УДК 621.039.526:621.039.51

Коэффициенты чувствительности оптимизируемых характеристик АЭС к технологическим параметрам в задачах с ограничениями

КУЗЬМИН А. М.

Технико-экономические показатели АЭС определяются в условиях, когда существует некоторый разброс технологических параметров, к числу которых относятся данные о свойствах материалов, стоимостные характеристики, ядерные константы и т. п. Погрешности значений технологических параметров приводят к неопределенности таких важных характеристик, как стоимость вырабатываемой электроэнергии или количество потребляемого горючего. Поэтому большое значение имеет оценка погрешности основных показателей АЭС (и прежде всего критериев эффективности) и выработка требований к точности знания технологических параметров.

В отношении ядерно-физических констант эти вопросы рассматривались в работах [1, 2], откуда, в частности, следует, что для оценки погрешности какой-либо величины F_0 необходимо знать коэффициенты чувствительности $\delta F_0/\delta\lambda_q$:

$$\frac{\delta F_0}{\delta\lambda_q}=\lim_{\Delta\lambda_q\to 0}\frac{\Delta F_0}{\Delta\lambda_q},$$

где ΔF_0 — изменение F_0, вызванное отклонением q-го параметра на величину $\Delta\lambda_q$ от номинального значения λ_q.

Рассмотрим расчет коэффициентов $\delta F_0/\delta\lambda_q$ в том случае, когда критерий эффективности АЭС $F_0(v_1, \ldots, v_n; \varphi; \lambda_q)$ определяется из решения оптимизационной задачи:

$$\left.\begin{aligned}&\min F_0(v_1, v_2, \ldots, v_n; \varphi; \lambda_q);\\ &F_l(v_1, v_2, \ldots, v_n; \varphi, \lambda_q)\leqslant\\ &\leqslant F_l^{\text{доп}}(\lambda_q), \ l=1, 2, \ldots, m_1;\\ &\alpha_j(\lambda_q)\leqslant v_j\leqslant\beta_j(\lambda_q), \quad j=1, 2, \ldots, n,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где v_j — управляющие параметры, изменением которых добиваются выполнения ограничений на дополнительные функционалы $F_l(v_1, \ldots, v_n, \varphi; \lambda_q)$ и минимизации критерия F_0; φ — переменные состояния (например, потоки нейтронов в реакторе), подчиняющиеся известным уравнениям; $F_l^{\text{доп}}(\lambda_q)$, $\alpha_j(\lambda_q)$, $\beta(\lambda_q)$ — допустимые значения, зависящие в общем случае от величины λ_q q-го технологического параметра.

Введем вспомогательные переменные w_l, ω_j и ω_{j+n}, которые могут принимать любые значения, и перейдем от неравенств ($F_l\leqslant F_l^{\text{доп}}$ или $\alpha_j\leqslant v_j\leqslant\beta_j$) к эквивалентным равенствам (соответственно $F_l+w_l^2=F_l^{\text{доп}}$ или $v_j+\omega_j^2=\beta_j$, $v_j-\omega_{j+n}^2=\alpha_j$). Обозначая $\mathbf{u}$ вектор размерности m_1+3n с компонентами $\{v_j; \omega_l; \omega_j; \omega_{j+n}\}$ и подразумевая под величинами $A_j(\lambda_q)$ $[i=1, 2, \ldots, m; m=m_1+2n]$ значения $F_l^{\text{доп}}(\lambda_q)$, $\alpha_j(\lambda_q)$ и $\beta_j(\lambda_q)$, сформулируем задачу (1) в виде:

$$\begin{gathered}\min F_0(\mathbf{u}, \varphi, \lambda_q);\\ F_i(\mathbf{u}_0, \varphi_0, \lambda_q^0)=A_i(\lambda_q), \quad i=1, 2, \ldots, m,\end{gathered}\qquad(2)$$

где в число равенств включены ограничения на дополнительные функционалы и управления задачи (1).

