УДК 517.9

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, Н.А. Старовойтова

Асимптотика поведения строчных аппроксимаций Паде функций Маркова

Рассматриваются функции Маркова, порожденные положительными борелевскими мерами степенного типа. В частности, установлены асимптотические равенства для их уклонений от строчных аппроксимаций Паде. Это позволило найти точные порядковые оценки убывания наилучших рациональных приближений с фиксированным числом полюсов марковских функций рассматриваемого типа. Полученные теоремы дополняют

результаты А.А. Пекарского, Е.А. Ровбы, В.Н. Русака и др. авторов, относящиеся к исследованию аппроксимационных свойств функций Маркова.

1. Введение

Пусть ν — положительная борелевская мера, носитель которой $\operatorname{supp}\nu$ — компактен и принадлежит $\mathbb{R}$. Тогда аналитическую функцию

$$\widehat{\nu}(z) = \int \frac{d\nu(t)}{t-z}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp}\nu$$

называют функцией Маркова меры ν. Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}$ множество всех рациональных функций вида $p_n(z)/q_m(z)$, где p_n и q_m — многочлены степени, не выше n и m соответственно. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ и f непрерывна на K. Через $R_{n,m}(f;K)$ будем обозначать наилучшие равномерные приближения f на K элементами из $\mathcal{R}_{n,m}$, т.е.

$$R_{n,m}(f;K) = \inf\{\|f-r\|_K : r \in \mathcal{R}_{n,m}\},$$

где $\|g\|_K = \max\{|g(z)| : z \in K\}$. В частности, $E_n(f;K) := R_{n,0}(f;K)$ и $R_n(f;K) := R_{n,n}(f;K)$ — наилучшие полиномиальные и рациональные приближения f.

Порядки убывания $R_n(\widehat{\nu};K)$ для компактов K, не пересекающихся с отрезками, содержащими носитель меры $\operatorname{supp}\nu$, впервые были получены в работе А.А. Гончара [1]. Этим вопросам посвящены также статьи Т. Ганелиуса [2], Г. Шталя [3], Д. Браесса [4]. При этом в качестве K берется компакт, симметричный относительно $\mathbb{R}$. В случае пересечения носителя меры $\operatorname{supp}\nu$ и компакта K в одной или нескольких точках порядки убывания $R_n(\widehat{\nu};K)$ вначале были найдены для индивидуальных функций, позднее — для классов функций, в работах Я. Андерссона, А.А. Пекарского и других авторов (см., например, [5], [6]). В [5] и [6] K есть отрезок $[-1,1]$ или круг $D=\{z : |z| \leqslant 1\}$, а мера ν удовлетворяет следующим условиям: $\operatorname{supp}\nu = [1,a],\ a>1,\ b>0$,

$$d\nu(t) = \varphi(t)dt, \ \ \varphi(t) \asymp (t-1)^b \ \text{ при } \ 1 \leqslant t \leqslant a. \tag{1}$$

В [6] изучались также и свойства наилучших рациональных приближений $R_{n,m}(\widehat{\nu};K)$[1]. В частности, доказано

[1]При $n \neq m$ задача нахождения точных порядковых оценок для $R_{n,m}(\widehat{\nu};D)$ в работах [1]– [6] не рассматривалась.

Утверждение 1. *Если меры λ и ν с носителем на $[1,a]$, $a>1$, удовлетворяют условиям: $d\lambda(t)\leqslant d\nu(t)$ на $[1,a]$ и $\int(t-1)^{-1}d\nu(t)<\infty$, то при $n\geqslant m$*

$$R_{n,m}(\widehat{\lambda};D)\leqslant 8\,R_{n,m}(\widehat{\nu};D). \tag{2}$$

Отметим также работы А.А. Пекарского, Е.А. Ровбы [7] и Н.С. Вячеславова [8]. В первой из них при ограничениях (1) на меру ν установлены порядки уклонений от $\widehat{\nu}$ ортопроекций $\widehat{\nu}$ на $\mathcal{R}_{n,n}$[2], а во второй при аналогичных условиях на ν изучается рациональная аппроксимация $\widehat{\nu}$ в пространствах Харди H^p, $0<p\leqslant\infty$.

