Математические заметки

том 69 выпуск 6 июнь 2001

УДК 517.51+517.53

К ПРОБЛЕМЕ ОПИСАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НАИЛУЧШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

А. П. Старовойтов

Для заданной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных действительных чисел, которая строго убывает и сходится к нулю, построена непрерывная 2π-периодическая функция f такая, что $R_n^T(f)=a_n$, $n=0,1,2,\dots$, где $R_n^T(f)$ – наилучшие приближения функции f тригонометрическими рациональными функциями степени не выше n в равномерной норме.

Библиография: 11 названий.

Пусть $C_{2\pi}$ – банахово пространство 2π-периодических непрерывных на всей числовой прямой функций с равномерной нормой. Через $\mathscr{P}_n$ и $\mathscr{R}_n$ обозначим соответственно множество всех тригонометрических полиномов и тригонометрических рациональных функций с действительными коэффициентами степени не выше n. Для $f\in C_{2\pi}$ и $n=0,1,2,\dots$ рассмотрим

$$E_n(f)=\inf\{\|f-p\|\colon p\in\mathscr{P}_n\},\qquad R_n(f)=\inf\{\|f-r\|\colon r\in\mathscr{R}_n\}$$

– наилучшие приближения f в $C_{2\pi}$ множествами $\mathscr{P}_n$, $\mathscr{R}_n$.

Хорошо известно, что последовательности $\{E_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{R_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастают и сходятся к нулю. Отмеченные свойства наилучших тригонометрических полиномиальных приближений характеризуют их полностью. Именно, справедлива следующая теорема Бернштейна (см. [1], [2]): если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел не возрастает и сходится к нулю, то существует $f\in C_{2\pi}$, для которой

$$E_n(f)=a_n,\qquad n=0,1,2,\dots.$$

Позже этот результат был перенесен на произвольное банахово пространство (см. [2]).

Аналог теоремы Бернштейна для рациональных приближений отсутствует даже в классическом случае пространства $C_{2\pi}$, хотя проблема описания всех последовательностей $\{R_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$, $f\in C_{2\pi}$, поставлена давно (см., например, [3]). По существу, единственным результатом в этом направлении является следующее утверждение Долженко [3]: для указанной выше последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует функция $f\in C_{2\pi}$ такая, что

$$R_{9^k}(f)=a_{9^k},\qquad k=0,1,2,\dots.$$

С другой стороны, в случае приближения комплекснозначных функций рациональными функциями с комплексными коэффициентами в решении указанной проблемы имеется существенный сдвиг (см. [4], [5]).

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Для любой строго убывающей к нулю последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел существует такая нечетная функция $f \in C_{2\pi}$, что*

$$R_n(f) = a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Доказательство теоремы базируется на принципе неподвижной точки Шаудера, а в основу конструкции искомой функции $f \in C_{2\pi}$ положены алгебраические дроби Чебышева–Маркова, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, 1]$. Заметим, что классическое доказательство Бернштейна основано на принципе компактности Больцано–Вейерштрасса, при этом построенная им функция $f \in C_{2\pi}$ является четной.

Без ограничения общности при построении функции f будем считать, что $a_0 = 1$. В противном случае следует рассмотреть последовательность

$$1, \quad \frac{a_1}{a_0}, \quad \frac{a_2}{a_0}, \quad \dots$$

и воспользоваться равенством $R_n(\lambda f) = |\lambda| R_n(f)$. Определим две бесконечно малые последовательности положительных чисел

$$\triangle a_n = a_{n-1} - a_n, \quad \varepsilon_n = \min\{\triangle a_1, \triangle a_2, \dots, \triangle a_n\}, \qquad n = 1, 2, 3 \dots .$$

Лемма [4]. *Существует последовательность $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям*

$$1 > \beta_j > \beta_{j+1} > 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$
$$\sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{\beta_j}{\beta_l} < \frac{1}{4}\varepsilon_{l+1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \qquad \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\beta_l}{\beta_j} < \frac{1}{4}\varepsilon_l, \quad l = 2, 3, 4, \dots .$$

