Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА[1]

В. Н. Князина, В. С. Монахов

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Устанавливаются признаки p-разрешимости конечной группы с условием перестановочности максимальных подгрупп с некоторыми подгруппами Шмидта.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, подгруппа Шмидта, перестановочные подгруппы.

V. N. Knyagina, V. S. Monakhov. On the permutability of maximal subgroups with Schmidt subgroups.

A Schmidt group is a finite nonnilpotent group in which every proper subgroup is nilpotent. We establish sufficient conditions for the p-solvability of a finite group in which maximal subgroups permute with some Schmidt subgroups.

Keywords: finite group, solvable group, Schmidt subgroup, permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Группой Шмидта* называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится в точности на два различных простых числа), одна из ее силовских подгрупп нормальная, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда группы Шмидта. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [2].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности некоторых подгрупп с подгруппами Шмидта, является работа Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [3]. В этой работе наряду с другими результатами получены следующие утверждения.

Теорема [3, следствия 2–4]. 1. *Пусть максимальная подгруппа H группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G. Тогда $H/\mathrm{Core}_G H$ нильпотентна, а $G/\mathrm{Core}_G H$ разрешима.*

2. *Если каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G, то G разрешима.*

3. *Пусть каждая максимальная подгруппа H группы G обладает тем свойством, что $\mathrm{Core}_G H$ содержит все подгруппы Шмидта из H. Тогда G разрешима.*

Напомним, что $\mathrm{Core}_G H = \cap_{g \in G} H^g$ — наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H. Группа, порядок которой делится на простое число p, называется *pd-группой*, а группа с нормальной силовской p-подгруппой называется *p-замкнутой*. Если в группе G существует нормальная подгруппа K такая, что $G = KP$, $K \cap P = 1$, где P — силовская p-подгруппа в G, то G называется *p-нильпотентной*. Группа, которая одновременно p-замкнута и p-нильпотентна, называется *p-разложимой*. *Мета-p-разложимая группа* — это группа, содержащая нормальную p-разложимую подгруппу, фактор-группа по которой также p-разложима. Через $l_p(G)$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ-БРФФИ (проект Ф 10Р-231).

обозначается p-длина p-разрешимой группы G. A_n и S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно.

В настоящей заметке получены локальные аналоги результатов Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика. В частности, доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Зафиксируем простое число p.*

1. *Пусть максимальная подгруппа M группы G перестановочна со всеми pd-подгруппами Шмидта группы G. Тогда $M/\mathrm{Core}_G M$ p-разложима. Если $p = 2$, то $G/\mathrm{Core}_G M$ разрешима.*

2. *Пусть каждая максимальная подгруппа H группы G обладает тем свойством, что $\mathrm{Core}_G H$ содержит все pd-подгруппы Шмидта из H. Тогда G p-разрешима.*

Теорема 2. 1. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка из G, то G разрешима и $l_2(G) \leq 1$.*

2. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой pd-подгруппой Шмидта из G, то G мета-p-разложима. В частности, G p-разрешима и $l_p(G) \leq 1$.*

3. *Если каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G, то G метанильпотентна.*

В простой группе $PSL(2,5)$ максимальная подгруппа, изоморфная A_4, перестановочна со всеми $5d$-подгруппами Шмидта, а в группе $PSL(2,7)$ максимальная подгруппа, изоморфная S_4, перестановочна со всеми $7d$-подгруппами Шмидта. Эти примеры показывают, что для $p > 2$ в п. 1 теоремы 1 получить p-разрешимость фактор-группы $G/\mathrm{Core}_G M$ невозможно.

Отметим, что в утверждении 2 теоремы 2 ограничиться только p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта нельзя ни при каком нечетном простом p, поскольку для каждого $p \geq 3$ существует простая неабелева группа, в которой нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта. Для $p = 3$ это группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n \geq 3$, а для $p \geq 5$ — группа $PSL(2,p)$. Обратим внимание также на то, что в утверждении 2 теоремы 2 не исключается случай $p = 2$. Утверждение 3 теоремы 2 усиливает утверждение 2 теоремы Берковича — Пальчика.

