УДК 517.51+517.53

В. Н. Русак, А. П. Старовойтов

Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора

Для некоторого класса целых функций установлена асимптотика определителей Адамара $D_{n,m}$ при $0 \leqslant m \leqslant m(n) \to \infty$ и $n \to \infty$. Это позволило исследовать поведение параболических последовательностей таблиц Паде и Чебышёва для многих известных целых функций. Основной результат работы состоит в том, что для некоторых последовательностей $\{(n, m(n))\}$ в определенных классах целых функций (с регулярными коэффициентами Тейлора) аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m(n)}\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают заданную функцию равномерно на компакте $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Каждой функции f, аналитической в области $G \supset D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ и заданной рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \tag{1.1}$$

поставим в соответствие две таблицы

$$[\pi_{n,m}(\,\cdot\,; f)]_{n,m=0}^{\infty}, \qquad [r^*_{n,m}(\,\cdot\,; f)]_{n,m=0}^{\infty} \tag{1.2}$$

рациональных функций. Первая (таблица Паде) состоит из функций $\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; f) = P_{n,m}(z)/Q_{m,n}(z)$, $\deg P_{n,m} \leqslant n$, $\deg Q_{m,n} \leqslant m$, однозначно определяемых из соотношений (см. [1; § 1.1, теорема 1.1.1])

$$(Q_{m,n} f - P_{n,m})(z) = O(z^{n+m+1}), \qquad z \to 0.$$

Элементами второй (таблицы Чебышёва) являются рациональные дроби $r^*_{n,m}(z) = r^*_{n,m}(z; f)$ наилучшего равномерного приближения f в классе $\mathscr{R}_{n,m}$ (всех рациональных функций, числитель которых имеет степень не выше n, а знаменатель – не выше m), которые определяются из равенств

$$R_{n,m}(f) = R_{n,m}(f; D) := \inf\{\|f - r\| : r \in \mathscr{R}_{n,m}\} = \|f - r^*_{n,m}\|,$$

где $\|g\| = \sup\{|g(z)| : z \in D\}$[1].

[1] Если рациональная функция наилучшего приближения не единственна, то в качестве $r^*_{n,m}$ возьмем одну из таких функций.

Нулевые строки таблиц (1.2) состоят соответственно из многочленов Тейлора и полиномов наилучшего равномерного приближения. Их поведение исследовано достаточно полно для широкого класса целых функций. В частности, хорошо известно (см. [2], [3]), что когда коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ряда (1.1) убывают правильным образом, величины уклонения функции f от $\pi_{n,0}(\,\cdot\,; f)$ и $r^*_{n,0}(\,\cdot\,; f)$ асимптотически совпадают, т.е. при $n \to \infty$

$$R_{n,0}(f) = \|f - r^*_{n,0}(\,\cdot\,; f)\| \sim \|f - \pi_{n,0}(\,\cdot\,; f)\| \sim |f_{n+1}|$$

($a_n \sim b_n$, если $a_n/b_n \to 1$ при $n \to \infty$). Что касается поведения других строк таблицы Чебышёва, то прежде всего нужно сказать о работе А. А. Гончара [4], из результатов которой следует, что для функции f, аналитической в D и допускающей мероморфное продолжение в более широкую область, при фиксированном m и $n \to \infty$ наилучшие рациональные приближения $R_{n,m}(f)$ убывают со скоростью геометрической прогрессии. Если же говорить о целых функциях, то первый существенный результат получен Э. Саффом [5], [6]: для функции $f(z) = \exp z$ при фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$ и $n \to \infty$

$$R_{n,m}(f) = \|f - r^*_{n,m}(\cdot\,; f)\| \sim \|f - \pi_{n,m}(\cdot\,; f)\| \sim \left|\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}\right|, \tag{1.3}$$

где

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}$$

– определители Адамара (Ганкеля) функции f. По определению считаем, что $D_{n,0} = 1$, а $D_{n,1} = f_n$.

Д. Браесс и Л. Трефезен в [7], [8] продолжили указанные исследования и изучили поведение элементов таблиц (1.2) экспоненты в полном объеме (при $n + m \to \infty$). Для суммы экспонент с одной доминирующей компонентой при фиксированном m в [9] исследована сходимость аппроксимаций Паде, а в [10] доказан аналог теоремы Э. Саффа. С помощью интерполяционных рациональных операторов в [11], [12] установлено поведение строк таблицы Чебышёва функций $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$.

Следующие важные результаты для строк таблиц (1.2) целых функций были получены в работах [13], [14]. Так в [13] А. Левин и Д. Любински доказали (подробнее см. [15; гл. 9, § 2]), что при выполнении следующих условий:

1) $\lim_{n\to\infty}(f_{n-1}f_{n+1})/f_n^2 = q$, $|q| = 1$;
2) если $q_n := (f_{n-1}f_{n+1})/f_n^2$, то для любого $l \in \mathbb{N}$

$$q_n = q(1 + \alpha_1 n^{-1} + \alpha_2 n^{-2} + \dots + \alpha_l n^{-l} + o(n^{-l})) \tag{1.4}$$

при $n \to \infty$ и $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{C}$;
3) $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = 0$

для функции f, заданной рядом (1.1), при фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$ и $n \to \infty$ справедливы соотношения (1.3). Следовательно, для заданного класса целых функций (ему, в частности, принадлежит экспонента) отмеченное выше свойство нулевых строк таблиц Паде и Чебышёва сохраняется и для других строк этих таблиц. В случае, когда f – одна из функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, аналогичный результат получен В. К. Дзядыком [2] для главной диагонали.

