О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, математический факультет, Гомель, Беларусь
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ целых неотрицательных чисел.

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_{n_p}^p(z)$, $\deg A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, \ldots, k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p e^{\lambda_p z} = O(z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}), \quad z \to 0.$$

Если $n_0 = n_1 = \ldots = n_k = n$, то элементы множества $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ называют *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа* системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$.

Многочлены $\{A^p_{n_p}(z)\}_{p=0}^k$ были введены Эрмитом спустя 10 лет после выхода в свет его знаменитой работы, посвященной доказательству трансцендентности числа e и имеют важные приложения к диофантовым приближениям и приближениям аналитических функций. Известно, что они образуют ортогональную ситему относительно весовых функций, определяемых через систему экспонент, и, в некоторых частных случаях, являются решением дифференциальных уравнений второго порядка.

Мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочлена $A^p_{n_p}(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна (см. [1, 2]).

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ — произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, \ldots, k$, $k \geqslant 1$ нули многочлена $A^p_{n_p}(z)$, $0 \leqslant p \leqslant k$, находятся в круге $\{z : |z| < R^p_{n_p}\}$, где*

$$R^p_{n_p} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}. \tag{1}$$

При $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \ldots, k$ и $k = 1$ многочлены Эрмита совпадают с классическими многочленами Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$. Из теоремы следует, что все нули многочленов Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < 2(n-1/3)\}$, что согласуется с «теоремой о кольце» Э. Саффа и Р. Варги (см. [1]).

Если $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, и $k \geqslant 2$, то в качестве следствия теоремы вытекает теорема 2.2 из работы [3]: *все нули диагональной аппроксимации Эрмита – Паде I типа $A^p_n(z)$ для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$, лежат в круге $\{z : |z| < R_p\}$, где*

$$R_p = 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\left[\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{j}\right].$$

При тех же предположениях, что и в теореме Ф. Вилонского [3], но для произвольных действительных $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ из (1) следует утверждение, доказанное в [4]: *все нули многочлена $A^p_n(z)$, лежат в круге $\{z : \ |z| < R^p_n\}$, где*

$$R^p_n = 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\left[\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_j|} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{|\lambda_{p+j} - \lambda_p|}\right].$$

Теорема утверждает, что нули многочленов $A^p_{n_p}(z)$ лежат в круге с центром в нуле, радиус которого $R^p_{n_p}$ зависит как от степени многочлена, так и от взаимного расположения показателей системы экспонент $\{e^{\lambda_p}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме верхней оценки для модулей нулей $A^p_{n_p}(z)$ в случае, когда набор чисел $\{n_p\}_{p=0}^k$ фиксирован, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Для этой системы полученные в теореме неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита при $2 \leqslant n_p \leqslant 4$ являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \to 1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2011–2015 гг.

Литература

1. Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде.* М.: Мир, 1986.

2. Stahl H. *Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Constr. Approx. 2006. V. 23. № 2. C. 193–220.

3. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite — Padé Approximants to* e^z // J. Approx. Theory. 1997. V. 90. № 2. C. 283–298.

4. Герман А. В., Кечко Е. П., Старовойтов А. П. *О нулях многочленов Эрмита* // Изв. Гомельского гос. ун-та. им. Ф. Скорины. 2015. № 3(90). С. 104–110.