Математические заметки

том 78 выпуск 3 сентябрь 2005

УДК 517.51+517.53

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ И ВЕЙЛЯ

А. П. Старовойтов

Найдены точные порядки рациональной аппроксимации функций, представимых в виде дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля. Новые результаты и уже известные в рациональной аппроксимации дифференцируемых функций теоремы В. Попова, П. Петрушева, А. А. Пекарского, В. Н. Русака и автора, их усиления и обобщения получены в качестве следствий теорем А. А. Пекарского, относящихся к рациональной аппроксимации классов Харди–Соболева в единичном круге.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Формулировки основных результатов. Пусть $C[a,b]$ и $L_p[a,b]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, – соответственно нормированные пространства непрерывных на отрезке $I=[a,b]$ и интегрируемых по Лебегу в p-й степени действительных функций с обычными нормами

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_{L_\infty[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \operatorname{vrai} |f(x)|,$$
$$\|f\|_{L_p[a,b]} := \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \qquad 1\leqslant p<\infty.$$

Если X – одно из пространств $C(I)$ или $L_p(I)$, то для $f\in X$ определим ее наименьшие уклонения в X соответственно от алгебраических многочленов $p\in\mathscr{P}_n=\{q:\deg q\leqslant n\}$ и алгебраических рациональных функций $r\in\mathscr{R}_n=\{p/q: p,q\in\mathscr{P}_n\}$ степени не выше n с действительными коэффициентами

$$E_n(f,X) = \inf_{p\in\mathscr{P}_n}\|f-p\|_X, \qquad R_n(f,X) = \inf_{r\in\mathscr{R}_n}\|f-r\|_X.$$

В случае, когда $I=[0,2\pi]$, будем также рассматривать 2π-периодические функции, а соответствующие нормированные пространства 2π-периодических функций обозначим через $C_{2\pi}$, $L_p^{2\pi}$. Если X – одно из пространств $C_{2\pi}, L_p^{2\pi}$, то в дальнейшем $E_n(f,X)$ и $R_n(f,X)$ являются соответственно наименьшими уклонениями f в X от тригонометрических полиномов и рациональных функций степени не выше n с действительными коэффициентами.

© А. П. Старовойтов 2005

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для функций $G, h \in L_1[a,b]$ определим свертку

$$(G * h)(x) = \int_a^b G(x-t)h(t)\,dt$$

и при $\alpha > 0$ введем в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_\pm^\alpha L_p[a,b] := \{P_\pm^\alpha * h : \|h\|_{L_p[a,b]} \leqslant 1\},$$
$$W_\pm^\alpha V[a,b] := \{P_\pm^\alpha * h : h(a) = 0,\ \nu(h,I) \leqslant 1\},$$

где $P_\pm^\alpha(t) := (\max\{\pm t, 0\})^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ – ядро Римана–Лиувилля, Γ – гамма-функция Эйлера. Далее будем писать $I_\pm^\alpha h := P_\pm^\alpha * h$, называя $I_\pm^\alpha h$ интегралом дробного порядка α от h в смысле Римана–Лиувилля (см. [1], [2]). Если в предыдущих определениях положить $I = [0, 2\pi]$, а ядро Римана–Лиувилля $P_\pm^\alpha$ заменить ядром Вейля

$$D_\pm^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^\alpha},$$

то получим соответствующие классы периодических функций. Обозначим их через $W_\pm^\alpha L_p^{2\pi}$, $W_\pm^\alpha V_{2\pi}$. В этом случае дробные интегралы Вейля будем обозначать $I_\pm^{(\alpha)} h := D_\pm^{(\alpha)} * h$.

Приведем необходимые в дальнейшем сведения о свойствах функций из этих классов. Такого рода результаты получены в основном Г. Харди и Д. Литтлвудом. В частности, из принадлежащих им теорем (см. [1, теоремы 3.6], [2, теорема 9.1, с. 207]) имеем

$$\alpha > \frac{1}{p} \implies W_\pm^\alpha L_p[a,b] \subset C[a,b], \quad W_\pm^\alpha L_p^{2\pi} \subset C_{2\pi},$$
$$\alpha > 0 \implies W_\pm^\alpha V[a,b] \subset C[a,b], \quad W_\pm^\alpha V_{2\pi} \subset C_{2\pi}.$$

При $0 < \alpha < 1/p$ поведение дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля от интегрируемых функций описывается теоремами, известными под названием теорем Харди–Литтлвуда с предельным показателем (см. [1], [2]): если $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1-\alpha p)$, то найдется такая постоянная $c(\alpha, p)$, зависящая только от α и p, что

$$\|I_\pm^\alpha h\|_{L_q(I)} \leqslant c(\alpha,p)\|h\|_{L_p(I)}, \qquad \|I_\pm^{(\alpha)} h\|_{L_q^{2\pi}} \leqslant c(\alpha,p)\|h\|_{L_p^{2\pi}}.$$

Таким образом, случаи $\alpha > 1/p$ и $0 < \alpha < 1/p$ существенно различны, и это обстоятельство в дальнейшем будем учитывать. Далее, если предположить, что $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$, то (см. [1, с. 104, 169, 271])

$$I_+^\alpha(L_p(I)) = I_-^\alpha(L_p(I)), \qquad I_+^{(\alpha)}(L_p^{2\pi}) = I_-^{(\alpha)}(L_p^{2\pi}).$$

Поэтому при таких условиях на параметры α и p классы $W_+^\alpha L_p[a,b]$, $W_-^\alpha L_p[a,b]$ также, как и классы функций $W_+^\alpha L_p^{2\pi}$, $W_-^\alpha L_p^{2\pi}$ различаются несущественно. В этой связи при указанных ограничениях будем рассматривать только классы функций $W_+^\alpha L_p[a,b]$, $W_+^\alpha L_p^{2\pi}$, опуская в их обозначениях знак ‘+’.