1. Вспомогательные результаты

Будем придерживаться обозначений и определений, принятых в [4; 5]. Запись $G = [A]B$ означает, что группа G является полупрямым произведением подгрупп A и B, причем A нормальна в G. Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел. Если порядок подгруппы H делится только на простые числа из π, то говорят, что H — *π-подгруппа* группы G. Если индекс π-подгруппы H в группе G делится только на простые числа из π', то H называют *π-холловой* подгруппой группы G. Говорят, что группа G обладает свойством D_π, если в G имеется π-холлова подгруппа, любые две π-холловы подгруппы сопряжены и каждая π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе. Группу со свойством D_π называют *D_π-группой.* Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром ($\mathrm{Core}_G M = 1$), то группу G называют *примитивной*, а M — ее *примитиватором.*

Условимся называть *$S_{\langle p,q \rangle}$-группой* $\{p,q\}$-группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой. Если X и Y — подгруппы группы G, то положим $X^Y = \langle X^y \mid y \in Y \rangle$.

Для простого числа r через $S_r(G)$ обозначается наибольшая нормальная r-разрешимая подгруппа группы G, а через $S(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G.

Лемма 1 [6, лемма 1.5]. *Если в группе G нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

Лемма 2 [6, лемма 3.1]. *Если в группе G нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G 2-замкнута.*

Лемма 3. *Если p-разрешимая группа G не является p-замкнутой группой, то в ней существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта.*

Доказательство. По [7, теорема 5.3.13] группа G является $D_{\{p,q\}}$-группой для любого $q \in \pi(G)$. Пусть G не p-замкнута. Тогда существует $q \in \pi(G)$ такое, что $\{p, q\}$-холлова подгруппа H из группы G не p-замкнута, т. е. H не q-нильпотентна. По лемме 1 в H существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта. Лемма доказана.

Напомним, что *минимальным добавлением* к подгруппе A в группе G называется подгруппа B такая, что $G = AB$ и $G \neq AB_1$ для каждой собственной подгруппы B_1 из B.

Лемма 4 [8, лемма 3]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами*:

1) *L — p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа*;

2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны*;

3) *L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в подгруппе D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.*

Лемма 5. *Зафиксируем различные простые числа p и q. Пусть H — подгруппа группы G, порожденная всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из G, а N — нормальная подгруппа в G, содержащая H. Тогда в G/N нет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп.*

Доказательство. Допустим противное, пусть A/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G/N. По лемме 4 в A существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа S такая, что $S^A N = A$. Однако по построению подгруппы H имеем $S^A \subseteq H \subseteq N$, т. е. $A = N$ и A/N единична, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и $p, q \in \pi(M)$. Предположим, что M перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из M, то S^G содержится в $\mathrm{Core}_G M$.*
2. *Фактор-группа $M/\mathrm{Core}_G(M)$ не содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп.*

Доказательство. 1. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из M. По условию подгруппа M перестановочна с S^x для каждого $x \in G$. Если допустить, что существует элемент $y \in G$ такой, что M не содержит S^y, то $MS^y = S^y M = G$ и $G = MS^y \subseteq MM^y$, что невозможно ввиду [4, лемма 1.44]. Таким образом,

$$S^G = \langle S^x \mid x \in G \rangle \subseteq \mathrm{Core}_G M.$$

2. По п. 1 леммы $\mathrm{Core}_G M$ содержит все $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы из M. По лемме 5 в $G/\mathrm{Core}_G M$ нет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Предположим, что подгруппа M перестановочна со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта из группы G. Тогда $M/\mathrm{Core}_G M$ p-нильпотентна.*

