

РЕ

Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай
г. Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

**КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
С ОДНОМЕРНЫМ ОСЦИЛЛЯТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ
И ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ**

Введение. Одной из ключевых проблем, возникающих при исследовании квантовых составных систем на основании квазипотенциального подхода [1, с. 380, 2, с. 125],

является поиск решений уравнений, описывающих такие системы. В данной работе рассмотрен метод приближённого аналитического решения уравнения Логунова-Тавхелидзе с одномерным аналогом потенциала гармонического осциллятора:

$$V(\rho) = \omega^2 \rho^2, \quad -\infty < \rho < \infty, \quad (1)$$

где ω – константа связи, ρ – координата в одномерном релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [3, с. 656].

1. Одномерное уравнение Логунова-Тавхелидзе. В импульсном представлении одномерное уравнение Логунова-Тавхелидзе для связанных состояний системы двух скалярных частиц имеет следующий вид [4, с. 183]:

$$\psi(2E_q, p) = \frac{-m}{2\pi} G(E_q, p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{m^2 + k^2}} V(p, k) \psi(2E_q, k), \quad -\infty < p < \infty, \quad (2)$$

где величина $2E_q$ – энергия системы, p – относительный импульс, m – масса каждой частицы, $\psi(2E_q, p)$ – волновая функция, $V(p, k)$ – потенциал, $G(E_q, p)$ – функция Грина, имеющая форму

$$G(E_q, p) = (E_p^2 - E_q^2 - i0)^{-1}, \quad E_p = \sqrt{m^2 + p^2}. \quad (3)$$

В РКП уравнение (2) принимает следующий вид [5, с. 5331]:

$$\psi(\chi_q, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' G(\chi_q, \rho - \rho') V(\rho') \psi(\chi_q, \rho'), \quad -\infty < \rho < \infty, \quad (4)$$

где величина $\chi_q > 0$ связана с энергией $2E_q$ двухчастичной системы как

$$2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q, \quad (5)$$

$G(\chi_q, \rho - \rho')$ – функция Грина, $V(\rho)$ – потенциал. Входящие в уравнение (4) величины связаны с соответствующими величинами в импульсном представлении посредством интегрального преобразования [3, с. 660], которое в одномерном случае аналогично преобразованию Фурье [5, с. 5331]. Так, преобразование для потенциала имеет следующую форму:

$$V(p, k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \exp[-i(\chi - \chi')m\rho] V(\rho), \quad (6)$$

где χ (χ') – быстрота, связанная с импульсом p (k) по формуле $p = m \operatorname{sh} \chi$ ($k = m \operatorname{sh} \chi'$).

2. Задача Штурма-Лиувилля в импульсном представлении. Подстановка (1) в формулу (6) и последующее вычисление интеграла приводит к следующему выражению:

$$V(p, k) = -\frac{2\pi\omega^2}{m^3} \frac{d^2}{d\chi^2} \delta(\chi - \chi'). \quad (7)$$

Подстановка потенциала (7) в уравнение (2) и интегрирование с учётом свойств дельта-функции приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\omega^2}{m^2} \frac{d^2}{d\chi^2} \psi(\chi_q, \chi) = m^2 [\operatorname{ch}^2 \chi - \operatorname{ch}^2 \chi_q] \psi(\chi_q, \chi), \quad (8)$$

где выполнено переобозначение $\psi(2E_q, p) \Rightarrow \psi(\chi_q, \chi)$. Дополнив уравнение (8) граничными условиями

$$\psi(\chi_q, \chi) \Big|_{\chi \rightarrow \pm\infty} \cong 0, \quad (9)$$

получим задачу Штурма-Лиувилля (ЗШЛ). Условия (9) могут быть получены из интегрального уравнения (2).

3. Приближённое аналитическое решение ЗШЛ. Рассмотрим приближённое аналитическое решение ЗШЛ (8), (9). Разделим бесконечную область определения волновой функции на две подобласти: I) $\chi < 0$ и II) $\chi > 0$. Решение уравнения (8) будем искать отдельно в каждой из этих подобластей. Дополним функцию $\psi(\chi_q, \chi)$ в каждой из них соответствующим индексом I и II. При этом на решения в каждой из подобластей I и II будет налагаться лишь по одному из граничных условий (9). Таким образом, для решения обсуждаемой ЗШЛ нужны дополнительные условия. Введём условия сшивания для волновых функций и их первых производных на границе $\chi = 0$:

$$\psi_I(\chi_q, 0) = \psi_{II}(\chi_q, 0); \quad \psi'_I(\chi_q, 0) = \psi'_{II}(\chi_q, 0). \quad (10)$$