Перейдем к формулировкам основных результатов работы. В дальнейшем запись $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ имеют одинаковый порядок при $n \to \infty$. Соотношение $\alpha_n = o(\beta_n)$ равносильно тому, что $\alpha_n/\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 1. *Пусть* $K^\alpha = K^\alpha_\pm$ *является одним из четырех классов функций* $W^\alpha_\pm L_p[a,b]$, $W^\alpha_\pm L^{2\pi}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\alpha > 1/p$. *Тогда*

$$\sup_{f\in K^\alpha} R_n(f,X) \asymp \frac{1}{n^\alpha}, \tag{1}$$

$$\sup_{f\in K^\alpha} E_n(f,X) \asymp \frac{1}{n^{\alpha-1/p}}, \tag{2}$$

где $X = C[a,b]$ *в алгебраическом случае и* $X = C_{2\pi}$ *в периодическом.*

Соотношение (2) в периодическом и алгебраическом случаях доказано соответственно Русаком [3] и автором [4] для классов K^α_+. Для классов K^α_- эти доказательства существенно не меняются. В периодическом случае, когда $K^\alpha_+ = W^\alpha_+ L^{2\pi}_p$, $\alpha \geqslant 1$ и $\alpha > 1/p$ теорема 1 доказана Русаком [3]. При целых α первые результаты в рациональной аппроксимации функций из рассматриваемых классов были получены в непериодическом случае. Подробный обзор их имеется в [5]. В частности, авторы этой монографии отмечают, что если $K^\alpha = W^\alpha_+ L_p[a,b]$, то, как при $\alpha = 1$, $p > 1$, так и в случае $\alpha = 2,3,\dots$, $p \geqslant 1$, доказательство оценки сверху в (1) впервые опубликовано в [6]. В этой связи заметим, что подробное доказательство этой оценки в обоих случаях имеется также в [7], [8].

Следующая теорема устанавливает более точную оценку сверху при приближении индивидуальных функций из рассматриваемых классов.

Теорема 2. *Пусть* $f \in K^\alpha$, *где* K^α – *один из классов предыдущей теоремы. Тогда при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\alpha > 1/p$ *для любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\bigl(n^\alpha R_n(f,X)\bigr)^{\max\{2,\varepsilon+1/\alpha\}} < c_1(\alpha,p), \tag{3}$$

где постоянная $c_1(\alpha,p)$ *зависит только от* α *и* p *и одна и та же для всех* f, *а* X *определяется так же, как и в теореме 1.*

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $\delta > 0$, *а последовательность действительных чисел* $\{a_n\}$ *не возрастает и сходится к нулю (равносильная запись* $a_n \downarrow 0$). *Тогда из сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^\alpha a_n)^\delta \implies \lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = 0.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\delta > 0$. *Если* $a_n \downarrow 0$, *то из сходимости одного из рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n\alpha} a_{2^n})^\delta \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^\alpha a_n)^\delta$$

следует сходимость другого, и наоборот.

Сформулированные леммы доказываются стандартными приемами: лемма 1 с помощью критерия Коши сходимости ряда (см. [9, с. 11]), лемма 2 с помощью рассуждений, используемых при доказательстве теоремы Коши (см. [10, с. 21]). Применяя лемму 1, а также опираясь на (3) и рассуждая от противного, получим следующее следствие теоремы 2.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Следствие 1. *Пусть* $f \in K^\alpha$, *где* K^α – *один из классов предыдущей теоремы,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\alpha > 1/p$. *Тогда*

$$R_n(f, X) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{4}$$

Более того, существует такая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, *вообще говоря, зависящая от функции* f, *что*

$$R_{m_k}(f, C[a,b]) = o\big(m_k^{-\alpha} \ln^{-1/\max\{2,\varepsilon+1/\alpha\}} m_k\big) \qquad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

В алгебраическом случае, когда $f \in K^\alpha = W_+^\alpha L_p[a,b]$ и либо $\alpha = 1$, $p > 1$, либо $\alpha = 2, 3, \dots$, $p \geqslant 1$, соотношение (4) доказано Пекарским [7], [8], Поповым и Петрушевым (см. [5]). В [5] установлено, что на всем классе $W_+^\alpha L_p[a,b]$ (4) усилить нельзя. С другой стороны, следствие показывает, что (4) допускает эффективное уточнение для некоторой подпоследовательности.

