Е. В. Вакулина[1], **Н. В. Максименко**[2], **В. В. Андреев**[2]
[1]*г. Новозыбков, БГУ имени академика И. Г. Петровского,*
[2]*г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины*

ИЗЛУЧЕНИЕ ПИОНА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ПОЛЕМ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Введение. В связи с созданием источников интенсивного электромагнитного поля исследование электродинамических и адронных процессов в таких полях приобретает особую актуальность. В реакциях взаимодействия структурных частиц с электромагнитным полем проявляются квантовые свойства как самих частиц, так и свойства механизмов взаимодействия интенсивных электромагнитных полей с этими частицами.

Поэтому представляет интерес исследование влияния электромагнитного поля на квантовые процессы излучения пионов, взаимодействующих с полем плоской электромагнитной волны.

Известное решение Д. М. Волкова [1], описывающее движение электрона в поле плоской электромагнитной волны, нашло широкое применение в исследованиях квантовых эффектов в электродинамических процессах [2, 3].

В работе [4] представлены результаты исследований распадов элементарных частиц в поле плоской электромагнитной волны.

В процессах рассеяния фотонов на адронах важную роль играют такие структурные константы, как поляризуемости, интерпретация которых была получена на основе общих принципов релятивистской квантовой теории поля [5, 6].

В работах [7–9] в рамках релятивистской квантовой теории поля получены эффективные лагранжианы двухфотонного взаимодействия с адронами с учетом поляризуемостей, которые согласуются с амплитудами в низкоэнергетическом представлении. На основе этих лагранжианов получены релятивистские полевые уравнения движения частиц с поляризуемостями в электромагнитном поле [10]. В работе [11] были найдены точные решения релятивистских волновых уравнений для частиц с дипольными поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны.

Поэтому представляет интерес изучить реакцию электромагнитного излучения пиона, взаимодействующего с полем плоской электромагнитной волны. Данная работа и посвящена этому процессу и сравнению результатов расчета с полным сечением комптоновского рассеяния на пионе, используя методы работ представленные в [2, 3, 12].

1. Излучение фотона пионом в поле плоской электромагнитной волны. Лагранжиан пиона, движущегося в электромагнитном поле, имеет вид:

$$L = L_0 + L_{int}. \tag{1}$$

В этом выражении:

$$L_0 = (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

а лагранжиан взаимодействия:

$$L_{int} = iQA_\nu(\phi \partial^\nu \phi^* - \phi^* \partial^\nu \phi) + Q^2 A^2 \phi^* \phi.$$

В этих уравнениях $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\varphi(x)$ – волновая функция пиона, Q – заряд и m – масса пиона, A_μ – четырёхмерный потенциал электромагнитного поля.

Из лагранжиана (1) и условия Лоренца $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ следует уравнение движения:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = -2iQA^\mu \partial_\mu \phi + Q^2 A^2 \phi. \tag{2}$$

Представим решение уравнения (2) следующим образом [1, 4]:

$$\phi(x) = -e^{ipx} \chi(\varphi), \tag{3}$$

где $\varphi = kx$, k – волновой четырёхмерный вектор.
Из уравнений (2) и (3) следует:

$$(pk)\chi' = -i\left(Q(Ap) - \frac{1}{2} Q^2 A^2\right)\chi, \tag{4}$$

где $\chi' = \frac{\partial \chi(\varphi)}{\partial \varphi}$.

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид [2]:

$$\phi_p(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \exp(-ipx - i\int_0^\varphi \frac{Q}{(kp)}\left((pA(\varphi)) - \frac{Q}{2} A^2(\varphi)\right) d\varphi'.) \tag{5}$$

Элемент -матрицы для перехода пиона из состояния ϕ_p в состояние $\phi_{p'}$ в случае излучения фотона:

$$A'_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega'}} e_\mu^{(\lambda')} e^{ik'x}$$

с импульсом $k^{\mu'} = (\omega', \vec{k}')$ и поляризацией $e_\mu^{(\lambda')}$ равен:

$$S_{f_i} = \int d^4x j^\mu(x) A'_\mu(x). \tag{6}$$

Плотность тока, которая содержится в (6), определяется следующим образом:

$$j^\mu(x) = iQ\phi^*_{p'} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_p - 2Q^2 A^\mu(\varphi) \phi^*_{p'} \phi_p, \tag{7}$$

где $\overleftrightarrow{\partial}^\mu = \vec{\partial}^\mu - \overleftarrow{\partial}^\mu$, $A^\mu(\varphi)$ – потенциал плоской волны.