Доказательство. Нужным условиям удовлетворяет последовательность

$$\beta_j = \frac{\varepsilon_1}{5}\frac{\varepsilon_2}{5}\cdots\frac{\varepsilon_j}{5}, \qquad j = 1, 2, 3, \dots .$$

Лемма доказана.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $z_k = i\beta_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и, взяв каждую точку z_k с кратностью 2, построим синус-дробь Бернштейна [6, гл. 1, § 1]

$$N_{2n}(y) = \sin \Phi_{2n}(y) = \frac{y P_{2n-2}(y)}{\prod_{k=1}^{n}(y^2 + \beta_k^2)}, \tag{1}$$

где $P_{2n-2}(y)$ – четный полином порядка $2n-2$, а

$$\Phi_{2n}(y) = 2\sum_{k=1}^{n} \arg(z_k - y).$$

Лемма 2. *Пусть* $\lambda_{k,l} = N_{2k}(\beta_l)$. *Тогда*

$$|\lambda_{k,l}| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \qquad \text{при } l > k, \tag{2}$$

$$|\lambda_{k,l} - (-1)^l| < \frac{1}{2}\varepsilon_l \qquad \text{при } l \leqslant k. \tag{3}$$

Доказательство. Учитывая выбор точек $\{z_j\}_{j=1}^k$, получим, что при $y > 0$

$$\Phi_{2k}(y) = 2\sum_{j=1}^{k} \arg(i\beta_j - y) = 2\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{\beta_j}\right) = \pi k + 2\sum_{j=1}^{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{\beta_j}.$$

Следовательно, если $l > k$, учитывая лемму 1, имеем

$$0 < \Phi_{2k}(\beta_l) - \pi k = 2\sum_{j=1}^{k}\operatorname{arctg}\frac{\beta_l}{\beta_j} \leqslant 2\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta_l}{\beta_j} < \frac{1}{2}\varepsilon_l.$$

Отсюда получим

$$|\lambda_{k,l}| = |\sin\Phi_{2k}(\beta_l)| < \frac{1}{2}\varepsilon_l,$$

и неравенство (2) доказано.

Пусть теперь $l \leqslant k$. Тогда из представления

$$\Phi_{2k}(y) = 2\left\{\sum_{j=1}^{l-1}\arg(-y + i\beta_j) + \arg(-y + i\beta_l) + \sum_{j=l+1}^{k}\arg(-y + i\beta_j)\right\}$$

имеем, что

$$\Phi_{2k}(\beta_l) = \pi(2k - l) + \frac{\pi}{2} + 2\sum_{j=1}^{l-1}\operatorname{arctg}\frac{\beta_l}{\beta_j} - 2\sum_{j=l+1}^{k}\operatorname{arctg}\frac{\beta_j}{\beta_l}.$$

Снова применив лемму 1, получим

$$\begin{aligned}\left|\Phi_{2k}(\beta_l) - \pi(2k - l) - \frac{\pi}{2}\right| &\leqslant 2\max\left\{\sum_{j=1}^{l-1}\operatorname{arctg}\frac{\beta_l}{\beta_j}, \sum_{j=l}^{k}\operatorname{arctg}\frac{\beta_j}{\beta_l}\right\} \\ &< 2\max\left\{\sum_{j=1}^{l-1}\frac{\beta_l}{\beta_j}, \sum_{j=l}^{k}\frac{\beta_j}{\beta_l}\right\} < \frac{1}{2}\varepsilon_l.\end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (3). Лемма доказана.

Сделав в (1) замену $x = (1-y^2)/(1+y^2)$, придем к синус-дроби Чебышева–Маркова, которая имеет следующий вид [6, гл. 2, § 1, равенство (9)]:

$$\nu_n(x) = \sin\varphi_{2n}(x) = \sin\Phi_{2n}(y) = \sqrt{1 - x^2}\,\frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^{n}(1 - c_j x)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами, а $c_k = (1-\beta_k^2)/(1+\beta_k^2)$, $k=1,2,\dots,n$. С учетом замены и последних равенств получим, что $0<c_1<c_2<\dots<c_n<\dots<1$ и $\nu_k(c_l)=\lambda_{k,l}$, $k=1,2,\dots$, $l=1,2,\dots$.