В подобласти I осуществим замену переменной $z = \omega^{-1}m^2 \exp(-\chi)/2$. Представим уравнение (8) и соответствующее граничное условие (9) в виде

$$\left[\left(z \frac{d}{dz} \right)^2 - z^2 + \frac{m^4}{2\omega^2} \operatorname{ch} 2\chi_q \right] \psi_I(\chi_q, z) = \frac{m^8}{16\omega^4} \frac{1}{z^2} \psi_I(\chi_q, z), \quad z \geq \omega^{-1}m^2/2, \quad (11)$$

$$\psi_I(\chi_q, z) \Big|_{z \rightarrow \infty} \cong 0. \quad (12)$$

Замена переменной $z = \omega^{-1}m^2 \exp(\chi)/2$ в подобласти II, приводит к аналогичному уравнению и граничному условию для волновой функции $\psi_{II}(\chi_q, z)$. Пренебрежём в обоих полученных уравнениях правой частью. Такое приближение оправдано, например, при больших значениях величины ω . Полученным в результате приближения уравнениям удовлетворяют модифицированные функции Бесселя [6, с. 13]. С учётом граничных условий решения представим в форме

$$\psi_I(\chi_q, z) = C_I K_{i_V}(z); \quad \psi_{II}(\chi_q, z) = C_{II} K_{i_V}(z), \quad (13)$$

где $K_{i_V}(z)$ – функция Макдональда [6, с. 13], C_I и C_{II} – неизвестные константы, величина V связана с величиной χ_q по формуле

$$V = m^2 / \omega \sqrt{1/2 \operatorname{ch} 2\chi_q}. \quad (14)$$

Подстановка функции (13) в условия сшивания (10) приводит к линейной системе однородных уравнений относительно величин C_I и C_{II}

$$\begin{pmatrix} K_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) & -K_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) \\ K'_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) & K'_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_I \\ C_{II} \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Условием существования ненулевого решения однородной системы является равенство нулю определителя её матрицы. Приравняв определитель матрицы системы (15) к нулю, мы получаем два трансцендентных уравнения для величины V

$$K_{i_{V+1}}(\omega^{-1}m^2/2) + K_{i_{V-1}}(\omega^{-1}m^2/2) = 0; \quad K_{i_V}(\omega^{-1}m^2/2) = 0. \quad (16)$$

Равенства (16) являются условиями квантования энергии. Численное решение уравнений (16) показывает, что их корни являются вещественными и они чередуются. При этом, наименьшее значение принимает корень первого уравнения. Обозначим корни первого из уравнений (16) как $v_q^{(2s)}$, а корни второго – $v_q^{(2s+1)}$, где $s = 0, 1, 2, \dots$ – номер состояния релятивистского гармонического осциллятора. Аналогичный верхний индекс введём для величин χ_q . Для определения приближённых значений энергии найденные $\chi_q^{(n)}$ должны быть затем подставлены в формулу (5).

С учётом введенных обозначений, приближённые волновые функции могут быть записаны в виде

$$\psi(\chi_q^{(2s)}, \chi) = C_I^{(2s)} K_{i\nu_{2s}} \left(\omega^{-1} m^2 \exp(|\chi|)/2 \right), \quad (17)$$

$$\psi(\chi_q^{(2s+1)}, \chi) = -\text{sgn}(\chi) C_I^{(2s+1)} K_{i\nu_{2s+1}} \left(\omega^{-1} m^2 \exp(|\chi|)/2 \right),$$

где $\text{sgn}(\chi)$ – функция знака, величины ν_n связаны с корнями $\chi_q^{(n)}$ согласно формуле (14). Константы $C_I^{(n)}$ могут быть найдены из условия нормировки волновых функций.

4. Численные результаты. Обсудим теперь результаты численных расчётов по найденным формулам. В таблице 1 приведены значения энергии. Они были получены двумя способами: численно – методом стрельбы [7, с. 320] и рассмотренным в этой работе методом при $m = 1$, для разных значений константы связи ω .

Таблица 1 – Значения энергии релятивистского гармонического осциллятора

Номер состояния	Численное решение	Приближённое решение
$\omega=1$		
0	2,9741627287	2,8942841821
1	4,4575152620	4,4340640700
2	5,7706817286	5,7495433152
3	6,9820603827	6,9688640519
4	8,1237806279	8,1116158608
$\omega=5$		
0	6,3274523548	6,3023457130
1	11,5099200672	11,5059921196
2	16,1610588266	16,1553709125
3	20,4845030635	20,4818426838
4	24,5863745919	24,5833876084
$\omega=10$		
0	9,9250292628	9,9113808547
1	18,7458717683	18,7441886720
2	26,8141909273	26,8110403639
3	34,3783383262	34,3770590345
4	41,5915699664	41,5899589097

Сравнение величин энергии, найденных численным решением ЗШЛ с соответствующими величинами, найденными приближённо аналитически, показывает, что с увеличением константы связи ω точность возрастает. Таким образом, приближённый метод более эффективен для решения при больших значениях ω .

