Математические заметки

Том 99 выпуск 3 март 2016

УДК 517.538.52+517.538.53

Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита–Паде для набора экспоненциальных функций

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко

В работе установлены верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита–Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Доказанные утверждения дополняют и обобщают известные результаты Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, Ф. Вилонского о поведении нулей аппроксимаций Эрмита–Паде для набора экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$.

Библиография: 37 названий.

DOI: 10.4213/mzm10668

1. Введение

Различают два типа диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций (см. [1], [2]). Один из них (German type – тип II) состоит из совместных рациональных приближений

$$\pi_n^{\langle j\rangle}(z;e^{j\xi})=\frac{p_n^{\langle j\rangle}(z)}{q_n(z)}, \qquad j=1,2,\dots,k,$$

набора экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$, где многочлены $p_n^{\langle j\rangle}$, q_n имеют степень не выше kn и определяются из условий

$$q_n(z)e^{jz}-p_n^{\langle j\rangle}(z)=O(z^{kn+n+1}), \qquad z\to 0. \tag{1.1}$$

Впервые такие конструкции рациональных дробей появились в известной работе Эрмита [3], посвященной доказательству трансцендентности числа e. Линдеман (см. [4]) определил аналоги дробей Эрмита для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные алгебраические числа, и применил их, в частности, для доказательства трансцендентности числа π. Аптекаревым [5] была установлена равномерная сходимость рациональных функций $\pi_n^{\langle j\rangle}(z;e^{\lambda_j\xi})$ к $e^{\lambda_j z}$ на компактах в $\mathbb{C}$ для систем $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ с произвольными различными и отличными от нуля комплексными показателями λ_j. При $k=1$ этот результат хорошо известен и принадлежит Паде [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2011–2015 годы.

Немного позже Эрмит [7] ввел другой тип аппроксимаций (Latin type – тип I), с помощью которых также можно доказать трансцендентность числа e [8]. Для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ эти аппроксимации совпадают с набором из $k+1$ многочленов $\{A_p(z)\}_{p=0}^{k}$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \qquad z \to 0, \tag{1.2}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

При $k=1$ общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1.1), (1.2), принадлежит Паде [6]. В многомерном случае, когда $k \geqslant 2$, с выходом в свет работ К. Малера [1], [8], [9] изучение аппроксимаций Эрмита–Паде I и II типов для произвольных систем аналитических функций становится более интенсивным и приобретает системный характер (подробнее о создании формальной теории см., например, [2], [10], [11]).

Оба типа аппроксимаций, явно различные в многомерном случае, традиционно имеют множество приложений в теории приближений аналитических функций [12]–[15] и в теории чисел, в частности, для измерения иррациональности [16], в доказательствах трансцендентности [9], в исследованиях алгебраической природы математических констант [17] (о других приложениях см., например, [18]–[22]).

В одномерном случае, когда $k=1$, приходим к классическим аппроксимациям Паде экспоненты. При этом многочлены Паде

$$p_{n-1}(z) := p_{n-1}^{\langle 1\rangle}(z) = -A_0(z), \qquad q_{n-1}(z) = A_1(z)$$

находятся из условий

$$q_{n-1}(z)e^{z} - p_{n-1}(z) = O(z^{2n-1}) \tag{1.3}$$

с точностью до однородной константы. Однородная константа задается удобными в конкретной ситуации условиями нормировки, которые однозначно определяют эти многочлены.

Поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспоненциальной функцией, исследовал Сеге [23]. Сафф и Варга [24] изучили расположение нулей аппроксимаций Паде экспоненты и нашли границы кольца, в котором находятся нули ее многочленов Паде. В частности, в диагональном случае ими доказано следующее утверждение, известное как “теорема о кольце”.

Теорема 1 (Сафф, Варга [24]). *Для любых $n \geqslant 2$ все нули аппроксимаций Паде $p_{n-1}(z)/q_{n-1}(z)$ функции e^z лежат в кольце*

$$K = \left\{ z : 2(n-1)\mu < z < 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\right\},$$

где $\mu = 0,278465$ – единственный положительный корень уравнения $te^{t+1} = 1$.

В силу хорошо известного тождества $q_{n-1}(z) = p_{n-1}(-z)$, предыдущее утверждение справедливо и для нулей $q_{n-1}(z)$.