Следующая теорема также является следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0$, *а* $f \in K^\alpha V$, *где* $K^\alpha V$ *является одним из четырех классов* $W_\pm^\alpha V[a,b]$, $W_\pm^\alpha V_{2\pi}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\big(n^{\alpha+1} R_n(f, C[a,b])\big)^2 < c(\alpha),$$

$$R_n(f, C[a,b]) = o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right), \tag{5}$$

где постоянная $c(\alpha)$ *зависит только от* α. *Более того, существует такая подпоследовательность* $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, *зависящая от функции* f, *что*

$$R_{m_k}(f, C[a,b]) = o(m_k^{-\alpha-1} \ln^{-1/2} m_k) \qquad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

В алгебраическом случае, когда $K^\alpha V = W_+^\alpha V[a,b]$, $\alpha = 1, 2, \dots$, теорема 3 ранее доказана в [11]. Тем самым, Пекарский получил уточнение хорошо известного результата Петрушева [12]. Для функций из этого класса соотношение (5) при всех $\alpha > 0$ другим методом ранее установлено автором в [13]. В периодическом случае при приближении индивидуальных функций теорема 3 уточняет оценку сверху в известной теореме Русака [14].

Рассмотрим теперь ситуацию, когда справедлива теорема Харди–Литтлвуда с предельным показателем.

Теорема 4. *Пусть* K^α *является одним из классов функций* $W^\alpha L_p[a,b]$, $W^\alpha L_p^{2\pi}$, *где* $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$. *Тогда при* $q = p/(1-\alpha p)$

$$\sup_{f \in K^\alpha} R_n(f, X_q) \asymp \frac{1}{n^\alpha},$$

где $X_q = L_q[a,b]$ *в алгебраическом случае и* $X_q = L_q^{2\pi}$ *в периодическом случае*[1].

[1] А. А. Пекарский заметил (устное сообщение), что класс K^α не компактен в X_q и, следовательно, $\sup_{f\in K^\alpha} E_n(f, X_q) \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 5. *Пусть $f \in K^\alpha$, где K^α – один из классов предыдущей теоремы и $0<\alpha<1/p$, $1<p<\infty$. Тогда при $q=p/(1-\alpha p)$*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\bigl(n^\alpha R_n(f,X_q)\bigr)^{\max\{2,p\}}<c_1(\alpha,p),$$

где постоянная $c_1(\alpha,p)$ зависит только от α и p и одна и та же для всех функций f.

Следствие 2. *Если $f\in K^\alpha$, где K^α – один из классов предыдущей теоремы, $0<\alpha<1/p$, $1<p<\infty$, $q=p/(1-\alpha p)$, то*

$$R_n(f,X_q)=o\biggl(\frac{1}{n^\alpha}\biggr).$$

Более того, существует такая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, зависящая, быть может, от функции f, что

$$R_{m_k}(f,X_q)=o\bigl(m_k^{-\alpha}\ln^{-1/\max\{2,p\}}m_k\bigr)\quad \text{при}\quad k\to\infty.$$

Теоремы 4, 5 и следствие 2 остаются в силе, если в них в качестве K^α взять класс $\widetilde{W^\alpha L_p^{2\pi}}:=\{\widetilde{f}:f\in W^\alpha L_p^{2\pi}\}$, состоящий из сопряженных функций. Это следует, например, из теоремы Рисса (см. [10, с. 566]).

2. Аппроксимационные пространства Петре, Спарра. Большинство цитируемых выше результатов, относящихся к рациональной аппроксимации рассматриваемых классов функций, в алгебраическом случае было получено с помощью соответствующего принципа “склеивания” рациональных функций (the theorem for “joining” of rational functions, см. [5, с. 115]). При дробных α (см. [4], [13]) метод “склеивания” сочетался с методом работы [15]. В периодическом случае [3], [14] доказательства осуществлялись с помощью рациональных операторов Русака. Каждый из этих результатов как в алгебраическом, так и в периодическом случаях доказывался весьма технично и индивидуально. В данной работе теоремы 1–5, содержащие новые и уже известные утверждения, их усиления и обобщения, получены автором как следствия теорем Пекарского (см. [16], [17]), описывающих связь между аппроксимационными пространствами Я. Петре, Г. Спарра и пространствами Харди–Соболева.

Рассмотрим единичный круг $D=\{z:|z|<1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $\mathscr{A}(D)$ – множество всех функций, аналитических в D. Через $H_p=H_p(D)$, $0<p\leqslant\infty$, обозначим пространство Харди в единичном круге со стандартной квазинормой

$$\|f\|_{H_p}:=\sup_{0<\rho<1}\|f(\,\cdot\,\rho)\|_{p,T},$$

где

$$\|f\|_p=\|f\|_{p,T}:=\biggl(\int_T|f(z)|^p\,|dz|\biggr)^{1/p},\qquad p\neq\infty,$$
$$\|f\|_\infty=\|f\|_{\infty,T}:=\sup_{z\in T}\operatorname{vrai}|f(z)|,\qquad p=\infty,$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

а $T = \{z : |z| = 1\}$ – единичная окружность. Если функция $f \in \mathscr{A}(D)$ представима в D степенным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, то функции

$$f^{(\alpha)}(z) := \sum_{k=[\alpha]}^{\infty} \frac{\Gamma(k-[\alpha]+1+\alpha)}{\Gamma(k-[\alpha]+1)} \widehat{f}_k z^{k-[\alpha]}, \qquad z \in D,$$

$$(\Im^{\alpha} f)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\alpha} \widehat{f}_k z^k, \qquad z \in D,$$