Рассмотрим взаимодействие пиона с плоской электромагнитной волной, которая определяется потенциалом [2, 3]:

$$A(x) = a_1 cos\varphi + a_2 sin\varphi. \tag{8}$$

Амплитуды a_1 и a_2 четырёхмерные вектора равные по величине и взаимно ортогональные:

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2, \quad a_1 \cdot a_2 = 0, \quad a_1 k = a_2 k = 0.$$

В выражении (5) выполним интегрирование по φ с учетом поля (8):

$$\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2q_0}} e^{-iS(p)}, \quad \phi^+_{p'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2q_0}} e^{iS(p')}. \tag{9}$$

В выражении (9) введены функции:

$$S(p) = qx + Q\frac{(a_1p)}{(kp)}\sin(kx) - Q\frac{(a_2p)}{(kp)}\cos(kx) \quad (10)$$

и выражение для $S(p')$ следует из (10) в результате замены p на p'. В (10) введен четырехмерный квазиимпульс:

$$q = p - \frac{Q^2a^2}{2(kp)}k,$$

который удовлетворяет соотношению:

$$q^2 = p^2 - Q^2a^2 = m_*^2,$$

где $m_* = m\sqrt{1 - \frac{Q^2a^2}{m^2}}$ – масса частицы с квазиимпульсом q.

Подставляя выражения (7), (9) и (10) в (6) S-матричный элемент примет следующую форму:

$$S_{f_i} = Q\int d^4x\frac{e^{i(k'+q'-q)x}}{\sqrt{8\omega' q_0q_0'}}e^{-i(\alpha_1 sin\varphi - \alpha_2 cos\varphi)}(\Sigma_0 + \Sigma_1 cos\varphi + \Sigma_2 sin\varphi). \quad (11)$$

В (11) введены следующие обозначения:

$$\Sigma_0 = (q' + q)e',$$
$$\Sigma_1 = (ke')\beta_1 - 2Q(a_1e'),$$
$$\Sigma_2 = (ke')\beta_2 - 2Q(a_2e').$$

В определении (11) в показателе экспоненты содержаться α_1 и α_2, которые имеют вид:

$$\alpha_1 = Q\left(\frac{(a_1p)}{(kp)} - \frac{(a_1p')}{(kp')}\right), \quad \alpha_2 = Q\left(\frac{(a_2p)}{(kp)} - \frac{(a_2p')}{(kp')}\right).$$

если в выражениях для α_1 и α_2 заменить знак минус на плюс, то получим соответственно β_1 и β_2.

Как видно из формулы (11) в определении -матрицы входит три слагаемых:

$$\Sigma_0 e^{-i(\alpha_1 sin\varphi - \alpha_2 cos\varphi)}, \quad (12)$$

$$\Sigma_1 cos\varphi e^{-i(\alpha_1 sin\varphi - \alpha_2 cos\varphi)}, \quad (13)$$

$$\Sigma_2 sin\varphi e^{-i(\alpha_1 sin\varphi - \alpha_2 cos\varphi)}. \quad (14)$$

Разложим (12–14) в ряд Фурье следуя [4]. Тогда сумма слагаемых (12–14) примет вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\Sigma_0 B_n + \Sigma_1 B_{1n} + \Sigma_2 B_{2n})e^{-in\varphi}. \quad (15)$$

Коэффициенты суммы (15) B_n, B_1 и B_2 выражаются через функции Бесселя $J_n(z)$ следующим образом:

$$B_n = J_n(z)e^{in\varphi_0},$$
$$B_{1n} = J_{n+1}(z)e^{i(n+1)\varphi_0} + J_{n-1}(z)e^{i(n-1)\varphi_0},$$
$$B_{2n} = \frac{1}{2i}(J_{n+1}(z)e^{i(n+1)\varphi_0} - J_{n-1}(z)e^{i(n-1)\varphi_0}),$$

где введены величины $z = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ и определены $cos\varphi_0 = \frac{\alpha_1}{z}$, $sin\varphi_0 = \frac{\alpha_2}{z}$.

Подставим (15) в определение S – матричного элемента (11). В результате получим:

$$S_{f_i} = i(2\pi)^4\frac{\delta(k' + q' - q - nk)}{(2\pi)^4\sqrt{8\omega' q_0q_0'}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}M_{f_i}^{(n)}.$$

Амплитуды $M_{f_i}^{(n)}$ в этом выражении имеют вид:

$$M_{f_i}^{(n)} = -iQ(\Sigma_0 B_n + \Sigma_1 B_{1n} + \Sigma_2 B_{2n})$$

и поскольку $q^2 = q'^2 = m_*^2$, то равенство $nk + q = q' + k'$ возможно, если $n \geq 1$.