В работе [25] Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей многочленов $\{A_p(z)\}_{p=0}^{k}$, которые определяются равенствами (1.2). Шталь [26] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде I и II типов системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости. Эти исследования продолжены им в [27] (см. также работы [28]–[34]).

В данной статье рассматриваются диагональные аппроксимации Эрмита–Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ с произвольными различными комплексными показателями $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$. Нас интересует поведение нулей многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, имеющих степень не выше $n-1$ и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \qquad z \to 0. \tag{1.4}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n \geqslant 2$, $k \geqslant 1$ нули многочлена $A_n^p(z)$, $0 \leqslant p \leqslant k$, лежат в круге $\{z : |z| < R_n^p\}$, где*

$$R_n^p = 2\biggl(n - \frac{1}{3}\biggr)\Biggl[\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_{p-j}|} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{|\lambda_{p+j} - \lambda_p|}\Biggr]. \tag{1.5}$$

В случаях, когда $p=0$ или $p=k$, соответственно первая и вторая суммы в скобках равны нулю.

При $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \dots, k$ и $k = 1$ из теоремы 2 следует, что все нули многочленов Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < 2(n-1/3)\}$, что согласуется с теоремой Саффа, Варги.

Если $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \dots, k$, и $k \geqslant 2$, то из (1.5) в качестве следствия вытекает теорема 2.2 из работы [25] Вилонского: *все нули многочлена $A_p(z)$, лежат в круге $\{z : |z| < R_p\}$, где*

$$R_p = 2\biggl(n - \frac{1}{3}\biggr)\Biggl[\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{j}\Biggr].$$

Заметим, что многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, удовлетворяющие равенствам (1.4), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Более того, такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что искомые многочлены можно представить в виде

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant k, \tag{1.6}$$

где $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1)\cdots(\xi - \lambda_k)$.

2. Доказательство теоремы 2

В линейном пространстве $\mathcal{P}$, состоящем из всех многочленов, определим линейные операторы
$$T_\lambda = \lambda I + D,$$
где λ – произвольное комплексное число, I – единичный оператор, а $D = d/dz$ – оператор дифференцирования.

Лемма 1. *Любые два оператора $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}$ коммутативны, т.е.*
$$T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2} = T_{\lambda_2} \cdot T_{\lambda_1}.$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из легко проверяемого равенства
$$T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2}(S) = \lambda_1 \lambda_2 S + (\lambda_1 + \lambda_2) S' + S'', \qquad S \in \mathcal{P}.$$
Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ и $S \in \mathcal{P}$ справедливы тождества*
$$D^p(e^{\lambda z} \cdot S(z)) = e^{\lambda z} \cdot T_\lambda^p(S(z)), \qquad p = 1, 2, \dots . \tag{2.1}$$

Доказательство. Так как
$$D(e^{\lambda z} \cdot S(z)) = e^{\lambda z}(\lambda S(z) + S'(z)),$$
то при $p = 1$ тождество (2.1) доказано. Далее применим метод индукции. Предположим, что $p \geqslant 2$ и (2.1) справедливо при $p - 1$. Тогда, используя утверждение леммы 1, получаем
$$\begin{aligned} D^p(e^{\lambda z} \cdot S(z)) &= D[D^{p-1}(e^{\lambda z} \cdot S(z))] = D[e^{\lambda z}(\lambda I + D)^{p-1}(S(z))] \\ &= e^{\lambda z} \cdot T_\lambda^{p-1}(\lambda S(z) + S'(z)) = e^{\lambda z} \cdot T_\lambda^p(S(z)). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Найдем явный вид обратного оператора к T_λ^m в случае, когда $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda \neq 0$. Для этого на $\mathcal{P}$ определим линейные операторы
$$A_{\lambda, m} S := \lambda^{-m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.2}$$

Если $S \in \mathcal{P}$, то правая часть в (2.2) состоит из конечного числа слагаемых. Это следует из того, что при $j > \deg S$ j-й член ряда в (2.2) равен нулю.

