МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА-ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

HERMITE-PADE APPROXIMANTS OF THE SYSTEM MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS

A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе изучаются асимптотические свойства интегралов Эрмита. В частности, при $j=1,2,...,k$ и $n\to\infty$ найдены асимптотики диагональных аппроксимаций Эрмита-Паде $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{j\xi})$ для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$. Аналогичные результаты получены и для системы вырожденных гипергеометрических функций $\left\{{}_1F_1(1,\gamma;jz)\right\}_{j=1}^k$.

***Ключевые слова**: интегралы Эрмита, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита-Паде, асимптотические равенства.*

The paper deals with asymptotic properties of Hermite integrals. In particular, the asymptotics of diagonal Hermite-Pade approximations $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{j\xi})$ for the system of exponents $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ are determined when $j=1,2,...,k$ and $n\to\infty$. Similar results are proved for the system of confluent hypergeometric functions $\left\{{}_1F_1(1,\gamma;jz)\right\}_{j=1}^k$.

***Keywords**: Hermite integrals, joint Pade approximations, Hermite-Pade approximations, asymptotic equality.*

Введение

Рассмотрим набор вырожденных гипергеометрических функций

$$F_\gamma^j(z) = {}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p}z^p,\ j=1,2,...,k, \tag{0.1}$$

где γ – произвольное комплексное число, отличное от $0,-1,-2,...,$ $(\gamma)_0=1,$ $(\gamma)_p=\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1),$ $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа. Принимая во внимание равенство $(\gamma)_p=\Gamma(\gamma+p)/\Gamma(p),$ где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, видим, что гипергеометрические функции (0.1) являются функциями Миттаг-Леффлера [1, гл. 5, § 2.7, равенство 16]. При $\gamma=1$ набор (0.1) представляет собой систему экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

В данной статье исследуется асимптотика совместных приближений функций (0.1) рациональными дробями с общим знаменателем (аппроксимациями Эрмита-Паде). Впервые такие конструкции рациональных функций (для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$) рассматривались Ш. Эрмитом [2] в связи с доказательством трансцендентности числа *e*. Строгое определение появилось позже [3], [4]. В настоящее время интерес к таким аппроксимациям значительно возрос [5]–[9].

Традиционными приложениями аппроксимаций Эрмита-Паде являются теория аппроксимации аналитических функций [10], [11] и теория диофантовых приближений чисел [12]. В частности, они активно применяются в исследованиях алгебраической природы математических констант (значений дзета функции Римана в натуральных точках, постоянной Эйлера и др. [12]). Вместе с тем, совместные рациональные аппроксимации оказались полезными в спектральной теории несимметричных разностных операторов [13], [14] и в теории случайных матриц [15]–[17].

Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n,$ $m_1,$ $m_2,...,m_k$. По определению полагаем $m=\sum_{i=1}^k m_i,$ $n_j=n+m-m_j,$ $j=1,2,...,k.$ Известно [4], что для любого набора $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$ голоморфных в нуле функций при $j=1,2,...,k$ существуют такие многочлены $Q_m(z),$ $P_{n_j}^j(z),$ $degQ_m\le m,$ $degP_{n_j}^j\le n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1}+.... \tag{0.2}$$

Если $k=1,$ то согласно теореме Паде [3, теорема 1.1.1] многочлены $Q_m(z),$ $P_n^1(z)$ определяются с точностью до однородной константы,

© Старовойтов А.П., 2013

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z,f_1)=P_n^1(z)/Q_m(z)$, которую называют *аппроксимацией Паде* для $f_1(z)$.

При $k\geq 2$ дроби

$$\pi_{n,m}^j(z)=\pi_{n_j,m}^j(z;f_j)=P_{n_j}^j(z)/Q_m(z),\quad j=1,2,...,k$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ его элементы называют *аппроксимациями Эрмита-Паде* (*совместными аппроксимациями Паде*) для системы функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$. Единственность имеет место, например, для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [4]). В частности, при $\gamma=1$ система $F_1^j(z)=e^{\lambda_j z}$, $j=1,2,...,k$ является совершенной [4, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом.