2. Определение вероятности излучения в поле плоской электромагнитной волны. Дифференциальная вероятность -гармоники выражается через амплитуду $M_{f_i}^{(n)}$ следующим образом [4]:

$$dW_n = \sum_{\lambda'} \left| M_{f_i}^{(n)} \right|^2 \frac{d^3k' d^3q'}{(2\pi)^6 8\, \omega' q_0 q_0'} (2\pi)^4 \delta(nk + q - q' - k'). \qquad (16)$$

Для неполяризованного излучаемого фотона суммирование по λ' можно осуществить путем замены

$$e_\mu^{(\lambda')} e_\nu^{(\lambda')} \to -g^{\mu\nu},$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор.

Выполняя суммирование в (16) по λ' квадрата амплитуды $M_{f_i}^{(n)}$ и используя свойства функций Бесселя

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z),$$

получим:

$$\sum_{\lambda'} \left| M_{f_i}^{(n)} \right|^2 = J_n^2(z)\big(4m^2 + 2n(k'k)\big) + 2Q^2 a^2 (J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z) - 2J_n^2(z) +$$

$$+2n \frac{J_n^2(z)}{z^2} (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)(qk + q'k) -$$

$$-4nQ \frac{J_n^2(z)}{z^2} (\alpha_1 (qa_1 + q'a_1) + \alpha_2 (qa_2 + q'a_2). \qquad (17)$$

Величины α_1, α_2, β_1 и β_2 в (17) вычислим в системе отсчета, в которой векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{k}$ направлены по осям x^1, x^2, x^3 соответственно [3]. В результате получим:

$$\alpha_1 = -Q \frac{(\vec{k}'\vec{a}_1)}{(q'k)}, \quad \alpha_2 = -Q \frac{(\vec{k}'\vec{a}_2)}{(q'k)}.$$

Величины β_1 и β_2 отличаются от α_1 и α_2 знаками, то есть:

$$\beta_1 = -\alpha_1, \quad \beta_2 = -\alpha_2.$$

Окончательное вычисление (17) с учетом α_1, α_2, β_1 и β_2 можно представить следующим образом:

$$\sum_{\lambda'} \left| M_{f_i}^{(n)} \right|^2 = Q^2 \big(4m^2 J_n^2(z) + 2m^2 \xi^2 (J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z) - 2J_n^2(z)\big), \qquad (18)$$

где $Q^2 a^2 = -m^2 \xi^2$.

Для определения вероятности излучения введем переменную $U = \frac{(kk')}{(kq')}$ и выполним интегрирование с учетом (18). В результате получим:

$$W = \sum_n W_n = \frac{Q^2 m^2}{8\pi q_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{U_n} \frac{dU}{(1+U)^2} \cdot \big(-2J_n^2(z) + \xi^2 (J_{n+1}^2(z) + +J_{n-1}^2(z) - 2J_n^2(z))\big), \qquad (19)$$

где $\frac{2n(kq)}{m_*^2} = U_n$.

Функции Бесселя зависят от переменной z, которая выражается через $U = \frac{(kk')}{(kq')}$ соотношением:

$$z = \frac{2nm^2\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sqrt{\frac{U}{U_n}\left(1-\frac{U}{U_n}\right)}.$$

В случае, когда $\xi \ll 1$ при вычислении W_n можно ограничиться вторым порядком по ξ. В этом приближении согласно (19) W_1 представляется так:

$$W_1 = \frac{Q^2m^2}{8\pi p_0}\xi^2\int_0^{U_1}\frac{dU}{(1+U)^2}\left(1-2\frac{U}{U_1}+2\frac{U^2}{{U_1}^2}\right). \quad (20)$$

Соотношение (20) согласуется с полным сечением комптоновского рассеяния на пионе. В самом деле, выполняя интегрирование в (20) и учитывая, следуя работе [3], что $\xi^2 = \frac{Q^2}{m^2}\frac{1}{\omega}$, получим:

$$W_1 = \frac{Q^4}{8\pi p_0\omega}\frac{1}{x}\left(4+\frac{x^2}{1+x}-2\left(1+\frac{2}{x}\right)\ln(1+x)\right), \quad (21)$$

где

$$x = \frac{s-m^2}{m^2}, \quad s = (k+p)^2.$$

Если W_1, определяемое (21), разделить на плотность тока, то полное сечение определяется так:

$$\sigma = \frac{W_1}{j} = \frac{Q^4}{4\pi m^2}\frac{1}{x^2}\left(4+\frac{x^2}{1+x}-2\left(1+\frac{2}{x}\right)\ln(1+x)\right). \quad (22)$$

3 Сечение комптоновского рассеяния на пионе в борновском приближении. Борновская амплитуда комптоновского рассеяния на пионе имеет вид [12]:

$$M_{f_i} = e_\mu^{(\lambda)}e_\nu^{(\lambda')*}T^{\mu\nu}, \quad (23)$$

где $e_\mu^{(\lambda)}$ и $e_\nu^{(\lambda')}$ – вектора поляризации начального и конечного фотона соответственно.