Задача (1), или (2) является задачей вариационного исчисления на отыскание условного экстремума. Для АЭС с быстрыми реакторами она может быть решена с помощью комплекса программ РОКБАР [3]. Пусть получено решение задачи (2) при номинальном значении λ_q^0 q-го параметра, т. е. найден такой вектор $\mathbf{u}_0$, что выполняются необходимые условия оптимальности:

$$\mathscr{H}_0(\mathbf{u}_0, \lambda_q^0)+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i^0\mathscr{H}_i(\mathbf{u}_0, \lambda_q^0)=0;\qquad(3)$$

$$F_i(\mathbf{u}_0, \varphi_0, \lambda_q^0)=A_i(\lambda_q^0),\qquad(4)$$

где $\mathscr{H}_i(\mathbf{u}_0, \lambda_q^0)$ — вектор эффективностей переменных u_j по отношению к функционалам F_i $(i=0, 1, \ldots, m)$, полученный с использованием формул теории возмущений [4] в точке $(\mathbf{u}_0, \lambda_q^0)$; γ_i^0 — множители Лагранжа. Поскольку функционалы F_i задачи (2) не зависят одновременно от всех вспомогательных переменных w_l, ω_j и ω_{j+n} (например, критерий F_0 зависит лишь от управляющих параметров v_j), некоторые из компонентов векторов $\mathscr{H}_i$ равны нулю.

Если произошло отклонение q-го технологического параметра на величину $\delta\lambda_q=\lambda_q'-\lambda_q^0$, то приходим к возмущенной задаче, решение которой дает новые значения оптимального вектора $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}$, переменных состояния $\varphi' = \varphi_0 + \delta\varphi$ и критерия эффективности $F_0(\mathbf{u}', \varphi', \lambda_q') = F_0(\mathbf{u}_0, \varphi_0, \lambda_q^0) + \delta F_0$ при сохранении ограничений

$$F_i(\mathbf{u}', \varphi', \lambda_q') = A_i(\lambda_q'). \tag{5}$$

Считая отклонение $\Delta\lambda_q$ достаточно малым, имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta F_i &= \frac{\partial F_i(\mathbf{u}_0, \varphi_0, \lambda_q^0)}{\partial\lambda_q}\cdot\Delta\lambda_q + \{\mathscr{H}_i(\mathbf{u}_0, \lambda_q^0)\,\Delta\mathbf{u}\}; \\ \Delta A_i &= \frac{\partial A_i(\lambda_q^0)}{\partial\lambda_q}\Delta\lambda_q, \quad i = 0, 1, \ldots, m, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

где выражение $\{\mathscr{H}_i\Delta\mathbf{u}\}$ означает скалярное произведение векторов $\mathscr{H}_i$ и $\Delta\mathbf{u}$. Используя соотношения (3)—(6) и предполагая существование непрерывных производных $\partial\mathbf{u}/\partial\lambda_q$ и $\partial\gamma_i/\partial\lambda_q$, получаем равенство:

$$\frac{\delta F_0}{\delta\lambda_q} = \frac{\partial F_0(\mathbf{u}_0, \varphi_0, \lambda_q^0)}{\partial\lambda_q} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i^0\left[\frac{\partial F_i(\mathbf{u}_0, \varphi_0, \lambda_q^0)}{\partial\lambda_q} - \frac{\partial A_i(\lambda_q^0)}{\partial\lambda_q}\right], \tag{7}$$

в котором частные производные $\partial F_i/\partial\lambda_q$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ имеют смысл эффективностей параметра λ_q к функционалам F_i.

Необходимые для расчета коэффициентов чувствительности $\delta F_0/\delta\lambda_q$ множители γ_i^0 определяются либо из решения системы (3) $m_1 + 3n$ линейных уравнений с $m = m_1 + 2n$ неизвестными, либо из решения двойственной задачи линейного программирования [5] для переменных y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Действительно, оптимальный план двойственной задачи совпадает с множителями Лагранжа

$$y_i = \gamma_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

если выполняются соотношения (3), а основная задача линейного программирования сформулирована в окрестности оптимального управления $\{v_1^0, v_2^0, \ldots, v_n^0\}$ для вариаций $\{\delta v_1, \delta v_2, \ldots, \delta v_n\}$ (так же, как в работе [6]). При этом $\gamma_i^0 = 0$ для $i \in I_0$, где I_0 — множество тех индексов, которые соответствуют ограничениям задачи (1), принимающим в точке оптимума вид строгих неравенств. Отметим, что второй способ получения множителей γ_i^0 удобно использовать в программе РОКБАР, где задача линейного программирования решается методом последовательного сокращения невязок [5], который позволяет определить оптимальные планы основной и двойственной задач.