Далее предполагаем, что $d\mu(x)=\varphi(x)dx$, а

$$\varphi(x)=\frac{1}{B(\alpha,\gamma-\alpha)}\;x^{\alpha-1}\;(1-x)^{\gamma-\alpha-1},\quad 0<x<1,$$

где $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma>\alpha>0$, $\gamma-\alpha\in\mathbb{N}$, $B(\cdot;\cdot)$ — бета-функция Эйлера. При этих условиях определим функцию Маркова

$$\widehat{\mu}(z)=\widehat{\mu}_{\gamma,\alpha}(z)=\int\frac{d\mu(x)}{1-xz},$$

аналитическую в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{1\leqslant x<\infty\}$. Рассмотренной в [5] и [6] ситуации соответствуют значения параметров $\gamma=b+2,\alpha=1$, $b>0$. В данной статье найдены точные порядки убывания строчных последовательностей таблицы Чебышева $[R_{n,m}(\widehat{\mu};D_q)]_{n,m=0}^{\infty}$, где $D_q=\{z:|z|\leqslant q<1\}$. В отличие от работ [1] и [6], где применяются многоточечные аппроксимации Паде, в качестве приближающих рациональных функций для $\widehat{\mu}$ выбраны классические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z;\widehat{\mu})=p_n(z;\widehat{\mu})/q_m(z;\widehat{\mu})$, т.е. рациональные функции из $\mathcal{R}_{n,m}$, числитель и знаменатель которых удовлетворяют условию

$$q_m(z;\widehat{\mu})\,\widehat{\mu}(z)-p_n(z;\widehat{\mu})=O\left(z^{n+m+1}\right),\quad z\to 0.$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Для любого фиксированного $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ локально равномерно по $|z|<1$ при $n\to\infty$*

$$\widehat{\mu}(z)-\pi_{n,m}(z;\widehat{\mu})=L_{n,m}\frac{\psi_{n,m}(z)}{(1-z)^m}\,z^{n+m+1}\left(1+o(1)\right),$$

[2]Близкая задача приближения функций Стилтьеса на действительной оси ортопроекторами на $\mathcal{R}_{2n,2n}$ исследовалась В.Н. Русаком и Е.А. Ровбой в работе [9].

где $L_{n,0} = (\alpha)_{n+1}/(\gamma)_{n+1}$,

$$L_{n,m} = m!\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}}\prod_{k=1}^{m}\frac{\gamma-\alpha+k-1}{(\gamma+n+k-1)_2},\ \text{при } m \geqslant 1,$$

$$\psi_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(\gamma+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(m+\gamma-\alpha)}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-t})^{m+\gamma-\alpha-1}e^{-(n+\alpha+1)t}dt}{(1-ze^{-t})^{m+1}},$$

Γ — *гамма-функция Эйлера*, $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k-1)$ *при* $k \geqslant 1$.

Будем говорить, что бесконечно малые величины α_n и β_n имеют одинаковый порядок ($\alpha_n \asymp \beta_n$), если существуют такие положительные постоянные A и B, что $A\alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant B\alpha_n$. Бесконечно малые α_n и β_n будем называть эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\lim_{n\to\infty}\alpha_n/\beta_n = 1$.

Теорема 2. *Для любого фиксированного* $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *при* $n\to\infty$

$$\frac{(1-|o(1)|)}{(1+q)^{2m+1}} \leqslant \frac{R_{n,m}(\widehat{\mu};D_q)}{q^{n+m+1}L_{n,m}} \leqslant \frac{(1+|o(1)|)}{(1-q)^{2m+1}},$$

$$R_{n,m}(\widehat{\mu};D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}} \asymp \frac{q^m}{n^{2m}}E_n(\widehat{\mu};D_q).$$

Полагая $\gamma = 2$, $\alpha = 1$, получим $d\mu(t) = dt$, $0 < t < 1$, и

$$\widehat{\mu}_{2,1}(z) = z^{-1}\ln(1-z)^{-1}.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$R_{n,m}(\widehat{\mu}_{2,1};D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+1}} \asymp \frac{q^m}{n^{2m}}R_{n,0}(\widehat{\mu}_{2,1};D_q).$$

Последние соотношения можно также получить, основываясь на результатах работы [12].