Метод, примененный в [13] для нахождения асимптотики определителя $D_{n,m}$, основан на тождестве

$$D_{n,m+1}D_{n,m-1} = D_{n+1,m}D_{n-1,m} - D_{n,m}^2,$$

являющемся следствием теоремы Сильвестра (см. [1; гл. 1, (4.11)]). С помощью его в [13] доказана следующая эквивалентность[2]

$$D_{n,m} \sim (-1)^{m(m+1)/2} f_n^m \prod_{j=1}^{m-1} (1 - q_n^j)^{m-j},$$

из которой следует, что в (1.3) при $n \to \infty$

$$\left|\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}\right| \sim \left|f_{n+1}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)^m \prod_{j=1}^{m}(1 - q_{n+1}^j)\right|.$$

Последнее соотношение позволило найти скорость сходимости строк таблиц (1.2) некоторых функций, в частности, функции Миттаг-Леффлера

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + n/\lambda)}, \qquad \lambda > 0,$$

и

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/\lambda}}, \qquad \lambda > 0.$$

Вместе с тем в [14] при близких к (1.4) условиях, а именно,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{q}{n^\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{m_0} \frac{b_k}{n^k} + O(n^{-m_0-1})\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

где $\alpha > 0$, соотношения (1.3) доказаны при всех $0 \leqslant m \leqslant m_0$. В этой работе найден точный порядок убывания определителей Адамара $D_{n,m}$ при фиксированном m и $n \to \infty$ и поэтому полностью решен вопрос о скорости сходимости строк таблиц

[2]Появление множителя $(-1)^{m(m-1)/2}$ в правой части обусловлено различием в определении $D_{n,m}$.

Паде и Чебышёва для функций из данного класса: если коэффициенты Тейлора $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ функции (1.1) удовлетворяют условиям (1.5), то в (1.3)

$$\left|\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}\right| \sim m!\,|f_{n+1}|\left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m.$$

Предложенный в [14] метод дает возможность исследовать и функции вида

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{l_n}, \tag{1.6}$$

где l_n – некоторая арифметическая прогрессия, а коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (1.5). К таким функциям относятся большинство известных функций анализа и, в частности, рассмотренные в [13] функции $M(z)$, $G(z)$.

В данной работе нас будут интересовать целые функции, для которых соотношения (1.3) имеют место при $m = m(n) \to \infty$ и $n \to \infty$. Основной результат работы состоит в том, что для некоторых последовательностей $\{(n, m(n))\}$ в определенных классах целых функций (с регулярными коэффициентами Тейлора) аппроксимации Паде $\{\pi_{n,m(n)}\}$, которые являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями, приближают заданную функцию равномерно на компакте D со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

Как уже было замечено, главной проблемой такого рода исследований является нахождение асимптотики определителей Адамара $D_{n,m}$. Поскольку порядок этого определителя равен m, то в этом случае с ростом n растет и порядок $D_{n,m}$, что значительно усложняет нахождение его асимптотики.

Для экспоненты определители Адамара $D_{n,m}$ вычислены точно (см. [1; гл. 1, §1.2, (2.6)]) для любых m и n. В работе [16] (см. также [13]) при следующих ограничениях:

$$\left|\frac{(f_{n-1}f_n)}{f_n^2}\right| < \rho^2, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{1.7}$$

где $0 < \rho < \rho_0 = 0.4559\dots$, показано, что для $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} |f_n|^m \leqslant |D_{n,m}| \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} |f_n|^m, \tag{1.8}$$

и с помощью (1.8) для таких функций соотношение (1.3) установлено в случае $0 \leqslant m \leqslant m(n) = 1.4\,n$ и $n \to \infty$. Доказательство (1.8) в [16] опирается на то, что при "жестких" ограничениях (1.7) (экспонента им не удовлетворяет) вычисление определителя $D_{n,m}$ сводится к вычислению определителя матрицы с доминирующей главной диагональю.

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов статьи (они анонсированы в [17]–[19]), отметим, что начало данным исследованиям положено в [20].

