H$ покрывает или изолирует (K^h, H). Если $A \cap H$ покрывает (K^h, H), то $K^h(A \cap H) = H(A \cap H) = H$, откуда $K^h A = HA$, т.е. A покрывает (K^h, H). Если $A \cap H$ изолирует (K^h, H), то $(A \cap H) \cap H = (A \cap H) \cap K^h$, и поэтому $A \cap H = A \cap K^h$, т.е. A изолирует (K^h, H). Поэтому мы можем предполагать, что $H = G$ и K – максимальная подгруппа в G.

Прежде предположим, что $K_G = 1$. Тогда G – примитивная группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $NK = G$, и поэтому $|G : K| = p$ делит $|N|$. Так как G p-сверхразрешима, то $|N| = p$. Кроме того, $C_G(N) = N$ по [2; A, теорема 15.2]. Следовательно,

$$K \simeq NK/N = G/N = G/C_G(N) \leqslant \mathrm{Aut}(N),$$

где $|\mathrm{Aut}(N)| = p - 1$. Следовательно, p не делит $|K|$. Поэтому K является p'-холловой подгруппой группы G. Если p делит $|A|$, то

$$|AK| = |A||K|/|A \cap K| \geqslant |K|p = |G|.$$

Следовательно, $AK = G$, т.е. A покрывает (K, G). Если p не делит $|A|$, то по теореме Холла–Чунихина [12; VI, теорема 1.7] найдется такой элемент $g \in G$, что $A \leqslant K^g$, т.е. A условно изолирует (K, G).

Предположим теперь, что $K_G \neq 1$. Тогда согласно выбору группы G AK_G/K_G условно покрывает или изолирует $(K/K_G, G/K_G)$. Следовательно, найдется такой $gK_G \in G/K_G$, что AK_G/K_G покрывает или изолирует $((K/K_G)^{gK_G}, G/K_G)$. Если AK_G/K_G покрывает $((K/K_G)^{gK_G}, G/K_G)$, то $(AK_G/K_G)(K/K_G)^{gK_G} = G/K_G$. Следовательно, $AK_G K^g = AK^g = G$, и поэтому A покрывает (K^g, G). Если AK_G/K_G изолирует $((K/K_G)^{gK_G}, G/K_G)$, то $(AK_G/K_G) \cap (K/K_G)^{gK_G} = AK_G/K_G$. Следовательно, $A \cap K^g = A$, т.е. A изолирует (K^g, G). Это показывает, что каждая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G, что p делит $|H : K|$, что противоречит выбору группы G. Таким образом, (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Прежде покажем, что условие теоремы переносится на факторгруппы группы G. Действительно, пусть N – произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G, A/N – произвольная подгруппа из G/N и $(K/N, H/N)$ – такая максимальная пара из G/N, что p делит $|H/N : K/N| = |H : K|$. Тогда по условию A условно покрывает или изолирует пару (K, H), т.е. найдется такой $x \in H$, что либо $AK^x = AH$, либо $A \cap K^x = A \cap H$. В первом случае получаем, что

$$(A/N)(K/N)^{xN} = (A/N)(H/N) \quad (xN \in H/N),$$

т.е. A/N покрывает пару $((K/N)^{xN}, H/N)$. Во втором случае имеет место

$$(A/N) \cap (K/N)^{xN} = (A/N) \cap (H/N),$$

т.е. A/N изолирует пару $((K/N)^{xN}, H/N)$. Следовательно, в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N, причем $N \nleqslant \Phi(G)$ и N – нециклическая p-группа. Следовательно, найдется такая максимальная подгруппа M группы G, что $G = [N]M$. Пусть L – подгруппа порядка p из N. Тогда, очевидно,

L не изолирует максимальную пару (M^x, G) при любом $x \in G$. Так как p делит $|G : M|$, существует такой элемент $x \in G$, что L покрывает пару (M^x, G), и поэтому $LM^x = G$. Следовательно, $|G : M^x| = |G : M| = |L| = |N| = p$. Это противоречие завершает доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (3) Пусть V – произвольная субнормальная подгруппа из G и (K, H) – такая максимальная пара из G, что p делит $|H : K|$. Тогда $|H : K| = p$ и $V \cap H$ субнормальна в H. Следовательно, не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $H = G$. Тогда K – максимальная подгруппа в G. Предположим, что $V \nleqslant K$. Если $K_G \neq 1$, то по индукции VK_G/K_G покрывает $(K/K_G, G/K_G)$. Поэтому $(K_GV/K_G)(K/K_G) = G/K_G$ и, следовательно, $VK = G$, т.е. V покрывает (K, G). Предположим теперь, что $K_G = 1$. Тогда G – примитивная группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Так как $K_G = 1$, то $G = NK$. Так как G p-сверхразрешима и p делит $|N|$, то $|N| = p$. Так как G примитивна, то $C_G(N) = N$. Следовательно, $G = [N]K$ и $K \simeq G/C_G(N)$ – абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Поэтому K – p'-холлова подгруппа группы G и $|G : K| = p$. Если p не делит $|V|$, то $V \subseteq O_{p'}(G)$, и поэтому $O_{p'}(G) \nsubseteq K$. Тогда $G = KO_{p'}(G)$, и, следовательно, $|G : K| \neq p$; противоречие. Поэтому p делит $|V|$. Значит,