Лемма 3. *При $\lambda \neq 0$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ обратный оператор для оператора T_λ^m существует и, если обозначить его через T_λ^{-m}, то*
$$T_\lambda^{-m} S := \lambda^{-m} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m-1-j}{m-1} \frac{D^j S}{\lambda^j}. \tag{2.3}$$

Доказательство. При $m = 0$ утверждение леммы справедливо, так как в этом случае из определения биномиальных коэффициентов (см. [35; п. 1.5, приложение I]) следует, что $T_\lambda^{-m} = I$. Пусть $m \geqslant 1$. Используя рекуррентную формулу для биномиальных коэффициентов и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} A_{\lambda,m} \cdot (\lambda I + D)S &= \lambda\, A_{\lambda,m} \cdot \left(I + \frac{D}{\lambda}\right)S \\ &= \lambda^{-m+1}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^j S}{\lambda^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} \frac{D^{j+1} S}{\lambda^{j+1}}\right] \\ &= \lambda^{-m+1}\left[S + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\binom{-m}{j} + \binom{-m}{j-1}\right\}\frac{D^j S}{\lambda^j}\right] \\ &= \lambda^{-m+1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-m+1}{j}\frac{D^j S}{\lambda^j} = A_{\lambda,m-1}S. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_{\lambda,m} \cdot T_\lambda = A_{\lambda,m-1}$. Поэтому справедливы равенства

$$(A_{\lambda,m} \cdot T_\lambda^m)S = A_{\lambda,m} \cdot T_\lambda \cdot T_\lambda^{m-1}(S) = (A_{\lambda,m-1} \cdot T_\lambda^{m-1})S = \cdots = A_{\lambda,0}S = S.$$

Отсюда следует, что оператор $A_{\lambda,m}$ является левым обратным к оператору T_λ^m. Поскольку согласно лемме 1 эти операторы коммутативны, то $A_{\lambda,m}$ является и правым обратным к оператору T_λ^m.

Для биномиальных коэффициентов имеют место равенства

$$\binom{-m}{j} = (-1)^j \binom{m-1+j}{j} = (-1)^j \binom{m-1+j}{m-1}.$$

Поэтому из (2.2) следует, что оператор T_λ^{-m} можно представить в виде (2.3). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *При $n \geqslant 2$ многочлены Паде q_{n-1}, p_{n-1} можно нормировать так, что*

$$\begin{aligned} q_{n-1}(z) = p_{n-1}(-z) &= T_1^{-n}(z^{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \binom{n-1-j}{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!}\, z^{n-1-j}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (1.3) n раз, с учетом леммы 2 получим

$$e^z\, T_1^n(q_{n-1}(z)) = c_n(2n-1)(2n-2)\cdots n z^{n-1} + \cdots .$$

Отсюда, так как $e^{-z} = 1 - z + \cdots$,

$$T_1^n(q_{n-1}(z)) = c_n(2n-1)(2n-2)\cdots n z^{n-1} + \cdots . \tag{2.5}$$

Слева в (2.5) стоит многочлен степени не выше $n-1$. Поэтому

$$T_1^n(q_{n-1}(z)) = c_n(2n-1)(2n-2)\cdots n z^{n-1}.$$

Выбирая условия нормировки $q_{n-1}(z)$ так, чтобы $c_n = ((2n-1)(2n-2)\cdots n)^{-1}$, и учитывая линейность оператора T_1^n, получим, что

$$T_1^n(q_{n-1}(z)) = z^{n-1}.$$

Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 3. Лемма 4 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Сначала найдем новое представление для многочлена $A_n^p(z)$. Для этого разделим равенство (1.4) на $e^{\lambda_0 z}$ и затем продифференцируем n раз. С учетом леммы 2 получим

$$e^{(\lambda_k-\lambda_0)z}T^n_{\lambda_k-\lambda_0}(A_n^k(z)) + \cdots + e^{(\lambda_1-\lambda_0)z}T^n_{\lambda_1-\lambda_0}(A_n^1(z)) = O(z^{kn-1}).$$

Разделим предыдущее равенство на $e^{(\lambda_1-\lambda_0)z}$ и затем продифференцируем n раз. В результате приходим к равенству

$$e^{(\lambda_k-\lambda_1)z}T^n_{\lambda_k-\lambda_1}T^n_{\lambda_k-\lambda_0}(A_n^k(z)) + \cdots + e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}T^n_{\lambda_2-\lambda_1}T^n_{\lambda_2-\lambda_0}(A_n^2(z)) = O(z^{(k-1)n-1}).$$