В банаховом пространстве $\mathbf{c}_0$ сходящихся к нулю последовательностей $t=(t_0,t_1,t_2,\dots)$ с нормой $\|t\|_{c_0}=\sup\{|t_n|\colon n=0,1,2,\dots\}$ определим выпуклое компактное множество

$$K=\{t\colon 0\leqslant t_k\leqslant \varepsilon_{k+1};\qquad k=0,1,2,\dots\}.$$

Если $t=(t_0,t_1,t_2,\dots)\in K$, то полагая $\triangle t_k=t_{k-1}-t_k$, рассмотрим функцию

$$f_t(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}(\triangle a_k+\triangle t_k)\sin\theta\frac{P_{k-1}(\cos\theta)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j\cos\theta)}. \tag{4}$$

Поскольку ряд (4) равномерно сходится на любом конечном отрезке, то $f_t(\theta)$ является нечетной функцией из $C_{2\pi}$. Покажем, что семейство функций $(f_t(\theta))_{t\in K}$ содержит функцию f с нужными свойствами.

Лемма 3. *Пусть* $\theta_k=\arccos c_k$, $k=1,2,\dots$. *Тогда* $0<\theta_k<\pi/2$ *и при всех* $t\in K$ *справедливы неравенства*

$$(-1)^l f_t(\theta_l)\geqslant a_{l-1}+t_{l-1}-\varepsilon_l,\qquad l=1,2,\dots. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что при $\theta\in[0,\pi/2]$

$$\sin\theta\frac{P_{k-1}(\cos\theta)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j\cos\theta)}=\nu_k(\cos\theta).$$

С учетом этого равенства имеем

$$\begin{aligned}f_t(\theta_l)-(-1)^l(a_{l-1}+t_{l-1})&=\sum_{k=1}^{\infty}(\triangle a_k+\triangle t_k)\nu_k(c_l)-(-1)^l(a_{l-1}+t_{l-1})\\&=\sum_{k=1}^{l-1}(\triangle a_k+\triangle t_k)\lambda_{k,l}+\sum_{k=l}^{\infty}(\triangle a_k+\triangle t_k)(\lambda_{k,l}-(-1)^l).\end{aligned}$$

Поскольку $t\in K$, то $\triangle a_k+\triangle t_k\geqslant 0$. Поэтому, используя лемму 2, получим

$$|f_t(\theta_k)-(-1)^l(a_{l-1}+t_{l-1})|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_l\sum_{k=1}^{\infty}(\triangle a_k+\triangle t_k)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_l(a_0+t_0)<\varepsilon_l.$$

Отсюда следует (5). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Для этого заметим, что при любом $t\in K$ функция f_t подчинена условиям

$$a_n+t_n-\varepsilon_{n+1}\leqslant R_n(f_t)\leqslant a_n+t_n,\qquad n=0,1,2,\dots. \tag{6}$$

Действительно, так как $|\nu_k(x)|=|\sin\varphi_{2k}(x)|\leqslant 1$ и $\triangle a_k+\triangle t_k\geqslant 0$, то

$$\begin{aligned}&\left|f_t(\theta)-\sum_{k=1}^{n}(\triangle a_k+\triangle t_k)\sin\theta\frac{P_{k-1}(\cos\theta)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j\cos\theta)}\right|\\&\qquad\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}(\triangle a_k+\triangle t_k)|\nu_k(\cos\theta)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}(\triangle a_k+\triangle t_k)=a_n+t_n.\end{aligned}$$

Таким образом, оценка сверху в (6) доказана. Для доказательства оценки снизу воспользуемся следующим аналогом теоремы Валле-Пуссена [7, гл. 2, § 31] для периодического случая.