$$|VK| = |V||K|/|V \cap K| \geqslant |K|p = |G|,$$

и, следовательно, $VK = G$, т.е. V покрывает (K, G). Таким образом, (1) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Понятно, что условие (3) сохраняется в любой факторгруппе грппы G (см. доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (1)). Поэтому в группе G существует лишь единственная минимальная нормальная подгруппа N, $N \nleqslant \Phi(G)$ и N – нециклическая p-группа. Следовательно, $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G и $N = C_G(N) = O_p(G)$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа из N. Тогда $L \neq N$ и по условию теоремы L покрывает или изолирует (M, G). Так как $N \cap M = 1$, то L не изолирует (M, G). Поэтому L покрывает (M, G). Следовательно, $ML = G$, и поэтому $|N| = |G : M| \leqslant |L| < |N|$; противоречие. Следовательно, G p-сверхразрешима.

(4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть E – подгруппа из G и V – $\cap$-неразложимая подгруппа из E. Тогда по лемме 2.5 найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа X из G, что $V = E \cap X$. Пусть (K, H) – такая максимальная пара из E, что p делит $|H : K|$. Тогда существует такой элемент $h \in H$, что X покрывает или изолирует (K^h, H). Если X покрывает пару (K^h, H), то $XK^h = XH$, поэтому

$$K^hV = K^h(E \cap X) = E \cap XK^h = E \cap XH = H(E \cap X) = HV,$$

т.е. V покрывает (K^h, H). Если X изолирует пару (K^h, H), т.е. $X \cap H \leqslant K^h$, то

$$V \cap H = X \cap E \cap H = X \cap H \leqslant K^h,$$

т.е. V изолирует (K^h, H). Таким образом, условие теоремы справедливо для подгрупп группы G. Следовательно, все максимальные подгруппы из G p-сверхразрешимы по выбору группы G.

Пусть N – произвольная минимальная нормальная подгруппа из G. Легко видеть, что условие теоремы сохраняется для G/N. Следовательно, G/N p-сверхразрешима по выбору группы G. Так как класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G, $N \nleqslant \Phi(G)$ и N – нециклическая p-группа. Пусть M – такая максимальная подгруппа из G, что $N \nleqslant M$. Тогда $G = [N]M$ и $M_G = 1$. Следовательно, $N = C_G(N)$ по [2; A, теорема 15.2] и M p-сверхразрешима.

(a) N – максимальная подгруппа силовской p-подгруппы P группы G.

Прежде покажем, что $N \neq P$. Предположим, что $N = P$ и V – максимальная подгруппа из N. Тогда V – $\cap$-неразложимая подгруппа в N, поэтому по лемме 2.5 найдется такая $\cap$-неразложимая подгруппа X из G, что $V = X \cap N$. Тогда $N \nleqslant X$. По условию теоремы существует такой элемент $x \in G$, что X покрывает или изолирует (M^x, G). Если X покрывает (M^x, G), т.е. $XM^x = G$, то $XM = G$ по лемме 2.3. Поскольку $N = P$, то M – p'-группа, и поэтому $P = N \leqslant X$. Полученное противоречие показывает, что X изолирует пару (M^x, G), т.е. $X \leqslant M^x$. Значит, $V \leqslant M^x$. Но тогда $V = 1$, а значит, N – циклическая группа. Полученное противоречие показывает, что $N \neq P$. Следовательно, p делит $|M|$. Так как M p-сверхразрешима, в M существует такая максимальная подгруппа E, что $|M : E| = p$. Так как $G = [N]M$, очевидно, $EN \neq G$. Следовательно, EN p-сверхразрешима. Кроме того, $O_{p'}(EN) = 1$, так как $C_G(N) = N$. По лемме 2.7 группа EN сверхразрешима. Следовательно, так как $N = C_G(N)$, силовская p-подгруппа P_1 из EN нормальна в EN. Очевидно также, что P_1 – максимальная подгруппа некоторой силовской p-подгруппы из G. Следовательно, P_1 нормальна в G, так как по лемме 2.3 $PE = G = P^xE$ для любого $x \in G$. Но так как $C_G(N) = N$ и $|O_p(G/N)| = |O_p(M)| = 1$, то $N = P_1$ – максимальная подгруппа в P.