Повторяя указанную последовательность действий еще $p-2$ раз, получим, что

$$\begin{aligned}&e^{(\lambda_k-\lambda_{p-1})z}T^n_{\lambda_k-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_k-\lambda_1}T^n_{\lambda_k-\lambda_0}(A_n^k(z)) + \cdots\\ &\quad + e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})z}T^n_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_p-\lambda_1}T^n_{\lambda_p-\lambda_0}(A_n^p(z)) = O(z^{(k-p+1)n-1}).\end{aligned}$$

Разделим теперь предыдущее равенство на $e^{(\lambda_k-\lambda_{p-1})z}$ и продифференцируем n раз. Повторив эту процедуру еще $k-p-1$ раз, придем к окончательному соотношению:

$$T^n_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}\cdots T^n_{-(\lambda_k-\lambda_p)}T^n_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_p-\lambda_1}T^n_{\lambda_p-\lambda_0}(A_n^p(z)) = O(z^{n-1})\,.$$

Так как в левой части предыдущего равенства стоит многочлен степени не выше $n-1$, то

$$T^n_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}\cdots T^n_{-(\lambda_k-\lambda_p)}T^n_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}\cdots T^n_{\lambda_p-\lambda_1}T^n_{\lambda_p-\lambda_0}(A_n^p(z)) = c_p z^{n-1}.$$

Отсюда, с учетом леммы 3, следует, что

$$A_n^p(z) = c_p T^{-n}_{\lambda_p-\lambda_0}T^{-n}_{\lambda_p-\lambda_1}\cdots T^{-n}_{\lambda_p-\lambda_{p-1}}T^{-n}_{-(\lambda_k-\lambda_p)}\cdots T^{-n}_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}(z^{n-1}). \tag{2.6}$$

Далее воспользуемся следующей теоремой Уолша [36] (см. также [37; гл. 4, § 18, теорема 18.1]).

Теорема 3 (Уолш). *Предположим, что*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j, \qquad g(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j\, z^j = b_n\prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j),$$

$$h(z) = \sum_{j=0}^{n}(n-j)!\,b_{n-j}f^{(j)}(z).$$

Тогда если нули $f(z)$ лежат в круге U, то все нули $h(z)$ являются точками множества G, которое состоит из n кругов U_j, $j=1,2,\dots,n$, где круг U_j получен параллельным переносом U в направлении вектора β_j на величину, равную длине вектора β_j.

Пусть S_{n-1} – произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Принимая во внимание равенство (2.3), нетрудно заметить, что функции

$$f(z) = S_{n-1}(z), \qquad h(z) = T_{\lambda}^{-n}(S_{n-1}(z)), \quad \lambda \neq 0,$$
$$g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1-j}\, z^{n-1-j} = \lambda^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(n-1-j)!} \binom{n-1-j}{n-1} \frac{z^{n-1-j}}{\lambda^j}$$

удовлетворяют условиям теоремы Уолша. Кроме того, если сравнить предыдущее равенство для многочлена $g(z)$ и равенство (2.4), то легко обнаружить, что

$$g(z) = \frac{\lambda^{-2n+1}}{(n-1)!} q_{n-1}(\lambda z).$$

Из теоремы 1 следует, что нули $q_{n-1}(\lambda z)$ по модулю меньше $2(n-1/3)/|\lambda|$. Согласно теореме Уолша нули $h(z) = T_{\lambda}^{-n}(S_{n-1}(z))$ по модулю меньше $\rho + 2(n-1/3)/|\lambda|$, где ρ – радиус круга с центром в нуле, который содержит все нули $S_{n-1}(z)$.

Применим предыдущее утверждение для

$$S_{n-1}(z) = z^{n-1} \qquad \text{и} \qquad h(z) = T^{-n}_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}(z^{n-1}).$$

Тогда нули $h(z)$ по модулю меньше

$$2\left(n - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{|\lambda_{p+1} - \lambda_p|}.$$

Далее, полагая

$$S_{n-1}(z) = T^{-n}_{-(\lambda_{p+1}-\lambda_p)}(z^{n-1}), \qquad h(z) = T^{-n}_{-(\lambda_{p+2}-\lambda_p)}(S_{n-1}(z)),$$

еще раз применим предыдущее утверждение. Тогда нули $h(z)$ по модулю меньше

$$2\left(n - \frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{|\lambda_{p+2} - \lambda_p|} + \frac{1}{|\lambda_{p+1} - \lambda_p|}\right].$$

Опираясь на равенство (2.6) и продолжая аналогичные рассуждения, после конечного числа шагов получим, что нули полинома A_n^p по модулю меньше

$$2\left(n - \frac{1}{3}\right)\left[\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_{p-j}|} + \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{|\lambda_{p+j} - \lambda_p|}\right].$$

Теорема 2 доказана.