Тензор $T^{\mu\nu}$ в (23) в борновском приближении равен:

$$T^{\mu\nu} = 2Q^2\left(g^{\mu\nu}-\frac{2p_1^\mu p_2^\nu}{s-m^2}-\frac{2p_1^\nu p_2^\mu}{u-m^2}\right).$$

В этом выражении $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор, p_1 и p_2 – четырехмерные импульсы начального и конечного пионов, а кинематические переменные s и u определяются через импульсы $s = (k+p_1)^2$ и $u = (p_1-k')^2$.

Дифференциальное сечение, вычисленное на основе (23), выражается через инвариантные кинематические переменные [12]:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{4Q^4}{16\pi}\frac{(m^4-su)+m^4t^2}{(s-m^2)^2(u-m^2)^2}, \quad (24)$$

где $t = (k_1-k_2)^2$.

Выражение для $\frac{d\sigma}{dt}$ выражения (24) можно представить так:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q^4}{4\pi(s-m^2)^2}\left(1+2\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)+2\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2\right). \quad (25)$$

При получении (25) учтено, что $s+t+u = 2m^2$ для комптоновского рассеяния на пионе. Если использовать переменные $x = \frac{s-m^2}{m^2}$, $y = \frac{m^2-u}{m^2}$ дифференциальное сечение (25) принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q^4}{4\pi m^4 x^2}\left(1 + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2\right). \qquad (26)$$

где $dt = m^2 dy$.

Интегрируя (26) по y при фиксированном x, получим выражение для полного сечения комптовского рассеяния на пионе:

$$\sigma = \frac{Q^4}{4\pi m^4 x^2}\left(4 + \frac{x^2}{1+x} - 2\left(1 + \frac{2}{x}\right)\ln(1+x)\right). \qquad (27)$$

Таким образом, установлено, что полное сечение, рассчитанное с использованием W_1, определенного выражением (22), совпадает с полным сечением комптоновского рассеяния на пионе, вычисленное в борновском приближении (27).

Ограничиваясь в разложении (27) первым порядком по x, получим хорошо известное соотношение для полного сечения:

$$\sigma = \frac{Q^4}{(4\pi)^2 m^2}\frac{8\pi}{3}(1 - x). \qquad (28)$$

В системе покоя мишени (28) принимает вид:

$$\sigma = \frac{Q^4}{(4\pi)^2 m^2}\frac{8\pi}{3}\left(1 - 2\frac{\omega}{m}\right).$$

Список использованных источников

1 Волков, Д. М. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака / Д. М. Волков // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7. – С. 1286–1289.

2 Ритус, В. И. Квантовые эффекты при взаимодействии элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем / В. И. Ритус // Труды ФИАН. – 1968. – Т. 111. – Москва : Наука, 1979. – С. 5–151.

3 Берестецкий, В. Б. Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. – Москва : Наука, 1980. – 704 с.

4 Люлька, В. А. Распады элементарных частиц в поле интенсивной электромагнитной волны / В. А. Люлька // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 69. – 800 с.

5 Петрунькин, В. А. Двухфотонные взаимодействия элементарных частиц при малых энергиях / В. А. Петрунькин // Труды ФИАН. – 1968. – Т. 41. – С. 165–223.

6 Максименко, Н. В. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов / Н. В. Максименко, С. Г. Шульга // Ядерная физика. – 1990. – Т. 52. – Вып. 2 (8). – С. 524–534.

7 Максименко, Н. В. Феноменологическое описание поляризуемостей элементарных частиц в полевой теории / Н. В. Максименко, Л. Г. Мороз // Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике / ОИЯИ. – Дубна, 1979. – С. 533–543.

8 Андреев, В. В. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевом подходе / В. В. Андреев, Н. В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №4 (9). – С. 7–11.

9 Vakulina, E. V. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin–Kemmer–Petiau Formalism / E. V. Vakulina, N. V. Maksimenko // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2017. – Vol. 14, №. 5. – P. 713–718.

10 Andreev, V. V. Covariant equations of motion of a spin 1/2 particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities / V. V. Andreev, O. M. Deryuzhkova, N. V. Maksimenko // Russ. Phys. Journ. – 2014. – Vol. 56, №. 9. – P. 1069–1075.

11 Вакулина, Е. В. Точные решения волновых уравнений для частиц с дипольными поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны / Е. В. Вакулина, Н. В. Максименко // Журнал Белорусского государственного университета. Физика. – 2019. – № 1. – С. 12–18. – ISSN печатного издания: 2520-2243.

12 Holstein, B. R. Graviton Physics Holstein // American Journal of Physics. – 2006. – Vol. 74. – P. 1002–1011.