Эрмит [2] ввел в рассмотрение интегралы, которые после небольших преобразований [4] приводят к решению системы (0.2) для набора экспонент $\{F_1^j(z)=e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$:

$$Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}[x^n\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx,$$

$$P_{n_j}^j(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty}[x^n\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx,\quad (0.3)$$

$$R_{n,m}^j(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}[x^n\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx.$$

В первых двух интегралах (0.3) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $Re z>0$. При $Re z\leq 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^j(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

При $\lambda_j=j$, $j=1,2,...,k$ и $n=m_1=m_2=$ $=...=m_k$ значения $Q_m(1)$, $P_{n_j}^j(1)$ являются рациональными числами и легко вычисляются, а $R_{n,m}^j(1)$ убывает к нулю при $n\to\infty$. Эти и другие свойства интегралов (0.3) были виртуозно использованы Эрмитом для обоснования трансцендентности числа e [2], [18]. Несколько усложнив рассуждения Эрмита, Линдеман (1882 год) доказал трансцендентность числа π, решив, тем самым, одну из самых старых задач математики – «задачу о квадратуре круга». Предложенное им доказательство [18] существенно опирается на соответствующие свойства интегралов (0.3), порожденных системой функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные алгебраические числа.

Важным стимулом для дальнейшего изучения свойств интегралов Эрмита (0.3) стала задача Е.М. Никишина об исследовании сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде для системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [19], который описал асимптотику поведения первого из интегралов в (0.3) и, опираясь на полученный результат, показал, что при $n+m\to+\infty$ для любого $j=1,2,...,k$ $\pi_{n_j,m}^j(z;e^{\lambda_j\xi})$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ к $e^{\lambda_j z}$. Ранее при $k=1$ равномерная сходимость $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z была доказана Перроном [20].

В [21] А.И. Аптекарев существенно обобщил предыдущие результаты. Он установил, что система $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$ является совершенной при произвольном $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$, кроме того, для фиксированных n и m_j таких, что $n\geq m_j-1$, $j=1,2,...,k$, общий знаменатель $\widetilde{Q}_m(z)$ и остаток $\widetilde{R}_{n,m}^j(z)$ в этом случае имеют вид:

$$\widetilde{Q}_m(z)=\frac{z^{kn+n+\gamma}}{\Gamma(kn+n+\gamma)}\times\int_0^{\infty}[x^{n+\gamma-1}\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx,\quad (0.4)$$

$$\widetilde{R}_{n,m}^j(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{kn+n+1}}{(\lambda_j)^{\gamma-1}(\gamma)_{kn+n}}\times\int_0^{\lambda_j}[x^{n+\gamma-1}\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx,\quad (0.5)$$

где интегралы имеют тот же смысл, что и в формулах (0.3). В [21], в частности, показано, что при $|z|\leq L$ и $n+m\to+\infty$

$$\widetilde{Q}_m(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k\lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1}z\right\}\times\left(1+O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right).\quad (0.6)$$

Здесь и далее L – положительная постоянная.

Из (0.6) вытекает [21] равномерная сходимость $\pi_{n_j,m}^j(z;F_\gamma^j)$ к $F_\gamma^j(z)$ на компактах в $\mathbb{C}$ при $n+m\to+\infty$ и $j=1,2,...,k$.

В данной работе изучаются асимптотические свойства обобщенных интегралов Эрмита, определяющих в (0.5) функции $\widetilde{R}_{n,m}^j(z)$. В частности, при $n=m_1=m_2=...=m_k$ и $n\to\infty$ для произвольного набора $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ различных и отличных от нуля действительных чисел найдена асимптотика аппроксимаций Эрмита-Паде для системы функций Миттаг-Леффлера $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$.

В случае, когда $k=1$ и $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,...\}$ асимптотические свойства аппроксимаций Паде

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$\pi_{n,m}(z;F_\gamma)$ функций $F_\gamma(z)=F_\gamma^1(z)={}_1F_1(1,\gamma;z)$ исследовались в [22]. В этой работе установлено, что для любого $z\in\mathbb{C}$, $|z|\le L$ при $m\le n$ и $n+m\to\infty$

$$F_\gamma(z)-\pi_{n,m}(z;F_\gamma)= \\ =(-1)^m\frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}z^{n+m+1}(1+o(1)). \quad (0.7)$$

При $\gamma=1$ равенство (0.7) ранее было доказано Д. Браессом [23].