будем называть соответственно *производными Римана–Лиувилля* и *Вейля порядка* $\alpha > 0$ *функции* f. Введем в рассмотрение пространства Харди–Соболева (см. [17])

$$H_p^{\alpha} = H_p^{\alpha}(D) := \{f \in \mathscr{A}(D) : \|f^{(\alpha)}\|_{H_p} < \infty\}, \qquad \alpha > 0, \quad 0 < p \leqslant \infty,$$

и аппроксимационные пространства Петре, Спарра функций из H_p:

$$\mathscr{R}_{p,q}^{\alpha} := \{f \in H_p : \|f\|_{\mathscr{R}_{p,q}^{\alpha}} < \infty\}, \qquad \alpha > 0, \quad p, q \in (0, \infty],$$

где

$$\|f\|_{\mathscr{R}_{p,q}^{\alpha}} := \|f\|_{H_p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{k\alpha} R_{2^k}(f, H_p))^q\right)^{1/q}, \qquad q \neq \infty,$$

$$\|f\|_{\mathscr{R}_{p,\infty}^{\alpha}} := \|f\|_{H_p} + \sup_{k=0,1,\dots} 2^{k\alpha} R_{2^k}(f, H_p),$$

а

$$R_n(f, H_p) := \inf_{r \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{C}}} \|f - r\|_{H_p}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

– наилучшие приближения f в H_p рациональными функциями $r \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{C}}$, вообще говоря, с комплексными коэффициентами степени не выше n. В дальнейшем нам необходимы следующие непрерывные вложения, установленные в [17]:

A) если $\alpha > 0, \varepsilon > 0$, то

$$H_{1/\alpha+\varepsilon}^{\alpha} \subset \mathscr{R}_{\infty,\max\{2,1/\alpha+\varepsilon\}}^{\alpha};$$

B) если $1 < p < \infty, 0 < \alpha < 1/p, q = p/(1-\alpha p)$, то

$$H_p^{\alpha} \subset \mathscr{R}_{q,\max\{2,p\}}^{\alpha}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3. Интегралы Римана–Лиувилля и пространства Харди. Пусть функция $h \in L_1[-1,1]$, $\alpha \in (0,\infty)$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тогда по определению

$$(I_+^\alpha h)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{\alpha-1} h(t)\,dt, \qquad x \in [-1,1],$$

$$(I_-^\alpha h)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{1} (t-x)^{\alpha-1} h(t)\,dt, \qquad x \in [-1,1].$$

Рассматривая главную ветвь z^μ, т.е. $z^\mu = \exp(\mu \ln z)$, $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, определим функцию

$$(J^\alpha h)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^{1} (z-t)^{\alpha-1} h(t)\,dt, \qquad z \notin [-1,1].$$

Введем в рассмотрение предельные значения интеграла $(J^\alpha h)(z)$:

$$(J^\alpha h)(x \pm 0\cdot i) := \lim_{y\to\pm 0} (J^\alpha h)(x+iy), \qquad x \in [-1,1].$$

С учетом выбора главной ветви для степени получим

$$(J^\alpha h)(x \pm 0\cdot i) = (I_+^\alpha h)(x) + e^{\pm i\pi(\alpha-1)} (I_-^\alpha h)(x), \qquad x \in [-1,1].$$

Отсюда легко выразить $(I_\pm^\alpha h)(x)$ через $(J^\alpha h)(x \pm 0\cdot i)$ при $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha h)(x) &= \frac{1}{2}\bigl\{\bigl(1 + i\operatorname{ctg}\pi(\alpha-1)\bigr)(J^\alpha h)(x+0\cdot i) \\ &\quad + \bigl(1 - i\operatorname{ctg}\pi(\alpha-1)\bigr)(J^\alpha h)(x-0\cdot i)\bigr\}, \\ (I_-^\alpha h)(x) &= \frac{i}{2}\bigl\{(J^\alpha h)(x-0\cdot i) - (J^\alpha h)(x+0\cdot i)\bigr\}\frac{1}{\sin\pi(\alpha-1)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Равенства (6) позволяют сделать вывод о том, что свойства (в том числе и аппроксимационные) дробных интегралов $(I_\pm^\alpha h)(x)$ во многом аналогичны свойствам $(J^\alpha h)(x \pm 0\cdot i)$. Рассмотрим функцию $(J^\alpha h)(x+0\cdot i)$. Свойства $(J^\alpha h)(x-0\cdot i)$ исследуются аналогичным образом. Пусть

$$g_0(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^{1} (z-t)^{\alpha-1} h(t)\,dt, \qquad \operatorname{Im} z > 0. \tag{7}$$

В (7) сделаем замену $z = -(iw+1)/(w+i)$, при которой полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ конформно и однолистно отображается на единичный круг $D = \{w : |w| < 1\}$ так, что отрезок $[-1,1]$ переходит в полуокружность $T_+ = \{\xi : |\xi| = 1,\ \operatorname{Im}\xi \geqslant 0\}$. Тогда при $w \in D$ полагаем

$$g(w) := g_0\Bigl(-\frac{iw+1}{w+i}\Bigr) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-1}^{1} \Bigl(-\frac{iw+1}{w+i} - t\Bigr)^{\alpha-1} h(t)\,dt.$$