Через $\mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, обозначим множество всех функций f, представимых в виде (1.1), коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ которых не равны нулю и удовлетворяют следующим ограничениям: для любого j, $1 \leqslant j \leqslant m(n)$, где

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(m(n))^{2+\beta}}{n} = 0, \tag{1.9}$$

существует такая последовательность комплексных чисел $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$|b_k^{(j)}| \leqslant (cj^{\beta})^k, \qquad c = \mathrm{const}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.10}$$

и при $n \geqslant n_0$[3]

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \left(\frac{q}{n^{\alpha}}\right)^j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{(j)}}{n^k}\right). \tag{1.11}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если* $f \in \mathscr{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, *и выполняется условие* (1.9), *то для каждого* m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$D_{n,m} \sim (-q)^{m(m-1)/2} \prod_{k=0}^{m-1} f_{n-k} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \left(\frac{1}{(n+1-j)^{\alpha}} - \frac{1}{(n+1-i)^{\alpha}}\right). \tag{1.12}$$

Теорема 1.2. *Если* $f \in \mathscr{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, *и выполняется условие* (1.9), *то для каждого* m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$R_{n,m}(f) \sim \|f - \pi_{n,m}(\cdot\,; f)\| \sim \left|\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}\right| \sim m!\,|f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m. \tag{1.13}$$

Теорема 1.3. *Если функция* g *представима в виде* (1.6), *где* $l_n = l_0 + dn$, $d \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – *арифметическая прогрессия, а* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *являются коэффициентами Тейлора некоторой функции* $f \in \mathscr{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, *и выполняется условие* (1.9), *то для каждого* m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$\begin{aligned} R_{l_n+i,dm+j}(g) &\sim \|g - \pi_{l_n+i,dm+j}(\cdot\,; g)\| \sim \left|\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}\right| \\ &\sim m!\,|f_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где $0 \leqslant i + j \leqslant d - 1$.

Анализ теорем 1.1–1.3 показывает, что при увеличении β класс функций $\mathscr{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$ расширяется, однако сужается множество последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва, для которых имеют место эквивалентности (1.12)–(1.14). Для $\beta = 2$ теоремы 1.1–1.3 в неявном виде анонсированы в [20]. При больших β коэффициенты $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ могут расти быстро. В этом случае по своему определению класс $\mathscr{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$ близок к классу функций, исследованному в [14], а последовательности элементов таблиц (1.2), для которых имеют место эквивалентности (1.12)–(1.14), близки к строкам.

[3] Подчеркнем, что последовательность $\{b_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ определяется только значением j и не зависит от n, а c – абсолютная константа, причем одна и та же для всех j.

Условия, определяющие класс $\mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$, можно интерпретировать следующим образом. Положив в (1.11) $j=1$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=0.$$

Отсюда следует, что $\mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$ состоит из целых функций. Условие (1.11) задает скорость убывания коэффициентов Тейлора и вместе с (1.10) является некоторым условием регулярности (правильности) убывания коэффициентов Тейлора функции f. Дело в том, и это хорошо известно, что высокая скорость убывания коэффициентов степенного ряда не гарантирует даже сходимости аппроксимаций Паде к сумме этого ряда (см. [1; гл. 6, §6.1]). При исследовании строк таблицы Паде в условиях регулярности (1.4), (1.5) сравниваются соседние коэффициенты. В нашем случае для исследования поведения $\pi_{n,m}(\,\cdot\,;f)$ при $m\leqslant m(n)\to\infty$ и $n\to\infty$ потребовалось сравнивать одновременно $j\leqslant m(n)$ последовательных коэффициентов степенного ряда, определяющего функцию f.

В §5 будет показано, что проверку условий (1.9)–(1.11) можно существенно упростить, что позволило установить соотношения (1.3) при $m\to\infty$ и $n\to\infty$ для многих известных целых функций.

§2. Определители Коши для системы функций

Рассмотрим m степенных рядов

$$f_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(i)}z^k,\qquad i=\overline{1,m},\tag{2.1}$$

сходящихся в круге $D_\rho=\{z:|z|<\rho\}$, и $z_j\in D_\rho$, $j=\overline{1,m}$. Тогда определитель

$$|f_i(z_j)|_{i,j=1}^m=\begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_1(z_2) & \dots & f_1(z_m)\\ f_2(z_1) & f_2(z_2) & \dots & f_2(z_m)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_m(z_1) & f_m(z_2) & \dots & f_m(z_m)\end{vmatrix}$$

будем называть *определителем Коши для системы функций* $\{f_i\}_{i=1}^m$.

В этом параграфе при некоторых ограничениях на коэффициенты степенных рядов (2.1) и числа $\{z_j\}_{j=1}^m$ найдена асимптотика определителей Коши. При этом существенную роль играет следующая лемма (см. [21; гл. 7, §6, лемма (6.A)], [22; гл. 1, §1.2, теорема 1.2.1]).

Лемма 2.1 (Коши–Хуа Ло-кен). *Справедливо равенство*

$$|f_i(z_j)|_{i,j=1}^m=\sum_{k_1>k_2>\dots>k_m\geqslant 0}|a_{k_j}^{(i)}|_{i,j=1}^m|z_i^{k_j}|_{i,j=1}^m,$$

где k_i – целые числа.