Доказательство. По условию M перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами группы G для всех $q \in \pi(G)$. По лемме 6 в $M/\mathrm{Core}_G M$ нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта. По лемме 1 фактор-группа $M/\mathrm{Core}_G M$ p-нильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Предположим, что подгруппа M перестановочна со всеми p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта из группы G. Тогда $M/\mathrm{Core}_G M$ p-замкнута в каждом из следующих случаев*:

1) $p = 2$;

2) $p > 2$ *и подгруппа* $M/\mathrm{Core}_G M$ *p-разрешима.*

Доказательство. По условию M перестановочна со всеми $S_{\langle q,p\rangle}$-подгруппами группы G для всех $q \in \pi(G)$. По лемме 6 в $M/\mathrm{Core}_G M$ нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта.

Пусть $p = 2$. Тогда по лемме 2 фактор-группа $M/\mathrm{Core}_G M$ 2-замкнута.

Пусть $p > 2$ и подгруппа $M/\mathrm{Core}_G M$ p-разрешима. По [7, теорема 5.3.13] подгруппа $M/\mathrm{Core}_G M$ является $D_{\{p,t\}}$-группой для любого $t \in \pi(M)$. Пусть $M/\mathrm{Core}_G M$ не p-замкнута. Тогда существует $q \in \pi(M/\mathrm{Core}_G M)$ такое, что $\{p, q\}$-холлова подгруппа $H/\mathrm{Core}_G M$ из группы $M/\mathrm{Core}_G M$ не p-замкнута, т. е. $H/\mathrm{Core}_G M$ не q-нильпотентна. По лемме 1 в $H/\mathrm{Core}_G M$ существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта. Противоречие. Поэтому допущение неверно и $M/\mathrm{Core}_G M$ p-замкнута. Лемма доказана.

Лемма 9. *Зафиксируем простые числа p и q, где $p \neq q$.*

1. *Пусть H — подгруппа группы G, N — нормальная в G подгруппа. Если H перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из G, то HN/N перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из G/N.*

2. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой и N — нормальная подгруппа в G, то в G/N каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из G/N.*

Доказательство. 1. Пусть A/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из G/N. По лемме 4 имеем $A = S^L N$, где S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из минимального добавления L к N в A. По условию $HS^l = S^l H$ для любого $l \in G$. Тогда $HS^L = S^L H$ по [8, лемма 6] и $HA = AH$. Теперь HN/N и A/N перестановочны.

2. Если H/N — максимальная подгруппа в G/N, то для H выполнено условие, а следовательно, и заключение из п. 1. Поэтому в G/N каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой. Лемма доказана.

Лемма 10 [9, предложение 1]. *Всякая неразрешимая группа G содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта S четного порядка такую, что S не содержится в $S(G)$ и из условия $SH = G$, где H — подгруппа группы G, следует, что $H = G$.*

Лемма 11. *Пусть p — простое число и группа G мета-p-разложима. Тогда*

1) *если H — подгруппа группы G, то H мета-p-разложима*;

2) *если N — нормальная в G подгруппа, то G/N мета-p-разложима*;

3) $l_p(G) \leq 1$;

4) *если группы A и B мета-p-разложимы, то группа $A \times B$ мета-p-разложима*;

5) *если X — группа и $X/\Phi(X)$ мета-p-разложима, то X мета-p-разложима.*

Доказательство. Доказательства утверждений 1 и 2 — простая проверка.

3. В силу п. 2 и индукции можно предположить, что $l_p(G/N) \leq 1$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N. Если $l_p(G/N) > 1$, то по [5, лемма VI.6.9]

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1, \quad O_p(G) = F(G) = C_G(O_p(G)) \simeq E_{p^n}$$

для некоторого натурального числа n и $G = [O_p(G)]M$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Из мета-p-разложимости группы G следует, что M p-разложима. Но $O_p(M) = 1$, поэтому M — p'-подгруппа и $l_p(G) \leq 1$.