Совершая здесь аналогичную замену $t = -(i\xi+1)/(\xi+i)$ переменной интегрирования, получим

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(w+i)^{\alpha-1}} \int_{T_+} \Bigl(1 - \frac{w}{\xi}\Bigr)^{\alpha-1} \frac{h_1(\xi)}{\xi}\,d\xi, \qquad w \in D,$$

где

$$h_1(\xi) = \frac{2^{\alpha+1}\pi i}{\Gamma(\alpha)} \frac{(-1)^{\alpha-1}\xi^\alpha}{(\xi+i)^{\alpha+1}} h\Bigl(-\frac{i\xi+1}{\xi+i}\Bigr), \qquad \xi \in T_+.$$

Доказательство следующей леммы элементарно.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лемма 3. *Если $h \in L_p[-1,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то*

$$\|h_1\|_{L_p(T_+)} \leqslant c(\alpha)\|h\|_{L_p[-1,1]},$$

где постоянная $c(\alpha)$ зависит только от α.

Особая точка $w = -i$ функции $1/(w+i)^{\alpha-1}$ лежит на нижней полуокружности $T_- = \{\xi : |\xi| = 1, \operatorname{Im}\xi \leqslant 0\}$. Поэтому она является аналитической функцией на T_+, и ее аппроксимационные свойства на этой полуокружности описываются, например, теоремой Бернштейна–Уолша. Поэтому в дальнейшем вместо g будем рассматривать функцию

$$G(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \left(1 - \frac{w}{\xi}\right)^{\alpha-1} \frac{h_2(\xi)}{\xi}\,d\xi, \qquad w \in D,$$

полагая $h_2(\xi) = h_1(\xi)$, $\xi \in T_+$, и $h_2(\xi) = 0$, $\xi \in T_-$. Заметим, что предельное значение функции $g(w) = G(w)/(w+i)^{\alpha-1}$, когда $w \to \xi \in T_+$ по соответствующему радиусу круга D, совпадает со значением функции $(J^\alpha h)(-(iw+1)/(w+i)+0\cdot i)$ в точке $w=\xi$.

Рассмотрим теперь интеграл типа Коши

$$H(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{h_2(\xi)\,d\xi}{\xi - w} = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{H}_k w^k,$$
$$\widehat{H}_k = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{h_2(\xi)\,d\xi}{\xi^{k+1}}, \qquad |w| < 1.$$

Аналогично для функции G получим представление

$$G(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(k-\alpha)}{k!}\widehat{H}_k w^k, \qquad |w| < 1.$$

Согласно определению дробной производной Римана–Лиувилля от функции $G \in \mathscr{A}(D)$

$$G^{(\alpha)}(w) = \sum_{k=[\alpha]}^{\infty} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)}\,\frac{\Gamma(k-[\alpha]+\alpha+1)}{\Gamma(k-[\alpha]+1)}\widehat{H}_k w^{k-[\alpha]}, \qquad |w| < 1.$$

Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ назовем *мультипликатором в* H_p, если для любой функции $f \in H_p$ имеем $\|g\|_{H_p} \leqslant c\|f\|_{H_p}$, где $c > 0$ не зависит от функции f, а

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widehat{f}_k z^k.$$

Например, для $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ мультипликаторами в пространствах H_p, $0 < p \leqslant \infty$, являются последовательности (см. [16, лемма 1.1])

$$\lambda_k = \lambda_k(\gamma,\beta) = \frac{\Gamma(k+\gamma+\beta)}{(k+1)^\beta\Gamma(k+\gamma)}, \quad \mu_k = \mu_k(\gamma,\beta) = \frac{1}{\lambda_k}, \qquad k = 0,1,2,\dots.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лемма 4. *Обозначим через* $\{\alpha\}$ *дробную часть числа* $\alpha > 0$. *Тогда последовательности*

$$\lambda_k^* := \frac{\Gamma(k+1-\{\alpha\})}{\Gamma(k+[\alpha]+1)}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}, \quad \mu_k^* := \frac{1}{\lambda_k^*}, \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

являются мультипликаторами в пространствах H_p, $0 < p \leqslant \infty$.

Доказательство. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}$. Так как для всех $k = 0,1,2,\dots$

$$\lambda_k^* = \mu_k(1-\{\alpha\},\{\alpha\}) \cdot \lambda_k(1+[\alpha],\{\alpha\}) = \mu_k \cdot \lambda_k$$

и последовательности $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ являются мультипликаторами в пространствах H_p, $0 < p \leqslant \infty$, то мультипликатором будет и последовательность $\{\lambda_k^*\}_{k=0}^{\infty}$. Аналогично доказывается утверждение леммы для последовательности $\{\mu_k^*\}_{k=0}^{\infty}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* H *– интеграл типа Коши с плотностью* h_2. *Тогда при* $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ *и* $0 < p \leqslant \infty$

$$H \in H_p \iff G^{(\alpha)} \in H_p.$$

Доказательство. Из тождества Эйлера $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ получим, что

$$(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(k-\alpha) = \frac{\Gamma(k+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Тогда, принимая во внимание разложение $G^{(\alpha)}$ в степенной ряд, получим

$$\widehat{G}_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(k+1-\{\alpha\})}{\Gamma(k+[\alpha]+1)}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}\widehat{H}_{k+[\alpha]}.$$

Теперь применение леммы 4 завершает доказательство леммы 5.