Предположим, что степенные ряды (2.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &f_{m-1}(z) = z^{\alpha(m-1)} + \sum_{k>\alpha(m-1)} a_k^{(m-1)} z^k; \\ &f_{m-2}(z) = z^{\alpha(m-2)} + \sum_{k>\alpha(m-2)} a_k^{(m-2)} z^k; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_1(z) = z^{\alpha} + \sum_{k>\alpha} a_k^{(1)} z^k; \\ &f_0(z) = 1, \qquad \alpha \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тогда систему (2.2) кратко можно записать так:

$$f_{m-i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m-i)} z^k, \qquad i = \overline{1,m},$$

где

$$\begin{cases} a_k^{(i)} = 0, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m-1, \; k < \alpha i; \\ a_{\alpha i}^{(i)} = 1, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m-1; \\ a_0^{(0)} = 1, \;\; a_k^{(0)} = 0, \; k \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Будем считать также, что остальные коэффициенты степенных рядов (2.2) подчинены следующим ограничениям:

$$|a_k^{(i)}| \leqslant (ci^{\beta})^{k-\alpha i}, \qquad c = \mathrm{const}, \quad k > \alpha i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1. \tag{2.4}$$

Для $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_j \in D_\rho$, $j = \overline{1,m}$, рассмотрим соответствующий определитель Коши

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) := |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m.$$

Теорема 2.1. *Если* $c_1, c_2 > 0$, $\beta \geqslant 1$,

$$\frac{1}{c_1 n + c_2 m} \leqslant \lambda_j \leqslant \frac{1}{c_1 n - c_2 m}, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{2.5}$$

и выполняется условие (1.9), *то для каждого* m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) \sim W_m(\vec{\lambda}^{\alpha}),$$

где

$$W_m(\vec{\lambda}) = |\lambda_j^{m-i}|_{i,j=1}^m = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\lambda_i - \lambda_j)$$

– определитель Вандермонда порядка m *от переменных* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, *а* $\vec{\lambda}^{\alpha} = (\lambda_1^{\alpha}, \lambda_2^{\alpha}, \ldots, \lambda_m^{\alpha})$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений. Для этого введем дополнительные обозначения:

$\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, k_i – целые числа;
$k_{\alpha,i} = \alpha(m-i)$, $i = \overline{1,m}$;
$\vec{k}_\alpha = (k_{\alpha,1}, k_{\alpha,2}, \ldots, k_{\alpha,m})$.

Далее, если r – целое неотрицательное число, то через $\mathbb{K}_r(m)$ обозначим множество всех таких $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, что

1) k_i – целые числа и $k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geqslant 0$;
2) $k_i \geqslant \alpha(m-i) = k_{\alpha,i}$, $i = \overline{1,m}$;
3) $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = \alpha m(m-1)/2 + r$.

Для $k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geqslant 0$ рассмотрим функцию

$$V_m(\vec{k};\vec{\lambda}) := \frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})}. \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Функция $V_m(\vec{k};\vec{\lambda})$ есть симметрический однородный многочлен переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ порядка $k_1 + k_2 + \cdots + k_m - m(m-1)/2$ с положительными коэффициентами.*

Данная лемма принадлежит С.Н. Бернштейну (доказательство см. в [23; ст. 51, гл. 2]).

Лемма 2.3. *Пусть $P_i(z)$, $i = \overline{1,m}$, – многочлены, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\lim_{\lambda_j \to \lambda,\, j=\overline{1,m}} \frac{|P_i(\lambda_j)|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}|P_i^{(j-1)}(\lambda)|_{i,j=1}^m}{1!\,2!\cdots(m-1)!}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем $\lambda = 0$. По теореме Тейлора

$$P_i(z) = P_i(0) + \frac{P_i^{(1)}(0)}{1!}z + \frac{P_i^{(2)}(0)}{2!}z^2 + \cdots.$$

Применяя лемму Коши–Хуа Ло-кена, получаем

$$|P_i(\lambda_j)|_{i,j=1}^m = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geqslant 0} |\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m \left|\frac{P_i^{(k_j)}(0)}{k_j!}\right|_{i,j=1}^m.$$

Следовательно,

$$\frac{|P_i(\lambda_j)|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geqslant 0} \left|\frac{P_i^{(k_j)}(0)}{k_j!}\right|_{i,j=1}^m \frac{|\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})}.$$

По лемме 2.2 $|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m / W_m(\vec{\lambda})$ – однородный многочлен от переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ порядка $k_1 + k_2 + \cdots + k_m - m(m-1)/2$. Поэтому при $k_1 + k_2 + \cdots + k_m > m(m-1)/2$

$$\lim_{\lambda_j \to 0,\, j=\overline{1,m}} \frac{|\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = 0.$$

Поскольку система

$$\begin{cases} k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geqslant 0, \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m \leqslant \dfrac{m(m-1)}{2} \end{cases}$$

в целых числах имеет единственное решение $k_j = m - j$, $j = \overline{1,m}$, то

$$\lim_{\lambda_j \to 0,\, j=\overline{1,m}} \frac{|\lambda_i^{k_j}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda})} = \left|\frac{P_i^{(m-j)}(0)}{(m-j)!}\right|_{i,j=1}^m = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}|P_i^{(j-1)}(0)|_{i,j=1}^m}{1!\,2!\cdots(m-1)!}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть r – целое неотрицательное число. Тогда число решений диофантова уравнения*