Первый результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита-Паде к набору из двух марковских функций был получен В.А. Калягиным [24]. Главный член асимптотики, а также сходимость аппроксимаций Эрмита-Паде для набора марковских функций, порожденных системой Анжелеско, были исследованы в работе А.А. Гончара и Е.А. Рахманова [25]. Вопросы единственности, а также свойства главного члена асимптотики аппроксимаций Эрмита-Паде марковских функций для системы Никишина интенсивно исследовались рядом авторов [26]–[32]. Отметим также работы А.И. Аптекарева [33], [34] и А.И. Аптекарева с соавторами [35], [36], в которых рассматривались близкие задачи.

1 Формулировка основных результатов

Далее, считаем, что $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – отличные от нуля различные действительные числа. Обозначим через $\{\lambda_j^*\}_{j=0}^k$ множество чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^k\cup\{0\}$, занумерованных в порядке возрастания, т. е. $\lambda_0^*<\lambda_1^*<\ldots<\lambda_k^*$, и определим функции:

$$\varphi(x)=(x-\lambda_0^*)(x-\lambda_1^*)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k^*)= \\ =x(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k),$$

$$S(x)=\ln\left((-1)^{k+i+1}\varphi(x)\right), x\in(\lambda_{i-1}^*,\lambda_i^*),$$

$$S(\lambda_i)=-\infty, i=0,1,\ldots,k.$$

Многочлен $\varphi(x)$ имеет нули в точках $\lambda_0^*,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*$. Следовательно, на каждом из интервалов $(\lambda_0^*,\lambda_1^*),(\lambda_1^*,\lambda_2^*),\ldots,(\lambda_{k-1}^*,\lambda_k^*)$ производная $\varphi'(x)$ обращается в ноль. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_k$ – нули $\varphi'(x)$, занумерованные в порядке возрастания, т. е. $x_i\in(\lambda_{i-1}^*,\lambda_i^*)$, $i=1,2,\ldots,k$. Так как $deg\,\varphi'(x)=k$, то других нулей у $\varphi'(x)$ нет. Нетрудно заметить, что на интервале $(\lambda_{i-1}^*,\lambda_i^*)$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в точке x_i, т. е. $S(x)<S(x_i)$ при $x\in(\lambda_{i-1}^*,\lambda_i^*)\setminus\{x_i\}$. На каждом из интервалов $(\lambda_{i-1}^*,\lambda_i^*)$

$$S'(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$$S''(x)=\frac{\varphi''(x)\varphi(x)-[\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)}= \\ =-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-\lambda_1)^2}-\ldots-\frac{1}{(x-\lambda_k)^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$S''(x_i)=\varphi''(x_i)/\varphi(x_i)<0.$$

Сформулируем основные результаты работы.

***Теорема* 1.1.** *Пусть* $n=m_1=m_2=\ldots=m_k$ *и* $\pi_{kn,kn}^j(z;e^{\lambda_j\xi})$ *– аппроксимации Эрмита-Паде для системы экспонент* $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, *где* $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *– различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного* z, $|z|\le L$ *при* $j=1,2,\ldots,k$ *и* $n\to+\infty$

$$e^{\lambda_j z}-\pi_{kn,kn}^j(z;e^{\lambda_j\xi})= \\ =(-1)^{kn}\operatorname{sign}(\lambda_j)\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}e^{\lambda_j z}e^{\frac{\sum_{i=1}^k\lambda_i}{k+1}z}\times \\ \times\sum_i{}^*(-1)^{(i+1)n}\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}}e^{nS(x_i)}e^{-zx_i}\left(1+O_i(1/n)\right),$$

где в сумме $\sum_i^*$ *суммирование распространяется только на те значения* i *из* $\{1,2,\ldots,k\}$, *для которых* x_i *лежит в интервале с концами в точках* 0 *и* λ_j.