Из теоремы 2 и утверждения 1 вытекает

Теорема 3. *Пусть* $d\lambda(x) = \psi(x)dx$, *а* $\psi(x) \asymp \varphi(x)$ *при* $0 < x < 1$. *Тогда при любом фиксированном* m *и* $n\to\infty$

$$R_{n,m}(\widehat{\lambda};D_q) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}} \asymp \frac{q^m}{n^{2m}}E_n(\widehat{\lambda};D_q).$$

2. Аппроксимации Паде функции Маркова

Прежде всего, заметим (см., например, [10], § 6), что

$$\widehat{\mu}(z) = {}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z), \ z \in \mathbb{C}\backslash[1, +\infty),$$

где ${}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция, при $|z| < 1$ представимая в виде

$$ {}_2F_1(1, \alpha, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n. \tag{3}$$

Обозначим через $f_n = (\alpha)_n/(\gamma)_n$ коэффициенты ряда (3) и рассмотрим определители Адамара

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}.$$

Многочлены Паде $p_n(z; \widehat{\mu})$ и $q_m(z; \widehat{\mu})$ (см. [11]) находятся с точностью до постоянного множителя. Будем называть стандартной такую их нормировку, при которой $q_m(0; \widehat{\mu}) = D_{n,m}$. Рассмотрим также определители

$$D_{n,m,k} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \cdots & f_{n+m+k-1} & f_{n+m+k} \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. *Если $n \geqslant m \geqslant 2$, то*

$$D_{n,m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{(\alpha)_{n-m+i}}{(\gamma)_{n-m+i}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{m-1} (\gamma - \alpha + i - 1)^{m-i} (m-i)!}{\prod\limits_{j=1}^{m-1} \prod\limits_{i=j}^{m-1} (\gamma + n - i + 2j - 2)_2}, \tag{4}$$

$$D_{n,m,k} = \prod_{i=0}^{m} \frac{(\alpha)_{n+k+i}}{(\gamma)_{n+k+i}} \prod_{i=1}^{m} (k + i - 1) \frac{(\gamma + n - m + i + 1)_{m+k-2}}{(\alpha + n - m + i)_{m+k}}.$$

$$\cdot \frac{(\gamma-\alpha)^m \prod\limits_{i=1}^{m-1} (\gamma-\alpha+i-1)^{m-i} (m-i)!}{\prod\limits_{j=1}^{m-1} \prod\limits_{i=j}^{m-1} (\gamma+n-i+2j-2)_2}. \qquad (5)$$

Равенства (4) доказаны в [11] (см. § 2.1, формула (1.6)). Доказательство равенств (5) проводится аналогично. При $\alpha = 1$ и $\gamma = 2$ соотношения (4), (5) другим методом получены в работе [12]. Заметим также, что $D_{n,m,1} = D_{n+1,m+1}$. По определению полагаем $D_{n,0} = 1$, $D_{n,1} = f_n$, $D_{n,0,k} = f_{n+k}$. Равенства (5) справедливы и при $m = 1$, если считать в них последний множитель равным $\gamma - \alpha$.

Из (4) и (5) с помощью несложных преобразований получаем, что

$$L_{n,m} = \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}}\, m! \prod_{i=1}^{m} \frac{(\gamma-\alpha+i-1)}{(\gamma+n+i-1)_2}, \qquad (6)$$

$$\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} = \frac{(k)_m}{m!} \frac{(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}. \qquad (7)$$

Лемма 2. *Для любого фиксированного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ локально равномерно по всем $|z| < 1$ при $n \to \infty$*

$$q_m(z;\widehat{\mu}) = D_{n,m}\,(1-z)^m\,(1+o(1))\,. \qquad (8)$$

Доказательство. Представим многочлен $q_m(z;\widehat{\mu})$ в виде

$$q_m(z;\widehat{\mu}) = \sum_{j=0}^{m} l_j z^j.$$

Согласно равенству (1.8) из [11], для любых $n \geqslant m$ и $j \geqslant 1$ получим

$$(-1)^j\, l_j = D_{n,m}\, C_j^m \prod_{i=1}^{j} \frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i},$$