3. Точность оценки. Примеры

Согласно теореме 2 нули многочленов Эрмита A_n^p лежат в круге с центром в нуле, радиус которого R_n^p зависит как от степени многочлена, так и от взаимного расположения множителей в показателях экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 2 верхней оценки для модулей нулей A_n^p в случае, когда n фиксировано, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Представление многочленов A_n^p с помощью интегралов в виде (1.6) позволяет получить для них явные выражения, а при $n = 2, 3, 4$ найти точные значения всех нулей A_n^p. Для простоты здесь ограничимся случаями, когда $n = 2, 3$.

Прежде чем перейти к примерам, напомним, что при $\varepsilon \to 0$ две бесконечно большие функции $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$, принимающие положительные значения, имеют одинаковый порядок ($\varphi(\varepsilon) \asymp \psi(\varepsilon)$), если $\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon)/\psi(\varepsilon) = A$, где $0 < A < +\infty$.

3.1. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Далее запись

$$A_n^p : z_j^p(\varepsilon), \qquad j = 1, 2, \dots, n-1$$

означает, что $z_j^p(\varepsilon)$ – все нули многочлена A_n^p.

Пусть $r_n^p(\varepsilon) := \max\{|z_j^p(\varepsilon)| : j = 1, 2, \dots, n-1\}$, а $R_n^p(\varepsilon)$ – радиус круга, содержащего все нули, который определяется равенством (1.5). Тогда

$$A_2^0 : z_1^0(\varepsilon) = -2\frac{(2+\varepsilon)}{1+\varepsilon}, \qquad A_2^1 : z_1^1(\varepsilon) = -2\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad A_2^2 : z_1^2(\varepsilon) = 2\frac{(1+2\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$r_2^p(\varepsilon) \asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{для} \quad p = 1, 2,$$
$$4 \leqslant r_2^0(\varepsilon) < R_2^0(\varepsilon) = \frac{10}{3}\left(1 + \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{20}{3}.$$

Аналогично

$$A_3^0 : z_{1,2}^0(\varepsilon) = \frac{-3(2+\varepsilon) \pm i\sqrt{3}\sqrt{2+2\varepsilon+\varepsilon^2}}{1+\varepsilon},$$
$$A_3^1 : z_{1,2}^1(\varepsilon) = \frac{-3(1-\varepsilon) \pm i\sqrt{3}\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon},$$
$$A_3^2 : z_{1,2}^2(\varepsilon) = \frac{3(1+2\varepsilon) \pm i\sqrt{3}\sqrt{1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}}{\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$r_3^p(\varepsilon) \asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{для} \quad p = 1, 2,$$
$$\sqrt{42} \leftarrow r_3^0(\varepsilon) < R_3^0(\varepsilon) = \frac{16}{3}\left(1 + \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{32}{3}.$$

3.2. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Сохраняя предыдущие обозначения, с помощью элементарных вычислений получаем

$$A_2^0 : z_1^0(\varepsilon) = -\frac{(6-2\varepsilon)}{1-\varepsilon^2}, \qquad A_2^1 : z_1^1(\varepsilon) = -\frac{(3-5\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon)},$$
$$A_2^2 : z_1^2(\varepsilon) = 2, \qquad A_2^3 : z_1^3(\varepsilon) = \frac{(3+5\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$
\begin{gathered}
r_2^p(\varepsilon) \asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{для} \quad p = 1, 3, \\
6 \leftarrow r_2^0(\varepsilon) < R_2^0(\varepsilon) = \frac{10}{3}\biggl(1 + \frac{2}{1-\varepsilon^2}\biggr), \\
2 = r_2^2(\varepsilon) < R_2^2(\varepsilon) = \frac{10}{3}\biggl(1 + \frac{2}{\varepsilon}\biggr) \asymp \frac{1}{\varepsilon}.
\end{gathered}
$$