***Теорема* 1.2.** *Пусть* $n=m_1=m_2=\ldots=m_k$ *и* $\pi_{kn,kn}^j(z;F_\gamma^j)$ *– аппроксимации Эрмита-Паде для системы функций Миттаг-Леффлера* $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$, *где* $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *– различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного* z, $|z|\le L$ *при* $j=1,2,\ldots,k$ *и* $n\to+\infty$

$$F_\gamma^j(z)-\pi_{kn,kn}^j(z;F_\gamma^j)= \\ =(-1)^{kn}\operatorname{sign}(\lambda_j)\frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}}e^{\lambda_j z}e^{\frac{\sum_{i=1}^k\lambda_i}{k+1}z}\times \\ \times\sum_i{}^*(-1)^{(i+1)n}\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}}\times \\ \times e^{nS(x_i)}e^{-zx_i}\left(\frac{x_i}{\lambda_j}\right)^{\gamma-1}\left(1+O_i(1/n)\right),$$

где в сумме $\sum_i^*$ *суммирование распространяется только на те значения* i *из* $\{1,2,\ldots,k\}$, *для которых* x_i *лежит в интервале с концами в точках* 0 *и* λ_j.

В частности, при $k=1$ и $\lambda_1=1$

$$\varphi(x)=x(x-1),$$

$$S(x)=\ln[-x(x-1)],\quad x\in(0,1),$$

$$x_1=1/2,\quad S(x_1)=-\ln 4,\quad S''(x_1)=-8.$$

Поэтому из теоремы 1.2 следует, что

$$F_\gamma(z)-\pi_{n,n}(z;F_\gamma)= \\ =(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}}e^z\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\left(1+O(1/n)\right). \quad (1.1)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ называют *эквивалентными* $(\alpha_n \sim \beta_n)$, если $\alpha_n / \beta_n \to 1$ при $n \to +\infty$.

Применяя при действительных $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ формулу Стирлинга и учитывая равенство $(\gamma)_k = \Gamma(k+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, нетрудно показать, что при $n \to +\infty$

$$\frac{n!(\gamma)_n}{(\gamma)_{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}}.$$

Это значит, что при $n = m$ и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ асимптотические равенства (0.7) и (1.1) согласуются. Таким образом, в диагональном случае получено другое доказательство теоремы 1 из [22], которое, к тому же, справедливо и при $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Подробнее остановимся на следствиях из теорем 1.1 и 1.2 в случае, когда $k = 2, 3$, $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

***Следствие* 1.1.** *Пусть* $\{e^z, e^{2z}\}$ *– набор из двух экспонент и* $n = m_1 = m_2$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$ *при* $n \to +\infty$

$$e^z - \pi^1_{2n,2n}(z; e^{\xi}) = = \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}} \left(1 + o(1)\right), \tag{1.2}$$

$$e^{2z} - \pi^1_{2n,2n}(z; e^{2\xi}) = = \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times \times \left\{ e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}} \right\} \left(1 + o(1)\right). \tag{1.3}$$

***Следствие* 1.2.** *Пусть* $\{F^j_\gamma(z)\}_{j=1}^2$ *– набор из двух функций Миттаг-Леффлера при* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ *и* $n = m_1 = m_2$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$ *при* $n \to +\infty$

$$F^1_\gamma(z) - \pi^1_{2n,2n}(z; F^1_\gamma) = = \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \left(1 + o(1)\right),$$

$$F^2_\gamma(z) - \pi^2_{2n,2n}(z; F^2_\gamma) = \frac{z^{3n+1}}{2^{\gamma-1}(\gamma)_{3n}} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times \times \left\{ e^{\frac{z}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} + (-1)^n e^{-\frac{z}{\sqrt{3}}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \right\} \left(1 + o(1)\right).$$

Для доказательства следствий 1.1 и 1.2 достаточно заметить, что при $k = 2$, $\lambda_j = j$, $j = 1, 2$

$$\varphi(x) = x(x-1)(x-2),$$

$$x_1 = 1 - 1/\sqrt{3}, \quad x_2 = 1 + 1/\sqrt{3},$$

$$S(x_1) = S(x_2) = \ln\left[2/(3\sqrt{3})\right],$$

$$S''(x_1) = S''(x_2) = -9.$$

При $\gamma = 1$ равенства, аналогичные (1.2) и (1.3), ранее другим методом были получены в [37]. В них вместо б.м. $\sqrt{2\pi/9n} \cdot [2/(3\sqrt{3})]^n$ в качестве множителя правой части стоит эквивалентная ей б. м. $B((n+1)/2; n+1)$, где $B(\cdot;\cdot)$ – бета-функция Эйлера.