4. Доказательства основных результатов. Перейдем к доказательству теоремы 2 в алгебраическом случае. Достаточно рассмотреть случай отрезка $[-1,1]$ и $\alpha \notin \mathbb{N}$. При $\alpha \in \mathbb{N}$ доказательство существенно упрощается и проводится по схеме, предложенной в [11]. Пусть $f = I^{\alpha}h$, где $\|h\|_{L_p[-1,1]} \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $\alpha > 1/p$. Для действительнозначной функции $g \in C(I)$ справедливы неравенства (см. [18, с. 209])

$$\frac{1}{2}R_n(g,C(I)) \leqslant R_n^{\mathbb{C}}(g,C(I)) \leqslant R_n(g,C(I)), \qquad n = 0,1,2,\dots.$$

Поэтому можно не следить за тем, действительными или комплексными являются коэффициенты приближающей рациональной дроби.

Функция h определяет интеграл типа Коши $H(w)$ и соответствующую ей функцию $g(z) = G(w)/(w+i)^{\alpha-1}$. По предположению $h \in L_p[-1,1]$. Поэтому на основании леммы 3 функция $h_1 \in L_p(T_+)$, а $h_2 \in L_p(T)$. Из теорем В. И. Смирнова ($p = 1$) и Рисса ($1 < p \leqslant \infty$) (см. [19, с. 82, 136]) следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ интеграл типа Коши $H \in H_{1/\alpha+\varepsilon}$. Согласно лемме 5 в этом случае будем иметь, что

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$G^{(\alpha)} \in H_{1/\alpha+\varepsilon}$. Поэтому $G \in H^{\alpha}_{1/\alpha+\varepsilon}$. Далее, непрерывное вложение А) позволяет записать, что $G \in \mathscr{R}^{\alpha}_{\infty,\max\{2,1/\alpha+\varepsilon\}}$. Следовательно, с учетом леммы 2

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}\bigl(n^{\alpha} R_n(G, C(T))\bigr)^{\max\{2,1/\alpha+\varepsilon\}} \leqslant c_2(\alpha, p). \tag{8}$$

По теореме Бернштейна–Уолша найдется такой полином p_n, $\deg p_n \leqslant n$, что

$$\left|\frac{1}{(w+i)^{\alpha-1}} - p_n(w)\right| \leqslant \frac{c}{q^n}, \qquad w \in T_+,$$

где $0 < q < 1$ – фиксированное число, а постоянная $c = c(\alpha) > 0$. Обозначим через r_n, $\deg r_n \leqslant n$, – дробь наилучшего приближения функции G на единичной окружности T. Тогда для всех $w \in T_+$ получим, что

$$|g(w) - p_n(w) r_n(w)| \leqslant c_3(\alpha, p)\bigl(q^n + R_n(G, C(T))\bigr).$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}\bigl(n^{\alpha} R_n(g, C(T_+))\bigr)^{\max\{2,1/\alpha+\varepsilon\}} \leqslant c_4(\alpha, p).$$

Теперь, сделав обратную дробно-линейную замену, которая полуокружность T_+ отображает на отрезок $[-1, 1]$, получим необходимое утверждение для функции $(J^{\alpha})(x+0i)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}\bigl(n^{\alpha} R_n((J^{\alpha}h)(\cdot + 0i), C[-1, 1])\bigr)^{\max\{2,1/\alpha+\varepsilon\}} \leqslant c_5(\alpha, p).$$

Точно так устанавливается аналогичное утверждение и для функции $(J^{\alpha}h)(x - 0i)$. Поэтому с учетом (6) получим неравенство (3) для $f \in W^{\alpha}_{+}L_p[-1, 1]$. Случай, когда $f \in W^{\alpha}_{-}L_p[-1, 1]$, рассматривается аналогичным образом. Теорема 2 в алгебраическом случае доказана.

Доказательство в периодическом случае существенно упрощается. Оно в основных деталях повторяет доказательство теоремы 5 в периодическом случае (см. далее), поэтому мы его опускаем.

Теорема 2 дает оценку сверху в теореме 1. Примеры функций, на которых в (1) верхние оценки для рассматриваемых классов функций достигаются, имеются, например, в [3], [4].

Перейдем к доказательству теоремы 5. Начнем с алгебраического случая. Достаточно рассмотреть отрезок $[-1, 1]$. Пусть $f \in W^{\alpha}L_p[-1, 1]$, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1 - \alpha p)$. Тогда $f = I^{\alpha}h$, $\|h\|_{L_p[-1,1]} \leqslant 1$. Функции h поставим в соответствие интеграл типа Коши с плотностью $h_2 \in L_p(T)$ и функцию $g(w) = G(w)/(w + i)^{\alpha-1}$, $w \in T_+$. По теореме Рисса интеграл типа Коши $H \in H_p$. Согласно лемме 5 в таком случае и $G^{(\alpha)} \in H_p$. Поэтому $G \in H^{\alpha}_p$. Применяя теперь непрерывное вложение В), получим, что $G \in \mathscr{R}^{\alpha}_{q,\max\{2,p\}}$. Отсюда, принимая во внимание лемму 2, для функции