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = r \tag{2.7}$$

в целых неотрицательных числах равно

$$C^r_{m+r-1} = C^{m-1}_{r+m-1} = \frac{(m+r-1)!}{r!(m-1)!}\,.$$

Доказательство. Из решения Эйлера “задачи на размен денег” следует (см. [24; отдел первый, гл. 1, § 1, решение задачи 9]), что число решений диофантова уравнения (2.7) равно коэффициенту A_r степенного ряда

$$\frac{1}{(1-\xi)^m} = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \xi^r, \qquad |\xi| < 1.$$

Остается заметить, что

$$A_r = C^r_{m+r-1} = C^{m-1}_{r+m-1} = \frac{(m+r-1)!}{r!(m-1)!}\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Для $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$ справедливо неравенство*

$$\frac{W_m(\vec{k})}{W_m(\vec{k}_\alpha)} \leqslant (3m)^r. \tag{2.8}$$

Доказательство проведем с помощью индукции по r. Если $r = 0$, то $\mathbb{K}_0(m)$ состоит из единственного элемента $\vec{k}_\alpha$. В этом случае (2.8) обращается в равенство. Пусть (2.8) верно для $r-1$, где $r \geqslant 1$. Возьмем любой $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. Тогда существует индекс ν, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, такой, что

$$\vec{k}' = (k_1, \dots, k_{\nu-1}, k_\nu - 1, k_{\nu+1}, \dots, k_m) \in \mathbb{K}_{r-1}(m).$$

Пусть $k'_i = k_i$ при $i \neq \nu$ и $k'_\nu = k_\nu - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leqslant W_m(\vec{k}) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (k_i - k_j) \\ &= W_m(\vec{k}')\, \frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}}\, \frac{k_\nu - k_{\nu+2}}{k'_\nu - k'_{\nu+2}} \cdots \frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m} \\ &\quad \times \frac{k_1 - k_\nu}{k'_1 - k'_\nu}\, \frac{k_2 - k_\nu}{k'_2 - k'_\nu} \cdots \frac{k_{\nu-1} - k_\nu}{k'_{\nu-1} - k'_\nu} \\ &\leqslant W_m(\vec{k}')\, \frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}}\, \frac{k_\nu - k_{\nu+2}}{k'_\nu - k'_{\nu+2}} \cdots \frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m}\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

так как
$$\frac{k_i - k_\nu}{k'_i - k'_\nu} \leqslant 1,$$
если $i \leqslant \nu - 1$. По определению
$$\frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} = \frac{k'_\nu + 1 - k'_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} = 1 + \frac{1}{k'_\nu - k'_{\nu+1}}\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m} = \frac{k'_\nu + 1 - k'_m}{k'_\nu - k'_m} = 1 + \frac{1}{k'_\nu - k'_m}$$
и
$$\begin{aligned} &k'_\nu - k'_{\nu+1} \geqslant 1, \\ &k'_\nu - k'_{\nu+2} = (k'_\nu - k'_{\nu+1}) + (k'_{\nu+1} - k'_{\nu+2}) \geqslant 2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &k'_\nu - k'_m = (k'_\nu - k'_{\nu+1}) + \dots + (k'_{m-1} - k'_m) \geqslant m - \nu. \end{aligned}$$
Поэтому, применяя неравенство Коши, получаем
$$\begin{aligned} &\frac{k_\nu - k_{\nu+1}}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} \frac{k_\nu - k_{\nu+2}}{k'_\nu - k'_{\nu+2}} \cdots \frac{k_\nu - k_m}{k'_\nu - k'_m} \\ &\quad \leqslant \left(1 + \frac{\frac{1}{k'_\nu - k'_{\nu+1}} + \dots + \frac{1}{k'_\nu - k'_m}}{m - \nu}\right)^{m-\nu} \\ &\quad \leqslant \left(1 + \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-\nu}}{m - \nu}\right)^{m-\nu} \leqslant \left(1 + \frac{1 + \ln(m-\nu)}{m-\nu}\right)^{m-\nu} \\ &\quad = \left(1 + \frac{\ln(e(m-\nu))}{m-\nu}\right)^{m-\nu} \leqslant e^{\ln(e(m-\nu))} \leqslant 3m. \end{aligned} \tag{2.10}$$
Из (2.9), (2.10) и предположения индукции следует, что
$$0 \leqslant \frac{W_m(\vec{k})}{W_m(\vec{k}_\alpha)} \leqslant 3m \frac{W_m(\vec{k}')}{W_m(\vec{k}_\alpha)} \leqslant (3m)(3m)^{r-1} = (3m)^r.$$

Лемма доказана.