(b) Каждая максимальная подгруппа V из N нормальна в некоторой силовской p-подгруппе из G.

Пусть X – такая $\cap$-неразложимая подгруппа из G, что $V = X \cap N$. Тогда согласно условию найдется такой элемент $x \in G$, что X покрывает или изолирует (M^x, G). Если X покрывает (M^x, G), то выполнено $XM^x = G = XM$ по лемме 2.3. Согласно (a) $|M_p| = p$, где M_p – силовская p-подгруппа из M. Следовательно, каждая силовская p-подгруппа из X является максимальной подгруппой в некоторой силовской p-подгруппе из G. Пусть $V \leqslant X_p$, где X_p – силовская p-подгруппа из X. Тогда X_p – максимальная подгруппа некоторой силовской p-подгруппы G_p из G. Следовательно, X_p нормальна в G_p. Поэтому $V = N \cap X = N \cap X_p$ нормальна в G_p. Заметим, наконец, что поскольку $V \neq 1$ и $V \leqslant X$, то X не может изолировать пару (M^x, G).

(c) Заключительное противоречие.

Пусть E – p'-холлова подгруппа группы M. Тогда $S = NE < G$ p-сверхразрешима. Так как $N = C_G(N)$, то $O_{p'}(S) = 1$. Следовательно, EN сверхразрешима по лемме 2.7. Поэтому некоторая максимальная подгруппа V из N нормальна в S. Кроме того, согласно (b), существует такая силовская p-подгруппа G_p в G, что $G_p \leqslant N_G(V)$. Следовательно, $G = SG_p \leqslant N_G(V)$, что противоречит минимальности N. Теорема доказана.

Следствие 4.2. *Пусть G – группа, p – наименьший простой делитель $|G|$. Группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая подгруппа из G*

условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) *из* G, *что* p *делит* $|H : K|$.

Доказательство. Так как p – наименьший простой делитель $|G|$, группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда G p-сверхразрешима. Следовательно, утверждение следствия прямо следует из теоремы 4.1.

Следствие 4.3. *Пусть* G *– группа. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) G *сверхразрешима*;
(2) *каждая подгруппа из* G *условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из* G;
(3) *каждая* $\cap$*-неразложимая подгруппа из* G *условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из* G;
(4) *каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка* 4 *из* G *условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из* G;
(5) G *разрешима и каждая субнормальная подгруппа из* G *покрывает или изолирует каждую максимальную пару из* G.

Доказательство. Ввиду теоремы 4.1 нам нужно лишь доказать импликации (3) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1).

(3) $\Rightarrow$ (1) По индукции каждая максимальная подгруппа из G сверхразрешима. Поэтому по [1; теорема 26.3] группа G разрешима. Тогда по теореме 4.1 группа G сверхразрешима.

(4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Очевидно, что условие теоремы справедливо для каждой подгруппы из G. Следовательно, G – минимальная несверхразрешимая группа. Поэтому по [1; теорема 26.3] справедливы следующие утверждения:

(a) G разрешима;
(b) $G^{\mathcal{U}}$ – силовская p-подгруппа из G для некоторого простого числа p, делящего $|G|$;
(c) $G^{\mathcal{U}}/\Phi(G^{\mathcal{U}})$ – нециклический главный фактор из G;
(d) если $p > 2$, то $G^{\mathcal{U}}$ – группа экспоненты p, а если $p = 2$, то экспонента группы $G^{\mathcal{U}}$ делит 4.

Пусть $P = G^{\mathcal{U}}$ и $X/\Phi(P)$ – подгруппа из $P/\Phi(P)$ порядка p. Пусть $x \in X \setminus \Phi(P)$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда либо $|L| = p$, либо $|L| = 4$. Тогда согласно гипотезе (4) получаем, что L условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G. Так как $\mathcal{U}$ – насыщенная формация и $G/G^{\mathcal{U}}$ сверхразрешима, то $P \nleqslant \Phi(G)$. Пусть M – такая максимальная подгруппа из G, что $PM = G$. Тогда L условно покрывает или изолирует пару (M, G). Следовательно, существует такой элемент $h \in G$, что L либо покрывает, либо изолирует (M^h, G). По [2; A, теорема 9.2(e)] имеет место $\Phi(P) \leqslant \Phi(G)$. Следовательно, $\Phi(P) \leqslant M^h$. Тогда $G/\Phi(P) = [P/\Phi(P)](M^h/\Phi(P))$. Так как $L \nleqslant \Phi(P)$, то $L \nleqslant M^h$. Это показывает, что L не изолирует (M^h, G). Следовательно, $LM^h = LM = G$. Тогда $|P/\Phi(P)| = |G : M| = p$, что противоречит тому, что $P/\Phi(P)$ – нециклический фактор. Таким образом, (4) $\Rightarrow$ (1).