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$G = G(\xi)$, $\xi \in T$, определяемой некасательными предельными значениями G, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} \big(n^{\alpha} R_n(G, L_q(T_+))\big)^{\max\{2,p\}} \leqslant c_3(\alpha, p).$$

Далее, применим к функции $1/(w+i)^{\alpha-1}$ теорему Бернштейна–Уолша и, используя рассуждения, аналогичные приводимым при доказательстве теоремы 2, получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} \big(n^{\alpha} R_n(g, L_q(T_+))\big)^{\max\{2,p\}} \leqslant c_4(\alpha, p).$$

Сделав обратную замену, которая отображает полуокружность T_+ на отрезок $[-1, 1]$, докажем нужное утверждение для $(J^{\alpha} h)(x + 0i)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} \big(n^{\alpha} R_n((J^{\alpha} h)(\,\cdot\, + 0i), L_q[-1, 1])\big)^{\max\{2,p\}} \leqslant c_5(\alpha, p).$$

Аналогично доказывается соответствующее утверждение и для функции $(J^{\alpha} h)(x - 0i)$. Принимая во внимание равенства (6), отсюда получим необходимое неравенство. Таким образом, при сделанных предположениях теорема 5 в алгебраическом случае доказана. Случай, когда $f \in W^{\alpha}_{-} L_p[-1, 1]$, рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь периодический случай. Предположим, что функция $f \in W^{\alpha} L_p^{2\pi}$, $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(1 - \alpha p)$. Это значит, что $f = I^{(\alpha)} h$, где $\|h\|_{L_p^{2\pi}} \leqslant 1$. Пусть

$$h(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{h}_k e^{ikx}$$

– ряд Фурье функции h, а числа

$$\widehat{h}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} h(t)\, dt$$

являются ее коэффициентами Фурье. Считаем, что $\widehat{h}_0 = 0$. Известно, что если $\phi \in L_p^{2\pi}$, $1 < p < \infty$, то ее ряд Фурье сходится к ϕ в среднем, т.е. в метрике пространства $L_p^{2\pi}$. Поэтому для таких функций в дальнейшем будем писать равенство

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}_k e^{ikx},$$

понимая его соответствующим образом.

Согласно определению дробного интеграла Вейля от 2π-периодических функций (см. [1, с. 264]) имеем

$$f(x) = (I^{(\alpha)} h)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{h}_k}{(ik)^{\alpha}} e^{ikx},$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

где

$$(ik)^\alpha = |k|^\alpha e^{(\alpha\pi i/2)\,\mathrm{sign}\,k}.$$

Так как $h \in L_p^{2\pi}$, $1 < p < \infty$, то по теореме Рисса сопряженная функция $\widetilde{h} \in L_p^{2\pi}$ и $\|\widetilde{h}\|_{L_p^{2\pi}} \leqslant c(p)\|h\|_{L_p^{2\pi}}$. При $z = e^{ix}$ рассмотрим функцию $\varphi(z) = \varphi(e^{ix}) = h(x) + i\widetilde{h}(x)$, определенную на единичной окружности. Известно (см. [2, с. 213]), что ряд Фурье комплекснозначной функции $\varphi(e^{ix})$ имеет степенной тип и

$$\varphi(e^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\widehat{h}_k e^{ikx}.$$

Согласно теореме Харди–Литтлвуда с предельным показателем дробный интеграл Вейля от функции $\varphi(e^{ix})$

$$g(e^{ix}) := (I^{(\alpha)}\varphi)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\widehat{h}_k}{(ik)^\alpha} e^{ikx}$$

принадлежит пространству $L_q^{2\pi}$ и $\|g\|_{q,T} = \|g(e^{ix})\|_{L_q^{2\pi}} \leqslant c(\alpha,p)\|\varphi\|_{L_p^{2\pi}}$. Тогда из теоремы Рисса следует, что интеграл типа Коши

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{g(\xi)\,d\xi}{\xi - z}, \qquad |z| < 1,$$

принадлежит пространству Харди H_q. Далее, нетрудно заметить, что

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{G}_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\widehat{h}_k}{(ik)^\alpha} z^k, \qquad |z| < 1.$$

Поэтому

$$(\Im^\alpha G)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^\alpha \frac{2\widehat{h}_k}{(ik)^\alpha} z^k, \qquad |z| < 1.$$

Последовательность $\{(k+1)^\alpha/(ik)^\alpha\}_{k=1}^{\infty}$, очевидно, является мультипликатором в H_μ при $\mu > 0$. Поэтому из неравенства $\|\varphi\|_{p,T} \leqslant c(p)\|h\|_{L_p^{2\pi}}$ получим, что $\Im^\alpha G \in H_p$. Поскольку последовательность $\{\lambda_k(1,\alpha)\}_{k=0}^{\infty}$ есть мультипликатор в H_μ, $\mu > 0$ (см. [16, лемма 1.1]), то из того, что $\Im^\alpha G \in H_p$ следует, что и $G^{(\alpha)} \in H_p$. Поэтому, учитывая непрерывное вложение B) и применяя лемму 2, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\bigl(n^\alpha R_n(g, L_q(T))\bigr)^{\max\{2,p\}} \leqslant c_2(\alpha,p).$$