Через $|V_m(\vec{k})|$ обозначим сумму всех коэффициентов многочлена Бернштейна $V_m(\vec{k}, \vec{\lambda})$. Непосредственный подсчет показывает, что
$$|V_m(\vec{k}_\alpha)| = \alpha^{m(m-1)/2}. \tag{2.11}$$

Лемма 2.6. *Пусть* $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. *Тогда*
$$|V_m(\vec{k})| \leqslant \alpha^{m(m-1)/2} (3m)^r. \tag{2.12}$$

Доказательство. Из лемм 2.2 и 2.3 следует, что

$$
\begin{aligned}
|V_m(\vec{k})| &= \lim_{\lambda_i\to 1, \overline{i=1,m}} V_m(\vec{k},\vec{\lambda}) \\
&= (-1)^{m(m-1)/2}\frac{|(\lambda^{k_i})^{(j-1)}|_{i,j=1}^m\big|_{\lambda=1}}{1!\,2!\cdots(m-1)!} = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{1!\,2!\cdots(m-1)!} \\
&\times \begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1(k_1-1) & \dots & k_1(k_1-1)\cdots(k_1-m+2) \\ 1 & k_2 & k_2(k_2-1) & \dots & k_2(k_2-1)\cdots(k_2-m+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k_m & k_m(k_m-1) & \dots & k_m(k_m-1)\cdots(k_m-m+2) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{m(m-1)/2}\frac{|k_i^{j-1}|_{i,j=1}^m}{1!\,2!\cdots(m-1)!} = \alpha^{m(m-1)/2}\frac{W_m(\vec{k})}{W_m(\vec{k}_\alpha)}\,.
\end{aligned}
$$

Теперь (2.12) является следствием неравенства (2.8). Заметим также, что из последних равенств при $\vec{k}=\vec{k}_\alpha$ получим (2.11). Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Пусть* $\vec{k}\in\mathbb{K}_r(m)$, $r\geqslant 0$, $\beta\geqslant 1$, *числа* $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ *удовлетворяют неравенствам* (2.5) *и выполняется условие* (1.9), *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(m(n))^{2+\beta}}{n}=0.$$

Тогда для некоторой постоянной c_3 *и* m, $0\leqslant m\leqslant m(n)$, *при* $n\geqslant n_0$

$$\frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)}\leqslant\left(\frac{c_3 m}{n}\right)^r. \tag{2.13}$$

Доказательство. Обозначив левую часть (2.13) через $\Omega(m)$, из определения многочленов Бернштейна (2.6) получаем

$$\Omega(m)=\frac{V_m(\vec{k},\vec{\lambda})}{V_m(\vec{k}_\alpha,\vec{\lambda})}\,.$$

Согласно лемме Бернштейна $V_m(\vec{k},\vec{\lambda})$ есть однородный многочлен порядка $k_1+k_2+\cdots+k_m-m(m-1)/2$ с положительными коэффициентами, а $V_m(\vec{k}_\alpha,\vec{\lambda})$ – однородный многочлен порядка

$$\alpha+2\alpha+\cdots+(m-1)\alpha-\frac{m(m-1)}{2}=\frac{\alpha m(m-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}$$

с положительными коэффициентами. Поэтому

$$\Omega(m)\leqslant\frac{|V_m(\vec{k})|\left(\frac{1}{c_1 n-c_2 m}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m-m(m-1)/2}}{|V_m(\vec{k}_\alpha)|\left(\frac{1}{c_1 n+c_2 m}\right)^{\alpha m(m-1)/2-m(m-1)/2}}\,.$$

Поскольку $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$, то

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = \frac{\alpha m(m-1)}{2} + r.$$

Отсюда, из равенства (2.11) и неравенства (2.12) следует, что

$$\Omega(m) \leqslant \frac{(3m)^r}{(c_1 n - c_2 m)^r} \left(\frac{c_1 n + c_2 m}{c_1 n - c_2 m} \right)^{(\alpha-1)m(m-1)/2} \leqslant \left(\frac{c_3 m}{n} \right)^r,$$

так как для $\beta \geqslant 1$ при выполнении условия (1.9) и $n \to \infty$

$$\left(\frac{c_1 n + c_2 m}{c_1 n - c_2 m} \right)^{(\alpha-1)m(m-1)/2} \sim 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Для системы функций* (2.2) *при* $\lambda_i \in D_\rho$, $i = \overline{1,m}$, *имеет место равенство*

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) = |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k}) |\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m,$$

где $A(\vec{k}) = |a_{k_j}^{(m-i)}|_{i,j=1}^m$.

Доказательство. По лемме Коши–Хуа Ло-кена

$$\Delta_m(\vec{\lambda}) = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geqslant 0} A(\vec{k}) |\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m.$$

Рассмотрим множество $\mathbb{K}(m) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{K}_r(m)$. Достаточно показать, что если $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_m \geqslant 0$ и $\vec{k} \notin \mathbb{K}(m)$, то $A(\vec{k}) = 0$.