где $C_j^m = m!/((m-j)!j!)$ — биномиальные коэффициенты. Тогда, принимая во внимание, что $l_0 = D_{n,m}$, для любого $|z| < 1$

$$D_{n,m}\,(1-z)^m - q_m(z;\widehat{\mu}) = D_{n,m} \sum_{j=1}^{m} C_j^m (-z)^j \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{j} \frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i} \right\}.$$

Поскольку

$$0 \leqslant 1 - \prod_{i=1}^{j} \frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i} \leqslant 1 - \left(\frac{\alpha+n-j+1}{\gamma+n+m-j}\right)^{j} \leqslant$$

$$\leqslant j\left(1 - \frac{\alpha+n-j+1}{\gamma+n+m-j}\right) \leqslant m\,\frac{m+\gamma-\alpha}{n},$$

то, учитывая предыдущее равенство, будем иметь

$$|D_{n,m}\,(1-z)^m - q_m(z;\widehat{\mu})| \leqslant$$

$$\leqslant D_{n,m}\frac{(\gamma-\alpha+m)\,m}{n}\sum_{j=0}^{m} C_j^m\,|z|^j = \frac{(m+\gamma-\alpha)\,m\,(1+|z|)^m}{n} D_{n,m}.$$

Отсюда для любого $z \in D$

$$q_m(z;\widehat{\mu}) = D_{n,m}(1-z)^m\left(1 + B_{n,m}(z)\right),$$

где

$$|B_{n,m}(z)| \leqslant \frac{(m+\gamma-\alpha)\,m\,(1+|z|)^m}{n\,(1-|z|)^m}.$$

Из последних двух соотношений и следует утверждение леммы 2. $\square$

Лемма 3. *При* $n \geqslant m$ *и* $|z| < 1$

$$q_m(z;\widehat{\mu})\,\widehat{\mu(z)} - p_n(z;\widehat{\mu}) = D_{n,m,1}\,\psi_{n,m}(z)\,z^{n+m+1}. \tag{9}$$

Доказательство. Согласно теореме Паде ([11], глава 1, § 1.1, формула (1.11)), при выбранной нормировке многочленов Паде

$$q_m(z;\widehat{\mu})\,\widehat{\mu} - p_n(z;\widehat{\mu}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k}\,z^{n+m+k} = D_{n,m,1}\,z^{n+m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}\,z^{k-1}.$$

Нетрудно показать, что при $\gamma - \alpha \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\frac{(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}} = \prod_{j=1}^{m+\gamma-\alpha}\frac{\alpha+n+j}{\alpha+n+k+j-1}.$$

Поэтому, учитывая (7), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}\, z^{k-1} = (\alpha+n+1)_{m+\gamma-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k)_m}{m!}\, \frac{z^{k-1}}{(\alpha+n+k)_{m+\gamma-\alpha}}. \quad (10)$$

Ряд в правой части последнего равенства можно просуммировать. Для этого при $|z| < 1$ определим функцию

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\alpha+n-m+k+1)(\alpha+n-m+k+2)\dots(\gamma+n+k).}$$

Заметим, что

$$\frac{\varphi^{(m)}(z)}{m!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k)_m}{m!}\, \frac{z^{k-1}}{(\alpha+n+k)_{m+\gamma-\alpha}}, \quad (11)$$

и

$$\left(z^{n+\gamma}\, \varphi(z)\right)^{(m+\gamma-\alpha)} = z^{n-m+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{z^{n-m+\alpha}}{1-z}.$$

Из последнего равенства находим, что

$$z^{n+\gamma}\, \varphi(z) = \frac{1}{\Gamma(m+\gamma-\alpha)} \int_0^z (z-u)^{m+\gamma-\alpha-1}\, \frac{u^{n-m+\alpha}}{1-u}\, du.$$