Важно подчеркнуть, что в предложенной выше схеме коэффициенты чувствительности $\delta F_0/\delta\lambda_q$ определяются в условиях оптимума критерия F_0 и отсутствует неоднозначность расчета $\delta F_0/\delta\lambda_q$, связанная с неоднозначностью способа восстановления возможных нарушений в ограничениях $F_i = A_i$ (при возмущении параметра λ_q). Нетрудно видеть, что в формуле (7) из всех возможных способов (определяемых набором управлений v_j) восстановления нарушенных условий выбирается такой, который способствует наибольшему понижению критерия F_0.

Практическое использование формулы (7) проиллюстрируем на примере расчета коэффициентов чувствительности периода удвоения T_2 быстрых реакторов-размножителей с оксидным горючим ($UO_2 + PuO_2$) к предельно допустимым значениям функционалов F_i. Пусть реактор имеет тепловую мощность $W_т = 1000$ МВт и состоит из одной активной зоны, окруженной экранами с воспроизводящим материалом в форме UO_2. Будем считать, что топливный материал заключен в цилиндрические твэлы с оболочкой из нержавеющей стали толщиной 0,4 мм. В качестве теплоносителя возьмем жидкий натрий со средней температурой на выходе из реактора 530 °С. Время химической переработки твэлов примем равным 0,5 года, а теплофизические и прочностные свойства стали, горючего и натрия такими же, как для реактора БН-350 [7].

Рассмотрим задачу о минимуме времени удвоения T_2 с ограничениями

$$\left.\begin{aligned} &K_{эф} = 1;\ t_ц \leqslant 2450\,°С; \quad t_{об} \leqslant 710\,°С; \\ &\xi_{об} \leqslant 0{,}002; \quad \sigma_к \leqslant 18\ кг/мм^2, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $K_{эф}$ — эффективный коэффициент размножения нейтронов; $t_ц$ и $t_{об}$ — максимальные температуры в центре твэла и на его оболочке; $\xi_{об}$ — верхний предел относительной деформации оболочки; $\sigma_к$ — максимальное напряжение в стенках кассет.

В качестве управляющих параметров возьмем: $v_1 = H_{г.п.}$ — высота полости для сбора газообразных продуктов деления; $v_2 \equiv \varepsilon_{ст.к}$ — объемная доля стенок кассет; $v_3 \equiv R$ — радиус активной зоны; $v_4 \equiv d_т$ — диаметр топливного брикета; $v_5 \equiv П$ — пористость горючего; $v_6 \equiv h$ — относительный шаг решетки твэлов; $v_7 \equiv x$ — обогащение горючего; $v_8 \equiv H$ — высота активной зоны; $v_9 \equiv V_{т.н.}$ — максимальная

Эффективности управлений к функционалам задачи

Управления	Оптимальные значения v_0	Эффективности $\mathscr{H}_i^j$ управлений к функционалам					
		$K_{эф}$	$t_ц$, °C	$t_{об}$, °C	$\xi_{об}$	$\sigma_к$, кг/мм²	T_2, год
$H_{г.п}$, см	35,2	0	0	0	$-0{,}0^{3}285$	+0,0670	0
$\varepsilon_{ст.к}$	0,114	−0,4177	+2355	+220,8	+0,01327	−315,6	−12,40
R, см	88,1	$+0{,}0^{2}194$	−39,51	−3,704	$-0{,}0^{3}218$	0	+0,2048
$d_т$, см	0,5	+0,1983	+5339	+57,43	+0,02788	−30,65	+6,315
П	0,145	−0,7439	−3179	−21,95	+0,1273	0	−39,67
h	1,15	−0,6774	+3148	−633,1	−0,04512	−75,71	−24,07
x	0,163	+2,830	−20,20	−1,894	$-0{,}0^{3}133$	0	+164,7
H, см	97,0	$+0{,}0^{2}161$	−17,50	−0,501	$+0{,}0^{4}561$	+0,0670	+0,1196
$V_{т.н}$, м/с	9,57	0	−0,1178	−16,03	$-0{,}0^{2}102$	+2,601	0
Множители γ_i^0		−58,28	$+0{,}0^{2}151$	$+0{,}0^{2}810$	+12,63	+0,0551	—