Если $\varepsilon \to 1$, то

$$
\begin{gathered}
r_2^p(\varepsilon) \asymp R_2^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1-\varepsilon} \qquad \text{для} \quad p = 0, 1, \\
2 = r_2^2(\varepsilon) < R_2^2(\varepsilon) = \frac{10}{3}\biggl(1 + \frac{2}{\varepsilon}\biggr), \\
4 \leftarrow r_2^3(\varepsilon) < R_2^3(\varepsilon) = \frac{10}{3}\biggl(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{3}{2\varepsilon}\biggr).
\end{gathered}
$$

Аналогично,

$$
\begin{aligned}
A_3^0 : z_{1,2}^0(\varepsilon) &= -\frac{9 - \varepsilon^2 \pm i\sqrt{3}\,\sqrt{3+\varepsilon^4}}{1-\varepsilon^2}, \\
A_3^1 : z_{1,2}^1(\varepsilon) &= -\frac{9 - 15\varepsilon \pm i\sqrt{3}\,\sqrt{5 - 10\varepsilon + 9\varepsilon^2}}{2\varepsilon(1-\varepsilon)}, \\
A_3^2 : z_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{2\varepsilon \pm i\sqrt{3}\,\sqrt{2+\varepsilon^2}}{\varepsilon}, \\
A_3^3 : z_{1,2}^3(\varepsilon) &= \frac{9 + 15\varepsilon \pm i\sqrt{3}\,\sqrt{5 + 10\varepsilon - 9\varepsilon^2}}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Поэтому, если $\varepsilon \to 0$, то

$$
\begin{gathered}
r_3^p(\varepsilon) \asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{для} \quad p = 1, 2, 3, \\
\sqrt{90} \leftarrow r_3^0(\varepsilon) < R_3^0(\varepsilon) = \frac{16}{3}\biggl(1 + \frac{2}{1-\varepsilon^2}\biggr).
\end{gathered}
$$

При $\varepsilon \to 1$

$$
\begin{gathered}
r_3^p(\varepsilon) \asymp R_3^p(\varepsilon) \asymp \frac{1}{1-\varepsilon} \qquad \text{для} \quad p = 0, 1, \\
\sqrt{13} \leftarrow r_3^2(\varepsilon) < R_3^2(\varepsilon) = \frac{16}{3}\biggl(1 + \frac{2}{\varepsilon}\biggr), \\
\frac{\sqrt{582}}{4} \leftarrow r_3^3(\varepsilon) < R_2^3(\varepsilon) = \frac{16}{3}\biggl(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{3}{2\varepsilon}\biggr).
\end{gathered}
$$

Примеры 3.1 и 3.2 показывают, что для рассматриваемых в них систем экспонент при $n = 2, 3$ полученные в теореме 2 неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon \to 1$). Оценка является точной и в случае $n = 4$. При этом не все нули многочленов Эрмита с убыванием расстояния между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ стремятся к бесконечности. В частности, имеются нули, которые не зависят от ε

(в примере 3.2 $z_1^2(\varepsilon) = 2$ при всех $0 < \varepsilon < 1$), а также равные нулю (в примере 3.1 $z_1^1(1) = 0$). Уже это говорит о том, что в общем случае нахождение нижних оценок для модулей нулей многочленов Эрмита и, в частности, получение некоторого аналога теоремы Саффа и Варги о кольце, является достаточно трудной задачей. Более веским аргументом в поддержку сказанного является следующий пример (нами установлено, что при $k=3$, $n=2,3,4$ и $\varepsilon \to 0$ он также является иллюстрацией точности по порядку неравенств для модулей нулей в теореме 2).

3.3. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $k \geqslant 2$, $\lambda_0 = 0$, а $\{\lambda_p\}_{p=1}^k$ являются корнями уравнения $z^k = \varepsilon^k$, $\varepsilon > 0$. Далее предполагаем, что $2 \leqslant n \leqslant k$. Для вычисления интеграла в (1.6) при $p = 0$ применим теорему Коши о вычетах. В результате получим

$$A_n^0(z) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{e^{\xi z}}{b^n(\xi)}\right]_{\xi=0}^{(n-1)}, \qquad b(\xi) := \xi^k - \varepsilon^k.$$

Выбирая необходимую нормировку для многочленов Эрмита и учитывая равенства $b'(0) = b''(0) = \dots = b^{(n-1)}(0) = 0$, отсюда находим, что

$$A_n^0(z) = z^{n-1} : z_j^0(\varepsilon) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, для любого сколь угодно большого k нижняя оценка для модулей нулей многочлена A_n^0 при $2 \leqslant n \leqslant k$ является тривиальной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] K. Mahler, “Perfect systems”, *Compositio Math.*, **19** (1968), 95–166.