Сделав в предыдущем интеграле замену $u = ze^{-t}$, получим, что

$$\varphi(z) = \frac{1}{\Gamma(m+\gamma-\alpha)} \int_0^{\infty} (1-e^{-t})^{m+\gamma-\alpha-1}\, \frac{e^{-(n-m+\alpha+1)t}}{1-ze^{-t}}\, dt.$$

И, следовательно,

$$\varphi^{(m)}(z) = \frac{m!}{\Gamma(m+\gamma-\alpha)} \int_0^{\infty} (1-e^{-t})^{m+\gamma-\alpha-1}\, \frac{e^{-(n+\alpha+1)t}}{(1-ze^{-t})^{m+1}}\, dt.$$

Из (10), (11) и последнего равенства, с учетом того, что $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$, окончательно получаем (9). Лемма 3 доказана. $\square$

Замечание 1. *Если $\gamma - \alpha > 1$, то равенство (9) справедливо также и на границе круга D, в частности, при $z = 1$.*

Действительно, в этом случае функции $\widehat{\mu}(z)$ и $\psi_{n,m}(z)$ непрерывны в круге D.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Утверждение теоремы 1 следует из лемм 2, 3 и равенства (6). Поэтому переходим к доказательству теоремы 2.

Лемма 4. *При фиксированном* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $n \to \infty$

$$I_{n,m} = \int\limits_0^\infty \left(1 - e^{-t}\right)^{m+\gamma-\alpha-1} \; e^{-(n+\alpha+1)t}\, dt \sim$$

$$\sim \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(m+\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n+m+1)}. \qquad (12)$$

Доказательство. Применяя формулу Стирлинга, получим, что при $n \to \infty$

$$\frac{\Gamma(\gamma+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \sim \left(\frac{\gamma+n+m}{\alpha+n}\right)^{n+\alpha} (\gamma+n+m)^{m+\gamma-\alpha}\, e^{-(m+\gamma-\alpha)} \sim$$

$$\sim (\gamma+n+m)^{m+\gamma-\alpha}. \qquad (13)$$

Поскольку $e^t - 1 > t$ при $t > 0$, то

$$I_{n,m} = \int\limits_0^\infty \left(e^t - 1\right)^{m+\gamma-\alpha-1} \; e^{-(n+m+\gamma)t}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^\infty t^{m+\gamma-\alpha-1} \; e^{-(n+m+\gamma)t}\, dt = \frac{\Gamma(m+\gamma-\alpha)}{(n+m+\gamma)^{m+\gamma-\alpha}}. \qquad (14)$$

Разбив область интегрирования в $I_{n,m}$ на два промежутка: $[0,1]$ и $[1,\infty)$, представим $I_{n,m}$ в виде $I_{n,m} = I_1 + I_2$, где I_1 и I_2 — интегралы по соответствующим промежуткам. Так как при $t \in [0,1]$ $1 - e^{-t} \leqslant t$, то

$$I_1 \leqslant \int\limits_0^1 t^{m+\gamma-\alpha-1} \; e^{-(n+m+\gamma)t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty t^{m+\gamma-\alpha-1} \; e^{-(n+m+\gamma)t}\, dt = \frac{\Gamma(m+\gamma-\alpha)}{(n+m+\gamma)^{m+\gamma-\alpha}}. \qquad (15)$$

Далее,

$$I_2 = \int\limits_1^\infty \left(e^t - 1\right)^{m+\gamma-\alpha-1} e^{-(n+m+\gamma)t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_1^\infty e^{-(n+\alpha+1)t}\, dt = \frac{e^{-(n+\alpha+1)}}{n+\alpha+1}.$$

Теперь из соотношений (13)–(15) и последнего неравенства получаем (12). Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *При фиксированном* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $n \to \infty$ *локально равномерно по всем* $|z| < 1$

$$\frac{(1 - |o(1)|)}{(1+|z|)^{m+1}} \leqslant |\psi_{n,m}(z)| \leqslant \frac{(1 + |o(1)|)}{(1-|z|)^{m+1}}. \qquad (16)$$

Доказательство. Лемма 5 является очевидным следствием леммы 4. □

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \widehat{\mu}(z) - \pi_{n,m}(z;\widehat{\mu})$. Из теоремы 1 следует, что при достаточно больших n φ является аналитической внутри круга D_{q_1}, $0 < q < q_1 < 1$, и имеет в D_q нуль кратности $n + m + 1$. Учитывая неравенства (16), для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\min_{|z|=q} |\varphi(z)| \leqslant R_{n,m}(\widehat{\mu}; D_q) \leqslant \max_{|z|=q} |\varphi(z)|. \qquad (17)$$

Поскольку правое неравенство в (17) вполне очевидно, докажем только левое неравенство. Для этого нам необходима следующая лемма Гончара—Дзядыка (см. [13], лемма 3.1).