Следуя [16], мы будем использовать символ $Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$ для обозначения произведения всех таких нормальных подгрупп из G, у которых все их нефраттиньевы G-главные факторы являются циклическими.

Теорема 4.4. *Пусть $X \leqslant E$ – разрешимые нормальные подгруппы группы G. Предположим, что каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из X условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M,G), где $MX = G$. Если $X = E$ или $X = F(E)$, то $E \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$.*

Доказательство. Прежде предположим, что $X = E$. Предположим, что в этом случае теорема не верна, и пусть (G,E) – контрпример с минимальным $|G||E|$. Прежде покажем, что $E/N \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/N)$ для всякой минимальной нормальной подгруппы N из G, содержащейся в E. Действительно, ввиду выбора группы (G,E) нам нужно только проверить, что условие теоремы справедливо для $(G/N, E/N)$. Пусть N – p-группа, Q/N – силовская q-подгруппа из E/N и V/N – максимальная подгруппа из Q/N. Пусть T/N – такая максимальная подгруппа из G/N, что $(T/N)(E/N) = G/N$. Тогда $TE = G$. Предположим, что $q \neq p$. Тогда $V = NM$ и $Q = NP$, где M – силовская q-подгруппа из V и P – силовская q-подгруппа из Q, содержащая M. Тогда P – силовская q-подгруппа в E, поэтому существует такой элемент $x \in G$, что M покрывает или изолирует пару (T^x, G). Если $M \leqslant T^x$, то

$$V/N = NM/N \leqslant T^x/N = (T/N)^{xN}.$$

В противном случае $MT^x = G$, что влечет $(M/N)(T/N)^{xN} = G/N$. Если $q = p$, то аналогично проверяется, что V/N условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару $(M/N, G/N)$, где $(M/N)(E/N) = G/N$. Поэтому $E/N \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/N)$ для всякой минимальной нормальной подгруппы N из G, содержащейся в E. Следовательно, $N \nleqslant \Phi(G)$ и $|N| > p$ по выбору (G,E).

Пусть M – такая максимальная подгруппа в G, что $N \nleqslant M$. Тогда $G = [N]M$ и $E = [N](E \cap M)$. Пусть W – силовская p-подгруппа из $E \cap M$, V – максимальная подгруппа в NW, содержащая W. Тогда по условию теоремы V условно покрывает или изолирует пару (M,G). Если $VM^x = G$ для некоторого $x \in G$, то $VM = G$ по лемме 2.3, поэтому

$$|G| = |VM| = |V||M| : |V \cap M| = |V||M| : |W| < |N||M| = |G|,$$

что невозможно. Следовательно, $V \leqslant M^x$ для всякого $x \in G$. Значит, $V \leqslant M_G$, и поэтому $V \cap N = 1$. Поэтому $|N| = p$; противоречие. Это противоречие показывает, что в случае, когда $X = E$, теорема верна.

Предположим теперь, что $X = F(E)$. Предположим, что в этом случае теорема не верна, и пусть (G,E) – контрпример с минимальным $|G||E|$. Пусть $F = F(E)$ и P – силовская p-подгруппа из F, где p делит $|F|$.

(1) $P \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$ и $E/P \nleqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/P)$.

Так как P является характеристической подгруппой в F и F является характеристической подгруппой в E, то P нормальна в G. Следовательно, как и в случае $X = E$, получаем, что $P \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$. Поэтому $E/P \nleqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/P)$, так как в противном случае $E \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$, что противоречит выбору (G,E).

(2) Если L – минимальная нормальная подгруппа в G и $L \leqslant P$, то $|L| > p$.

Предположим, что $|L| = p$. Пусть $C_0 = C_E(L)$. Тогда условие теоремы справедливо для $(G/L, C_0/L)$. Действительно, так как $F \leqslant C_0$ и $L \leqslant Z(F)$, то $F(C_0/L) = F/L$. Кроме того, как и в случае, когда $X = E$, можно доказать, что если M/L – такая максимальная подгруппа в G/L, что $(F/L)(M/L) = G/L$, Q/L – силовская

q-подгруппа из F/L и V/L – максимальная подгруппа из Q/L, то V/L условно покрывает или изолирует $(M/L, G/L)$. Следовательно, согласно выбору (G, E) имеет место $C_0/L \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/L)$, откуда ввиду G-изоморфизма $C_G(L)E/C_G(L) \simeq E/C_0$ получаем, что $E \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$. Полученное противоречие показывает, что имеет место (2).