***Следствие* 1.3.** *Пусть* $\{e^{jz}\}_{j=1}^3$ *– набор из трёх экспонент и* $n = m_1 = m_2 = m_3$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$ *при* $n \to +\infty$

$$e^z - \pi^1_{3n,3n}(z; e^{\xi}) = = (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^z \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(1 + o(1)\right).$$

$$e^{2z} - \pi^1_{3n,3n}(z; e^{2\xi}) = = (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(1 + o(1)\right).$$

$$e^{3z} - \pi^1_{3n,3n}(z; e^{3\xi}) = = (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^{3z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} \left\{ e^{\sqrt{5}z/2} + e^{-\sqrt{5}z/2} \right\} \left(1 + o(1)\right).$$

***Следствие* 1.4.** *Пусть* $\{F^j_\gamma(z)\}_{j=1}^3$ *– набор из трёх функций Миттаг-Леффлера при* $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, 3$ *и* $n = m_1 = m_2 = m_3$. *Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$ *при* $n \to +\infty$

$$F^1_\gamma(z) - \pi^1_{3n,3n}(z; F^1_\gamma) = = (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^z \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{\gamma-1} \left(1 + o(1)\right).$$

$$F^2_\gamma(z) - \pi^2_{3n,3n}(z; F^2_\gamma) = = (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^{2z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right)^{\gamma-1} \left(1 + o(1)\right).$$

$$F^3_\gamma(z) - \pi^3_{3n,3n}(z; F^3_\gamma) = = (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^{3z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} \times \times \left\{ e^{\frac{\sqrt{5}z}{2}} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{6}\right)^{\gamma-1} + e^{-\frac{\sqrt{5}z}{2}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{6}\right)^{\gamma-1} \right\} \left(1 + o(1)\right).$$

Для доказательства следствий 1.3 и 1.4 достаточно заметить, что при $k = 3$ и $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, 3$ в теоремах 1.1 и 1.2

$$\varphi(x) = x(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$x_1 = (3 - \sqrt{5})/2, \quad x_3 = (3 + \sqrt{5})/2,$$

$$x_2 = 3/2, \quad S(x_1) = S(x_3) = 0, \quad S(x_2) = \ln(9/16),$$

$$S''(x_1) = S''(x_3) = -10, \quad S''(x_2) = -80/9.$$

2 Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_I f(x) e^{\lambda S(x)} dx \tag{2.1}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

называют интегралами Лапласа. Здесь I либо отрезок $[a,b]$, либо интервал (a,b), λ – большой параметр. Будем считать, что функция $S(x)$ принимает только действительные значения. Функция $f(x)$ может быть комплекснозначной. Считаем также, что $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны при $x \in I$. Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Следующее утверждение [38, § 43, п. 1, лемма 1] дает грубую экспоненциальную оценку для интеграла Лапласа.

***Утверждение* 2.1.** *Пусть* $I=(a,b)$ *– конечный или бесконечный интервал,* $S(x) \le c$ *при* $x \in I$ *и интеграл* (2.1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda_0 > 0$*. Тогда при* $Re\lambda \ge \lambda_0$

$$\left|F(\lambda)\right| \le c_1 e^{cRe\lambda},$$

где c_1 *– положительная постоянная.*

В дальнейшем ограничимся случаем, когда $S(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $I=[a,b]$ в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка. Справедливо [38, § 43, п. 4, теорема 2] следующее

***Утверждение* 2.2.** *Пусть* $S(x) < S(x_0)$, $x \ne x_0$, $a < x_0 < b$, $S''(x_0) \ne 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0*. Тогда при* $\lambda \to +\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{(x_0)} \left\{ f(x_0) + O(\lambda^{-1}) \right\}. \quad (2.2)$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.2. Теорема 1.1 получается из теоремы 1.2, если положить $\gamma = 1$.