На рисунке 1 приведены волновые функции первых четырёх состояний, построенные по формулам (17) при $m = 1$, $\omega = 5$. Номер графика равен номеру квантового состояния гармонического осциллятора.

Как видно на рисунке, особенностью волновых функций одномерного релятивистского гармонического осциллятора в импульсном представлении является равенство количества нулей номеру состояния. Аналогичным свойством обладают волновые функции в импульсном представлении трёхмерного релятивистского гармонического осциллятора [8, с. 1650], а также волновые функции в случае других типов взаимодействий, например, потенциалов однобозонного обмена [9, с. 438].

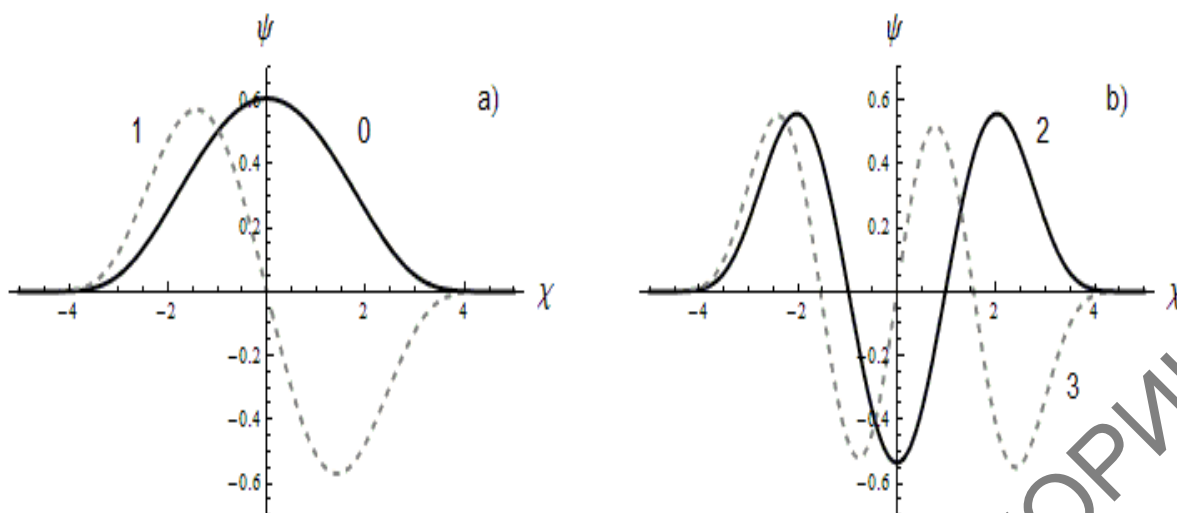


Рисунок 1 – Волновые функции:
 а) нулевого и первого состояний; б) второго и третьего состояний

Заключение. В работе получены решения уравнения Логунова-Тавхелидзе для одномерного гармонического осциллятора в релятивистском конфигурационном представлении. Интегральное уравнение в импульсном представлении было сведено к задаче Штурма-Лиувилля, решение которой было получено приближённо аналитически и численно. Приближённые волновые функции были выражены через функцию Макдональда мнимого индекса. При этом были получены трансцендентные уравнения для определения значений энергии релятивистского осциллятора.

Список использованных источников

- 1 Logunov, A. A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze // *Nuovo Cimento*. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
- 2 Kadyshevsky, V. G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V. G. Kadyshevsky // *Nucl. Phys.* – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.
- 3 Кадышевский, В. Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // *ЭЧАЯ*. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
- 4 Faustov, R. N. Relativistic wavefunction and form-factors of the bound system / R. N. Faustov // *Annals of physics*. – 1973. – Vol. 78, № 1. – P. 176–189.
- 5 Kapshai, V. N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ -potentials / V. N. Kapshai, T. A. Alferova // *J. Phys. A*. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.
- 6 Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1974. – Т. 2. – 296 с.
- 7 Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
- 8 Grishechkin, Yu. A. Solution of the Logunov-Tavkhelidze equation for the three-dimensional oscillator potential in the relativistic configuration representation / Yu. A. Grishechkin, V. N. Kapshai // *Russian Physics Journal*. – 2018. – Vol. 61, № 9. – P. 1645–1652.
- 9 Grishechkin, Yu. A. Numerical solution of relativistic problems on bound states of systems of two spinless particles / Yu. A. Grishechkin, V. N. Kapshai // *Russian Physics Journal*. – 2013. – Vol. 56, № 4. – P. 435–443.