Предположим, что $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \notin \mathbb{K}(m)$. Тогда существует ν, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, такое, что $k_\nu < \alpha(m-\nu)$. В противном случае все $k_i \geqslant \alpha(m-\nu)$, $i = \overline{1,m}$, и положив

$$r^* = k_1 + k_2 + \cdots + k_m - \frac{\alpha m(m-1)}{2},$$

получим, что $\vec{k} \in \mathbb{K}_{r^*}(m)$. Так как $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$, то $k_m < k_{m-1} < \cdots < k_\nu < \alpha(m-\nu)$. Тогда согласно предположениям (2.3)

$$a_{k_m}^{(m-\nu)} = a_{k_{m-1}}^{(m-\nu)} = \cdots = a_{k_\nu}^{(m-\nu)} = 0.$$

Если же $m - j > m - \nu$, то $k_m < k_{m-1} < \cdots < k_\nu < \alpha(m-j)$, и тогда по той же причине

$$a_{k_m}^{(m-j)} = a_{k_{m-1}}^{(m-j)} = \cdots = a_{k_\nu}^{(m-j)} = 0.$$

В таком случае определитель $A(\vec{k})$ примет вид

$$\begin{vmatrix} a_{k_1}^{(m-1)} & a_{k_2}^{(m-1)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k_1}^{(m-2)} & a_{k_2}^{(m-2)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{k_1}^{(m-\nu)} & a_{k_2}^{(m-\nu)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-\nu)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k_1}^{(m-\nu-1)} & a_{k_2}^{(m-\nu-1)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(m-\nu-1)} & a_{k_\nu}^{(m-\nu-1)} & a_{k_{\nu+1}}^{(m-\nu-1)} & \dots & a_{k_m}^{(m-\nu-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_1}^{(0)} & a_{k_2}^{(0)} & \dots & a_{k_{\nu-1}}^{(0)} & a_{k_\nu}^{(0)} & a_{k_{\nu+1}}^{(0)} & \dots & a_{k_m}^{(0)} \end{vmatrix}$$

и равен нулю, так как его порядок равен m и в нем имеется прямоугольный блок порядка $\nu \times (m-\nu+1)$, состоящий из нулей.

Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть*

$$A_r(m) := \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} |A(\vec{k})|.$$

Тогда при выполнении условий (2.3) *и* (2.4) *на коэффициенты степенных рядов* (2.2) *справедлива оценка*

$$A_r(m) \leqslant (cm^{1+\beta})^r. \tag{2.14}$$

Доказательство. Пусть $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. По определению

$$A(\vec{k}) = |a_{k_j}^{(m-i)}|_{i,j=1}^m = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_m)} \delta_{1,2,\dots,m}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \cdots a_{k_{j_m}}^{(0)},$$

где сумма распространяется на всевозможные перестановки $(j_1 j_2 \dots j_m)$ чисел $1, 2, \dots, m$, а $\delta_{1,2,\dots,m}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}$ равна 1 или -1 в зависимости от того, будет ли перестановка четной или нечетной. Положим для краткости

$$a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} = |a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \cdots a_{k_{j_m}}^{(0)}|.$$

Тогда

$$A_r(m) \leqslant \sum_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} \sum_{(j_1 j_2 \dots j_m)} a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}. \tag{2.15}$$

Рассмотрим $a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}$, где $\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)$. Если существует ν, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, такое, что $k_{j_\nu} < \alpha(m-\nu)$, то по предположению (2.3) $a_{k_{j_\nu}}^{(m-\nu)} = 0$ и, следовательно,

$$a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} = 0.$$

Поэтому в дальнейшем в сумме (2.15) будем рассматривать только те слагаемые $a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)}$, для которых

$$k_{j_\nu} \geqslant \alpha(m-\nu), \qquad \nu = \overline{1,m}. \tag{2.16}$$

Покажем, что число таких слагаемых не превышает числа решений диофантова уравнения (2.7). Действительно, рассмотрим отображение

$$\Omega\colon a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} \mapsto (I_1, I_2, \dots, I_m),$$

где $I_\nu = k_{j_\nu} - \alpha(m-\nu)$, $\nu = \overline{1,m}$. В силу (2.16) $I_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1,m}$, и

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + \dots + I_m &= \sum_{\nu=1}^{m} (k_{j_\nu} - \alpha(m-\nu)) \\ &= k_1 + k_2 + \dots + k_m - \frac{\alpha m(m-1)}{2} = r. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что Ω – инъекция. Пусть

$$a_{\vec{k}}^{(j_1 j_2 \dots j_m)} \neq a_{\vec{k}'}^{(j'_1 j'_2 \dots j'_m)}, \quad \text{где} \quad \vec{k}, \vec{k}' \in \mathbb{K}_r(m).$$

Тогда

$$|a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \cdots a_{k_{j_m}}^{(0)}| \neq |a_{k'_{j'_1}}^{(m-1)} a_{k'_{j'_2}}^{(m-2)} \cdots a_{k'_{j'_m}}^{(0)}|$$

и, следовательно,

$$(k_{j_1}, k_{j_2}, \dots, k_{j_m}) \neq (k'_{j'_1}, k'_{j'_2}, \dots, k'_{j'_m}).$$