***Лемма* 2.1.** *Пусть* $n = m_1 = m_2 = \ldots = m_k$ *и* $\tilde{R}^j_{n,m}(z)$ *– функции, определяемые равенством* (0.5) *для системы* $\{F^j_\gamma(z)\}_{j=1}^k$*, где* $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *– различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного* z, $|z| \le L$ *при* $j = 1,2,\ldots,k$ *и* $n \to +\infty$

$$\tilde{R}^j_{n,m}(z) = (-1)^{kn} \operatorname{sign}(\lambda_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} \times$$

$$\times {\sum_i}^* (-1)^{(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} e^{nS(x_i)} e^{-zx_i} \left(\frac{x_i}{\lambda_j} \right)^{\gamma-1} \times \quad (2.3)$$

$$\times \left(1 + O_i(1/n)\right),$$

где в сумме ${\sum_i}^*$ *суммирование распространяется только на те значения* i *из* $\{1,2,\ldots,k\}$*, для которых* x_i *лежит в интервале с концами в точках* 0 *и* λ_j.

Доказательство. В условиях леммы

$$\tilde{R}^j_{n,m}(z) = \frac{z^{kn+n+1}}{(\lambda_j)^{\gamma-1}(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} \times$$

$$\times \int_0^{\lambda_j} x^n (x-\lambda_1)^n \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx. \quad (2.4)$$

Интеграл в правой части равенства (2.4) обозначим через $I_j(z)$ и представим в виде

$$I_j(z) = \operatorname{sign}(\lambda_j) {\sum_i}^* I^i_j(z), \quad (2.5)$$

где

$$I^i_j(z) = \int_{\lambda^*_{i-1}}^{\lambda^*_i} x^n (x-\lambda_1)^n \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx$$

и сумма ${\sum_i}^*$ состоит только из тех интегралов I^i_j, у которых область интегрирования $(\lambda^*_{i-1}, \lambda^*_i)$ принадлежит промежутку с концами в точках 0 и λ_j.

Заметим, что

$$I^i_j(z) = (-1)^{kn+(i+1)n} \times$$

$$\times \int_{\lambda^*_{i-1}}^{\lambda^*_i} x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{n\ln[(-1)^{k+i+1} x(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)]} dx =$$

$$= (-1)^{kn+(i+1)n} \int_{\lambda^*_{i-1}}^{\lambda^*_i} x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{nS(x)} dx.$$

В последнем интеграле разобьём область интегрирования $(\lambda^*_{i-1}, \lambda^*_i)$ на три части: $(\lambda^*_{i-1}, \lambda^*_{i-1}+\tau]$, $[\lambda^*_{i-1}+\tau, \lambda^*_i-\tau]$, $[\lambda^*_i-\tau, \lambda^*_i)$, где $0 < \tau < 1$ и выбрано так, чтобы $x_i \in [\lambda^*_{i-1}+\tau, \lambda^*_i-\tau]$. Поскольку на интервале $(\lambda^*_{i-1}, \lambda^*_i)$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в единственной точке x_i, то, в силу утверждения 2.1, несобственные интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с $e^{nS(x_i)}$. Асимптотика интеграла по отрезку $[\lambda^*_{i-1}+\tau, \lambda^*_i-\tau]$ вычисляется по формуле (2.2), если положить в ней $f(x) = x^{\gamma-1}e^{-zx}$. Поэтому при $n \to +\infty$

$$I^i_j(z) = (-1)^{kn+(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} \times$$

$$\times e^{nS(x_i)} x_i^{\gamma-1} e^{-zx_i} \left(1 + O_i(1/n)\right).$$

Отсюда и из равенств (2.4), (2.5) следует (2.3). Лемма 2.1 доказана.