(3) $\Phi(G) \cap P \neq 1$.

Предположим, что $\Phi(G) \cap P = 1$, и пусть L – минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в P. Пусть M – такая максимальная подгруппа из G, что $G = [L]M$. Пусть $P_1 = P \cap M$. Тогда $P = LP_1$ и $|P : P_1| = |N|$. Пусть V – максимальная подгруппа из P, содержащая P_1. Тогда $L \nleqslant V$ и по условию V условно покрывает или изолирует (M, G). Если $V \leqslant M^x$ для всякого $x \in G$, то $V \cap N = 1$, поэтому $|L| = p$, что противоречит (2). Следовательно, $G = VM^x$ для всякого $x \in G$, поэтому $G = VM$ по лемме 2.3. Но тогда

$$|L| = |G : M| = |V||M| : |P_1||M| < |L|.$$

Это противоречие показывает, что $\Phi(G) \cap P \neq 1$.

Заключительное противоречие. Согласно (3), в G существует такая минимальная нормальная подгруппа L, что $L \leqslant \Phi(G) \cap P$. Тогда $F(E/L) = F/L$ по [2; A, теорема 9.3(c)]. Поэтому условие теоремы справедливо для $(G/L, E/L)$, и поэтому $E/L \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/L)$ по выбору группы G. Но тогда $E \leqslant Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$, так как $L \leqslant \Phi(G)$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 4.5. *Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G, что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из E условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M, G), где $ME = G$, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.6 (Эскуэрро [11]). *Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G, что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из E является CAP-подгруппой в E, то G сверхразрешима.*

Доказательство следует из следствия 4.5 и леммы 2.10.

Следствие 4.7. *Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G, что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из $F(E)$ условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M, G), где $MF(E) = G$, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.8 (Эскуэрро [11]). *Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G, что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из $F(E)$ является CAP-подгруппой в E, то G сверхразрешима.*

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[2] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[3] O. Ore, “Contributions in the theory of groups of finite order”, *Duke Math. J.*, **5**:2 (1939), 431–460.

[4] S. E. Stonehewer, “Permutable subgroups in Infinite Groups”, *Math. Z.*, **125** (1972), 1–16.

[5] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, A. N. Skiba, “Local embeddings of some families of subgroups of finite groups”, *Acta Math. Sin.* (*Engl. Ser.*), **25**:6 (2009), 869–882.

[6] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, A. N. Skiba, “Subgroups of finite groups with a strong cover-avoidance property”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **79**:3 (2009), 499–506.

[7] D. L. Johnson, “A note on supersoluble groups”, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 562–564.

[8] H. G. Bray, W. E. Deskins, D. Johnson, J. F. Humphreys, B. M. Puttaswamaiah, P. Venzke, G. L. Walls, *Between Nilpotent and Solvable*, ed. M. Weinstein, Polygonal Publ. House, Washington, NJ, 1982.

[9] W. Guo, *The Theory of Classes of Groups*, Math. Appl., **505**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[10] X. Guo, K. P. Shum, “Cover-avoidance properties and the structure of finite groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **181**:2-3 (2003), 297–308.

[11] L. M. Ezquerro, “A contribution to the theory of finite supersolvable groups”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **89** (1993), 161–170.

[12] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Die Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[13] H. Wielandt, *Subnormal subgroups and permutation groups*, Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.

[14] Y. Fan, X. Y. Guo, K. P. Shum, “Remarks on two generalizations of normality of subgroups”, *Chinese J. Contemp. Math.*, **27**:2 (2006), 139–146.

[15] Y. Wang, “c-normality of groups and its properties”, *J. Algebra*, **180**:3 (1996), 954–965.

[16] L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, “On the $\mathcal{X}\Phi$-hypercentre of finite groups”, *J. Algebra*, **322**:6 (2009), 2106–2117.

Юфэнг Лиу
Shandong Institute of Business and Technology, Китай
E-mail: yfliu65@163.com

Поступило
22.02.2010
Исправленный вариант
14.01.2013

Вэньбинь Го
University of Science and Technology of China, Китай
E-mail: wbguo@ustc.edu.cn

В. А. Ковалева
Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины
E-mail: vika.kovalyova@rambler.ru

А. Н. Скиба
Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины
E-mail: alexander.skiba49@gmail.com