Лемма 6. *Если аналитическая в односвязной области* G *и непрерывная на* $\overline{G}$ *функция* φ *имеет в* G *с учетом кратности, по крайней мере,* $n+1$ *нуль, то при произвольном* $m \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$R_{n,m}(\varphi; \overline{G}) \geqslant \min_{z \in \partial G} |\varphi(z)|.$$

Пусть $r^*_{n,m} \in \mathcal{R}_{n,m}$ и является рациональной функцией наилучшего равномерного приближения $\widehat{\mu}$ в круге D_q. Тогда

$$R_{n,m}(\widehat{\mu}; D_q) = \left\|\widehat{\mu} - r^*_{n,m}\right\|_{D_q} = \left\|\widehat{\mu} - \pi_{n,m} - (r^*_{n,m} - \pi_{n,m})\right\|_{D_q} =$$

$$= \|\varphi - \widetilde{r}_{n+m,\,2m}\|_{D_q} \geqslant R_{n+m,\,2m}(\varphi; D_q).$$

Из леммы 6 следует, что

$$R_{n+m,\,2m}(\varphi; D_q) \geqslant \min_{|z|=q} |\varphi(z)|.$$

Тем самым неравенство (17) доказано.

Список литературы

[1] *Гончар, А.А.* О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций / А.А. Гончар // Мат. сборник. – 1978. – Т. 105(147). – № 2. – С. 147–163.

[2] *Ganelius, T.* Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function / T. Ganelius // Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turan). – Basel: Birkhäuser Verlag, 1978. – P. 237–243.

[3] *Stahl, H.* Best Rational Approximants to Markov Functions / H. Stahl // Colloquia Math. Soc János Bolai. Recskemet (Hungary). – 1990. – Vol. 58. – P. 627–643.

[4] *Braess, D.* Rational Approximation of Stieltjes by the Caratheodory—Fejer Method / D. Braess // Constr. App. – 1987. – Vol. 3. – P. 43–50.

[5] *Andersson, J.-E.* Rational approximation to function like x^α in integral norms / J.-E. Andersson // Anal. math. – 1988. – Vol. 14. – N. 1. – P. 11–25.

[6] *Пекарский, А.А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7. – № 2. – С. 121–132.

[7] *Пекарский, А.А.* Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций / А.А. Пекарский, Е.А. Ровба // Мат. заметки. – 1999. – Т. 65. – № 3. – С. 362–368.

[8] *Вячеславов, Н.С.* Рациональные приближения функций типа Маркова—Стилтьеса в пространствах Харди H^p, $0 < p \leqslant \infty$ / Н.С. Вячеславов // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 2008. – № 4. – С. 3–13.

[9] *Русак, В.Н.* Рациональная аппроксимация функций Стилтьеса на действительной оси / В.Н. Русак, Е.А. Ровба // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2007. – № 4. – С. 4–9.

[10] *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

[11] *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 504 с.

[12] *Старовойтов, А.П.* Об асимптотике строк таблицы Паде аналитических функций с логарифмическими точками ветвления / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Мат. заметки. – 2008. – Т. 84. – № 3. – С. 409–419.

[13] *Дзядык, В.К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ / В.К. Дзядык // Мат. сборник. – 1979. – Т. 108(150). – № 2. – С. 247–267.

Старовойтов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, доцент, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь, svoitov@gsu.by.

Рябченко Наталия Валерьевна, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь, svoitov@gsu.by.

Старовойтова Наталья Александровна, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь, svoitov@gsu.by.