скорость теплоносителя. При этом

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant H_{г.п} < \infty;\ 5\text{ мм} \leqslant d_т < \infty; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;\\ &0 \leqslant \varepsilon_{ст.к} \leqslant 1; \quad 0{,}05 \leqslant П \leqslant 0{,}174;\ 0 \leqslant H < \infty;\\ &0 \leqslant R < \infty; \quad 1{,}15 \leqslant h < \infty; \quad 0 \leqslant V_{т.н} \leqslant\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant 10\text{ м/с}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Решение задачи с помощью программы РОКБАР при основных предположениях о расчетной модели реактора, описанных в работе [3], показало, что $T_2^{опт} = 7{,}52$ года; $t_ц$, $t_{об}$, $\xi_{об}$ и $\sigma_в$ достигают предельно допустимых значений, а оптимальные управления равны величинам, приведенным в таблице. Здесь же представлены эффективности $\mathscr{H}_i^j$ управлений в оптимуме и значения множителей γ_i^0, полученные из решения двойственной задачи линейного программирования.

Так как в программе РОКБАР задачи типа (2) решаются приближенно, подстановка найденных значений γ_i^0 в условия оптимальности (3) дает отличные от нуля невязки $\Delta_j \equiv \mathscr{H}_0^j + \sum\limits_i \gamma_i^0 \mathscr{H}_i^j$. Легко проверить, что невязки Δ_j малы и для каждого индекса j $|\Delta_j| \ll \max|\mathscr{H}_i^j \gamma_i^0|$. Поэтому найденные значения γ_i^0 вполне пригодны для оценок коэффициентов чувствительности T_2 к допустимым значениям функционалов $K_{эф}^{доп}$, $t_ц^{доп}$, $t_{об}^{доп}$, $\xi_{об}^{доп}$, $\sigma_к^{доп}$ и допустимым управлениям $d_т^{мин}$ и $h^{мин}$.

Используя соотношения (7), (3) и результаты, представленные в таблице, получаем

$$\frac{\delta T_2}{\delta K_{эф}^{доп}} = +58{,}28 \text{ года};$$

$$\frac{\delta T_2}{\delta t_ц^{доп}} = -0{,}00151 \text{ год/°C};$$

$$\frac{\delta T_2}{\delta t_{об}^{доп}} = -0{,}00810 \text{ год/°C};$$

$$\frac{\delta T_2}{\delta \xi_{об}^{доп}} = -12{,}63 \text{ года};$$

$$\frac{\delta T_2}{\delta \sigma_к^{доп}} = -0{,}0551 \text{ год}\cdot\text{мм}^2/\text{кг};$$

$$\frac{\delta T_2}{\delta d_т^{мин}} = +0{,}198 \text{ год/мм};$$

$$\frac{\delta T_2}{\delta h^{мин}} = +9{,}29 \text{ года}.$$

Подчеркивая важность оценок коэффициентов чувствительности T_2 к рассмотренным технологическим параметрам, заметим, что погрешность $\Delta K_{эф} = \pm 0{,}01$ в величине $K_{эф}$ дает такую же неопределенность в значении T_2, как погрешность $\Delta t_ц = \pm 385$ °C в температуре центра твэла или погрешность $\Delta t_{об} = \pm 72$ °C в температуре оболочки твэла. Последние же погрешности сравнимы с перепадами температур из-за факторов перегрева (370 и 80 °C соответственно).

Поступила в Редакцию 10/VII 1974 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г.** В сб.: Ядерные константы. Вып. 10. М., Атомиздат, 1972, с. 3.
2. **Зарицкий С. М., Троянов М. Ф.** В сб.: Физика ядерных реакторов. Вып. 2. М., Атомиздат, 1970, с. 168.
3. **Кузьмин А. М. и др.** «Атомная энергия», 1971, т. 31, вып. 2, с. 83.
4. **Усачев Л. Н.** «Атомная энергия», 1963, т. 15, вып. 6, с. 472.
5. **Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.** Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963.
6. **Хромов В. В. и др.** «Атомная энергия», 1969, т. 27, вып. 3, с. 186.
7. **Лейпунский А. И. и др.** «Атомная энергия», 1968, т. 25, вып. 5, с. 380.