Лемма 4. *Если $f \in C_{2\pi}$ и принимает в последовательных точках $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$ промежутка $(-\pi, \pi]$ отличные от нуля значения $\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{N-1}\lambda_N$ с чередующимися знаками (все λ_i имеют одинаковый знак), причем $N \geqslant 2n+2$, то*

$$R_n(f) \geqslant \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}.$$

На промежутке $(-\pi, \pi]$ имеется с учетом нечетности функции $f_t(\theta)$ $2n+2$ точек $u_1 = \theta_1, u_2 = \theta_2, \dots, u_{n+1} = \theta_{n+1}, u_{n+2} = -\theta_{n+1}, u_{n+3} = -\theta_n, \dots, u_{2n+2} = -\theta_1$, в которых согласно (5) функция f_t принимает значения с чередующимися знаками. Поэтому из лемм 3, 4 получим оценку снизу в (6). Неравенства (6) означают, что отображение $\Pi\colon \mathbf{c}_0 \to \mathbf{c}_0$, определяемое равенством

$$\Pi(t) = \{a_n + t_n - R_n(f_t)\}_{n=0}^{\infty},$$

переводит K в себя.

Лемма 5. *Отображение $t \mapsto f_t(\theta)$ банахова пространства $\mathbf{c}_0$ в $C_{2\pi}$ равномерно непрерывно на K.*

Доказательство. Пусть $t', t'' \in K$. Тогда с учетом (4) будем иметь, что

$$\begin{aligned}\max_{\theta\in\mathbb{R}} |f_{t''}(\theta) - f_{t'}(\theta)| &\leqslant \sum_{k=1}^{N} |\triangle t''_k - \triangle t'_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} (\triangle a_k + \triangle t''_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} (\triangle a_k + \triangle t'_k) \\ &\leqslant 2N \max_{0\leqslant k\leqslant N} |t''_k - t'_k| + 2a_N + t''_N + t'_N.\end{aligned}$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $f, g \in C_{2\pi}$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ верно неравенство $\|f - g\| < \varepsilon$. Тогда*

$$|R_n(f) - R_n(g)| < \varepsilon \qquad \textit{для } n = 0, 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Пусть r_n^f и r_n^g – тригонометрические рациональные функции наилучшего приближения f и g степени не выше n. Тогда из условия леммы следует, что

$$\|f - r_n^g\| < R_n(g) + \varepsilon, \qquad \|g - r_n^f\| < R_n(f) + \varepsilon,$$

поэтому

$$R_n(f) < R_n(g) + \varepsilon, \qquad R_n(g) < R_n(f) + \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Из леммы 5 и 6 следует, что отображение $\Pi(t)$ непрерывно на K. По теореме Шаудера (см. [8]) существует точка $t^* = (t_0^*, t_1^*, t_2^*, \dots) \in K$, для которой $\Pi(t^*) = t^*$, т.е. $R_n(f_{t^*}) = a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, функция $f(\theta) = f_{t^*}(\theta)$ является искомой. Теорема доказана.

Отметим, что приведенное доказательство теоремы в сравнении с доказательством Бернштейна является более конструктивным. В частности, задав нужную скорость убывания к нулю последовательности $\{a_k\}_{n=0}^{\infty}$, можно изучать различные свойства всего семейства функций $(f_t(\theta))_{t\in K}$, которому принадлежит искомая функция. Данное обстоятельство имеет важное значение как при доказательстве точности прямых теорем рациональной аппроксимации, так и при получении обратных теорем.

Основные результаты статьи анонсированы в [9]–[11].

В заключение автор выражает благодарность профессору В. Н. Русаку и профессору А. А. Пекарскому за полезные обсуждения полученных результатов и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.

[2] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: ГИФМЛ, 1950.

[3] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. №3. С. 313–320.

[4] Пекарский А. А. Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Изв. АН Беларуси. Сер. физ. -матем. науки. 1994. №1. С. 23–26.

[5] Назаренко М. А. Существование функции с заданными рациональными приближениями в пространстве $C(A)$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. №4. С. 20–22.

[6] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: БГУ, 1979.

[7] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

[8] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

[9] Старовойтов А. П. Об одной проблеме Бернштейна–Долженко // International Conference on Approximation Theory and its Applications Dedicated to the Memory of V. K. Dzjadyk. Abstracts. Kyiv: Institute of Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 1999. P. 78.

[10] Старовойтов А. П. Описание последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тез. докл. междунар. конф. (14–18 сентебря 1999 г., Минск, Беларусь). Минск: БГУ, 1999. С. 213–214.

[11] Старовойтов А. П. К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. №2. С. 23–25.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: `svoitov@gsu.unibel.by`

Поступило
03.04.2000