4. По условию в группе A существует нормальная p-разложимая подгруппа A_1 такая, что A/A_1 p-разложима. Соответственно, в группе B существует нормальная подгруппа B_1 такая, что B_1 и B/B_1 p-разложимы. Ясно, что группа $A_1B_1 = A_1 \times B_1$ p-разложима как прямое произведение p-разложимых групп. Фактор-группа

$$(A \times B)/(A_1 \times B_1) \simeq (A/A_1) \times (B/B_1)$$

также p-разложима. Теперь группа $H = A \times B$ мета-p-разложима.

5. Пусть X — группа и $X/\Phi(X)$ мета-p-разложима. Тогда $X/\Phi(X)$ содержит нормальную p-разложимую подгруппу $Y/\Phi(X)$ и фактор-группа

$$(X/\Phi(X))/(Y/\Phi(X)) \simeq X/Y$$

также p-разложима. Пусть P — силовская p-подгруппа в Y. Поскольку подгруппа Y p-разрешима, то в Y существует p'-холлова подгруппа H. По условию

$$Y/\Phi(X) = (P\Phi(X)/\Phi(X)) \times (H\Phi(X)/\Phi(X)),$$

поэтому подгруппы $P\Phi(X)/\Phi(X)$ и $H\Phi(X)/\Phi(X)$ нормальны в $X/\Phi(X)$. По лемме Фраттини

$$X = (P\Phi(X))N_X(P) = \Phi(X)N_X(P), \quad X = (H\Phi(X))N_X(H) = \Phi(X)N_X(H).$$

Ввиду известного свойства подгруппы Фраттини получаем, что подгруппы P и H нормальны в X и $Y = P \times H$ p-разложима. Так как X/Y p-разложима, то X мета-p-разложима. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если группа G мета-p-разложима для всех $p \in \pi(G)$, то G метанильпотентна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как мета-p-разложимая группа p-разрешима, то G — разрешимая группа. По индукции можно считать, что G примитивна и тогда

$$G = [N]H, \quad N = F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G), \quad \text{где } p \in \pi(G),$$

N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, H — максимальная в G подгруппа и $\mathrm{Core}_G H = 1$. Так как G мета-p-разложима, то существует нормальная p-разложимая подгруппа $K = K_p \times K_{p'}$ такая, что G/K p-разложима. Из равенства $N = O_p(G)$ следует, что $N = K_p$, а поскольку $N = C_G(N)$, то $K_{p'} = 1$, т.е. $N = K$. Так как G/N p-разложима и $O_p(G/N) = 1$, то G/N — p'-группа и N — силовская p-подгруппа группы G.

Пусть q — произвольное число из $\pi(G) \setminus \{p\}$. Так как группа G мета-q-разложима, то в ней существует нормальная подгруппа $T = T_q \times T_{q'}$ такая, что G/T q-разложима. Поскольку T_q нормальна в G и $q \neq p$, то $T_q \subseteq C_G(N) = N$ и $T_q = 1$. Пусть $G_{q'}$ — q'-холлова подгруппа в G. Ясно, что $T_{q'} \subseteq G_{q'}$, а поскольку $G/T_{q'}$ q-разложима, то $G_{q'}/T_{q'}$ нормальна в $G/T_{q'}$. Отсюда следует, что $G_{q'}$ нормальна в G и G q-нильпотентна для всех $q \neq p$. Но в этом случае p'-холлова подгруппа нильпотентна и G метанильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 13 [10, лемма 2]. *Пусть $G = AB$, где подгруппы A и B p-замкнуты. Тогда если $O_p(A_p^G) = Z(A_p^G) = 1$, то $A_p^G \cap B_p^G = 1$.*

Лемма 14 [11, теорема 2]. *Пусть (непримарная) максимальная подгруппа M группы G является p-разложимой подгруппой. Тогда G имеет нормальную подгруппу одного из видов*:

1) *силовская p-подгруппа из M*;
2) *p'-холлова подгруппа из M*;
3) *p'-холлова подгруппа из G.*