Заметим, что $\mathrm{Re}\, g(e^{ix}) = f(x)$, $R_{2n}(f, L_q^{2\pi}) \leqslant R_n(g, L_q(T))$ (см. [18, с. 323]). Поэтому окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\bigl(n^\alpha R_n(f, L_q^{2\pi})\bigr)^{\max\{2,p\}} \leqslant c_3(\alpha,p).$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 5 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Вначале рассмотрим периодический случай. Необходимо доказать, что

$$\sup_{f\in W^\alpha L_p^{2\pi}} R_n(f, L_q^{2\pi}) \geqslant \frac{c_1(\alpha,p)}{n^\alpha}, \qquad n=0,1,2,\dots. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию $h(x) = (8\pi)^{-1}\sin(4nt + \alpha\pi/2)$. В. Н. Русак и Д. Брайесс в [20] показали, что $f(x) = (I^{(\alpha)}h)(x) = (2\pi)^{-1}(4n)^{-\alpha}\sin 4nx$, и для любой рациональной тригонометрической функции $r_n(x)$ степени не выше n и $q\geqslant 1$

$$(2\pi)^{(q-1)/q}\|f - r_n\|_{L_q^{2\pi}} \geqslant \frac{1}{2\pi(4n)^\alpha}.$$

Учитывая, что $\|h\|_{L_p^{2\pi}} \leqslant 1$, отсюда следует справедливость неравенства (9). Теорема 4 в периодическом случае доказана. Рассуждения из [20] остаются в силе, если вместо f рассмотреть функцию $\widetilde{f}$. Поэтому

$$\sup_{f\in \widetilde{W^\alpha L_p^{2\pi}}} R_n(f, L_q^{2\pi}) \geqslant \frac{c_2(\alpha,p)}{n^\alpha}, \qquad n=0,1,2,\dots.$$

В непериодическом случае без ограничения общности можно считать, что $[a,b]=[0,1]$. Тогда в справедливости неравенства

$$\sup_{f\in W^\alpha L_p[0,1]} R_n(f, L_q[0,1]) \geqslant \frac{c_3(\alpha,p)}{n^\alpha}$$

можно убедиться, если в качестве f взять функцию, которая лишь постоянным множителем, зависящим только от α и p, отличается от функции

$$\frac{\sin 2\pi x}{n^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}h_\alpha(t)\,dt,$$

где $\|h_\alpha\|_{L_p[0,1]} \leqslant c(\alpha,p)$. Доказательство этого утверждения проводится аналогично периодическому случаю. Теорема 4 доказана.

Автор благодарит профессора А. А. Пекарского за консультации и внимание к работе. Отметим также, что основные результаты статьи анонсированы в [21].

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
[2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
[3] Русак В. Н. Точные порядки наилучших рациональных приближений свертки ядра Вейля и функций из L_p // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. №2. С. 313–316.
[4] Старовойтов А. П. Точные порядки рациональных приближений свертки ядра Римана–Лиувилля и функций из L_p // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. №1. С. 27–30.
[5] Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of Real Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
[6] Popov V. A. On the connection between rational uniform approximation and polynomial L_p approximation of functions // Quantitative Approximation. New York: Academic Press, 1980. P. 267–277.
[7] Пекарский А. А. Рациональная аппроксимация периодических функций в $\widetilde{L}^p$ // Деп. ВИНИТИ № 1209-77. М.: ВИНИТИ, 1977.
[8] Пекарский А. А. Рациональная аппроксимация и пространства Орлича // Деп. ВИНИТИ № 314-78. М.: ВИНИТИ, 1978.
[9] Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ в примерах и задачах. Т. 2. Киев: Вища школа, 1977.
[10] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
[11] Пекарский А. А. Скорость рациональной аппроксимации и дифференциальные свойства функций // Anal. Math. 1991. V. 17. P. 153–171.
[12] Петрушев П. П. Равномерные рациональные аппроксимации функций класса V_r // Матем. сб. 1979. Т. 108 (150). №3. С. 419–432.
[13] Старовойтов А. П. Рациональная аппроксимация функций из $W^rV[a,b]$ // Тр. семинара Ин-та прикладной матем. им. И. Н. Векуа Тбилисского госуниверситета. 1985. Т. 1. №2. С. 129–133.
[14] Русак В. Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки // Матем. сб. 1985. Т. 128 (170). №4. С. 492–515.
[15] Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями // Матем. сб. 1967. Т. 78 (115). №4. С. 630–638.
[16] Пекарский А. А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. 1984. Т. 124. №4. С. 571–588.
[17] Пекарский А. А. Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p // Матем. сб. 1985. Т. 127. №1. С. 3–20.
[18] Lorentz G., v. Golitschek M., Makavoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
[19] Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.
[20] Русак В. Н., Брайесс Д. Наилучшие полиномиальные и рациональные приближения функциональных классов в интегральной метрике // Докл. АН Беларуси. 1992. Т. 36. №3–4. С. 205–208.
[21] Старовойтов А. П. Скорость рациональной аппроксимации дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. №3. С. 18–23.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: `Svoitov@gsu.unibel.by`

Поступило
02.04.2004

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