[2] A. I. Aptekarev, H. Stahl, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials”, *Progress in Approximation Theory*, Springer Ser. Comput. Math., **19**, Springer, New York, 1992.

[3] C. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, *C. R. Akad. Sci. (Paris)*, **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[4] Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*. Т. 1. *Арифметика. Алгебра. Анализ*, Наука, М., 1987.

[5] А. И. Аптекарев, “О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1981, № 1, 68–74.

[6] H. Padé, “Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d’introduction à la théorie des fractions continues algb́riques”, *Ann. École Norm. Sup. Paris* (3), **16** (1899), 395–426.

[7] C. Hermite, “Sur la généralisation des fractions continues algébriques”, *Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A*, **21** (1883), 289–308.

[8] K. Mahler, “Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I”, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1931), 118–136; “Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. II”, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1932), 137–150.

[9] K. Mahler, “Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms”, *Math. Ann.*, **168** (1967), 200–227.

[10] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.

[11] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6 (2011), 37–122.

[12] J. P. Boyd, “Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler’s equation: a Chebyshev–Hermite–Padé method”, *J. Comput. Appl. Math.*, **223**:2 (2009), 693–702.

[13] B. Beckermann, V. Kalyagin, A. C. Matos, F. Wielonsky, “How well does the Hermite–Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon?”, *Math. Comp.*, **80**:274 (2011), 931–958.

[14] В. Н. Сорокин, “Циклические графы и теорема Апери”, *УМН*, **57**:3 (2002), 99–134.

[15] W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence”, *Continued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation*, Contemp. Math., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–342.

[16] G. V. Chudnovsky, “Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π”, *The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications*, Lecture Notes in Math., **925**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 299–322.

[17] *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Совр. пробл. матем., **9**, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007.

[18] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100.

[19] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, E. B. Saff, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.

[20] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.

[21] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником”, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 34–57.

[22] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56.

[23] G. Szegö, “Über einige Eigenschaften der Exponentialreihe”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **23** (1924), 50–64.

[24] E. B. Saff, R. S. Varga, “On the zeros and poles of Padé approximations to e^z, II”, *Padé and Rational Approximations*, Academic Press, New York, 1977, 195–213.

[25] F. Wielonsky, “Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to e^z”, *J. Approx. Theory*, **90**:2 (1997), 283–298.

[26] H. Stahl, “Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function”, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 2002, № 14, 195–220.

[27] H. Stahl, “Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function”, *Constr. Approx.*, **23**:2 (2006), 121–164.

[28] A. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Asymptotique des approximants de Hermite–Padé quadratiques de la fonction exponentielle et probl‘emes de Riemann–Hiebert”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **336**:11 (2003), 893–896.

[29] A. B J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Type II Hermite–Padé approximation to the exponential function”, *J. Comput. Appl. Math.*, **207**:2 (2007), 227–244.

[30] A. B J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky, “Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function: a Riemann–Hiebert approach”, *Constr. Approx.*, **21**:3 (2005), 351–412.

[31] P. B. Borwein, “Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function”, *Constr. Approx.*, **2**:4 (1986), 291–302.

[32] А. П. Старовойтов, “Эрмитовская аппроксимация двух экспонент”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **13**:1 (2) (2013), 87–91.

[33] F. Wielonsky, “Some properties of Hermite–Padé approximants to e^z”, *Continued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation*, Contemp. Math., **236**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1999, 369–379.

[34] F. Wielonsky, “Riemann–Hilbert analysis and uniform convergence of rational interpolants to the exponential function”, *J. Approx. Theory*, **131**:1 (2004), 100–148.

[35] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.

[36] J. L. Walsh, “On the location of the roots of certain types of polynomias”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **24**:3 (1922), 163–180.

[37] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Math. Surveys, **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.

А. П. Старовойтов
Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины, Беларусь
E-mail: svoitov@gsu.by

Поступило
18.02.2015
Исправленный вариант
18.09.2015

Е. П. Кечко
Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины, Беларусь
E-mail: ekechko@gmail.com