Утверждения теоремы 1.2 легко получить, опираясь на лемму 2.1. Для этого нужно воспользоваться равенствами (0.2) и учесть, что при $n = m_1 = m_2 = \ldots = m_k$ и $n \to +\infty$ из (0.6) следует, что

$$\widetilde{Q}_m(z) = \exp\left\{ -\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z \right\} \left(1 + o(1)\right).$$

Теорема 1.2 доказана.

В заключении заметим, что при целых $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ теорема 1.1 позволяет получать эффективные

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

оценки для совместных приближений рациональными числами значений показательной функции $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_k}$. В этом смысле полученные результаты могут быть полезными в теории диофантовых приближений [39].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прудников, А.П.* Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1981.

2. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

3. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986.

4. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, 1988.

5. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 37–122.

6. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Эрмита-Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 123–190.

7. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П.Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.

8. *Boyd, J.P.* Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev-Hermite-Pade method / J.P. Boyd // J. of Comput. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 223, № 2 – P. 693–702.

9. *Beckermann, B.* How well does the Hermite-Pade approximation smooth the Gibbs phenomenon? / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.

10. *Сорокин, В.Н.* Циклические графы и теорема Апери / В.Н. Сорокин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 3 – С. 99–134.

11. *VanAssche, W.* Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W. VanAssche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.

12. *Аптекарев, А.И.* Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9 / А.И. Аптекарев (ред.) – М. : МИАН, 1988.

13. *Калягин, В.А.* Аппроксимации Эрмита-Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.

14. *Aptekarev, A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.

15. *Bleher, P.M.* Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials / P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Int. Math. Res. Not. – 2004. – Vol. 3. – P. 109–129.

16. *Aptekarev, A.I.* Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II / A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Comm. Math. Phys. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.

17. *Аптекарев, А.И.* Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // ТМФ. – 2009. – Т. 159, № 1. – С. 34–57.

18. *Клейн, Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1 / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1933.

19. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

20. *Perron, O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin : Teubner, 1929.

21. *Аптекарев, А.И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\left\{ {}_1F_1(1,c;\lambda_i z) \right\}_{i=1}^{k}$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

22. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

23. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

24. *Калягин, В.А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности / В.А.Калягин // Матем. сборник. – 1979. – Т. 110 (152), № 4. – С. 609–627.

25. *Гончар, А.А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов // Тр. МИАН СССР. – 1981. – Т. 157. – С. 31–48.

26. *Гончар, А.А.* Об аппроксимациях Эрмита-Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, В.Н. Сорокин // Матем. сборник. – 1997. – Т. 188, № 5. – С. 33–58.

27. *Никишин, Е.М.* Совместные аппроксимации Паде / Е.М. Никишин // Матем. сборник. – 1980. – Т. 155, № 4. – С. 499–519.

28. *Никишин, Е.М.* Асимптотика линейных форм для совместных аппроксимаций Паде / Е.М. Никишин // Изв. вузов. Сер. матем. – 1986. – № 2. – С. 33–41.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

29. *Бустаманте, Ж.* Аппроксимации Эрмита-Паде для системы Никишина аналитических функций / Ж. Бустаманте, Лопес Г. Лагомасино // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 11. – С. 117–138.

30. *Driver, K.* Normality in Nikishin systems / K. Driver, H. Stahl // Indag. Math. (N.S.). – 1994. – Vol. 5, № 2. – P. 161–187.

31. *Driver, K.* Simultaneus rational approximants to Nikishin systems. I / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 60. – P. 245–263.

32. *Driver, K.* Simultaneus rational approximants to Nikishin systems. II / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 61. – P. 261–284.

33. *Аптекарев, А.И.* Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 1988. – Т. 136 (178), № 1. – С. 56–84.

34. *Аптекарев, А.И.* Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для системы Никишина / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, № 5. – С. 3–44.

35. *Аптекарев, А.И.* Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов // Матем. сборник. – 2010. – Т. 201, № 2. – С. 29–78.

36. *Аптекарев, А.И.* Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.

37. *Рябченко, Н.В.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 97–100.

38. *Сидоров, Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.

39. *Шмидт, В.* Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир, 1983.

Поступила в редакцию 23.01.13.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