Поэтому существует индекс ν, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, такой, что $k_{j_\nu} \neq k'_{j'_\nu}$. Значит, и

$$(I_1, I_2, \dots, I_m) \neq (I'_1, I'_2, \dots, I'_m),$$

так как

$$I_\nu = k_{j_\nu} - \alpha(m-\nu) \neq k'_{j'_\nu} - \alpha(m-\nu) = I'_\nu.$$

С учетом сказанного и леммы 2.4 получаем

$$A_r(m) \leqslant C_{m+r-1}^{r} \max_{\vec{k} \in \mathbb{K}_r(m)} \max_{(j_1 j_2 \dots j_m)} |a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \cdots a_{k_{j_m}}^{(0)}|. \tag{2.17}$$

Теперь воспользуемся условиями (2.4) на коэффициенты:

$$|a_{k_{j_\nu}}^{(m-\nu)}| \leqslant (c(m-\nu)^\beta)^{k_{j_\nu} - \alpha(m-\nu)} \leqslant (cm^\beta)^{k_{j_\nu} - \alpha(m-\nu)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |a_{k_{j_1}}^{(m-1)} a_{k_{j_2}}^{(m-2)} \cdots a_{k_{j_m}}^{(0)}| &\leqslant (cm^\beta)^{k_{j_1} + k_{j_2} + \dots + k_{j_m} - \alpha(1+2+\dots+m-1)} \\ &= (cm^\beta)^{k_1 + k_2 + \dots + k_m - \alpha m(m-1)/2} = (cm^\beta)^r. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.17), учитывая соотношение

$$C_{m+r-1}^{r} \leqslant m^r, \tag{2.18}$$

получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.1. Согласно лемме 2.8

$$\begin{aligned}\Delta_m(\vec{\lambda}) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\vec{k}\in\mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k})|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m \\ &= \sum_{\vec{k}\in\mathbb{K}_0(m)} A(\vec{k})|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\vec{k}\in\mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k})|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m.\end{aligned}$$

Множество $\mathbb{K}_0(m)$ состоит из одного элемента $\vec{k}_\alpha$, следовательно, первая сумма равна

$$A(\vec{k}_\alpha)|\lambda_j^{\alpha(m-i)}|_{i,j=1}^m = A(\vec{k}_\alpha)W_m(\vec{\lambda}^\alpha) = W_m(\vec{\lambda}^\alpha)$$

в силу того, что при условии (2.3) на коэффициенты

$$A(\vec{k}_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k_{\alpha,1}}^{(m-2)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k_{\alpha,1}}^{(m-3)} & a_{k_{\alpha,2}}^{(m-3)} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_{\alpha,1}}^{(1)} & a_{k_{\alpha,2}}^{(1)} & a_{k_{\alpha,3}}^{(1)} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta_m(\vec{\lambda})}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\vec{k}\in\mathbb{K}_r(m)} A(\vec{k}) \frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)}.$$

Второе слагаемое правой части по модулю не превышает

$$\sum_{r=1}^{\infty} \biggl(\biggl(\sum_{\vec{k}\in\mathbb{K}_r(m)} |A(\vec{k})| \biggr) \max_{\vec{k}\in\mathbb{K}_r(m)} \frac{|\lambda_j^{k_i}|_{i,j=1}^m}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)} \biggr).$$

Отсюда на основании лемм 2.7 и 2.9, воспользовавшись неравенствами (2.13), (2.14) и условием (1.9), получаем

$$\left| \frac{\Delta_m(\vec{\lambda})}{W_m(\vec{\lambda}^\alpha)} - 1 \right| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \left((cm^{1+\beta})^r \left(\frac{c_3 m}{n} \right)^r \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(c_4 \frac{m^{2+\beta}}{n} \right)^r = o(1).$$

Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Асимптотика определителей Адамара функций из $\mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$

Пусть $\pi_{n,m}(z;f) = P_{n,m}(z)/Q_{m,n}(z)$ – аппроксимации Паде функции f, заданной рядом (1.1). Тогда (см. [1; гл. 1, § 1.1, (1.11)])

$$(Q_{m,n}f - P_{n,m})(z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k} z^{n+m+k}, \tag{3.1}$$

где

$$D_{n,m,k}=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n & f_{n+1}\\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2}\\ \hdotsfor{5}\\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m}\\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \cdots & f_{n+m+k-1} & f_{n+m+k}\end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Для знаменателя $\pi_{n,m}(\,\cdot\,;f)$ (см. [1; гл. 1, § 1.1, (1.8)]) имеет место представление ($f_j=0$ при $j<0$)

$$Q_{m,n}(z)=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n & f_{n+1}\\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2}\\ \hdotsfor{5}\\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m}\\ z^m & z^{m-1} & \cdots & z & 1\end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Через $D^j_{n,m}$ обозначим миноры элементов z^j, $j=\overline{0,m}$, последней строки определителя (3.3). Тогда

$$D_{n,m}=D^0_{n,m},\qquad D_{n+1,m+1}=D_{n,m,1}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $f\in\mathscr{A}^\alpha_\beta(q)$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $\beta\geqslant1$, $q\in\mathbb{C}$, и выполняется условие* (1.9). *Тогда для каждого m, $0\leqslant m\leqslant m(n)$, при $n\to\infty$*

$$D_{n,m}\sim(-q)^{m(m-1)/2}\prod_{k=0}^{m-1}f_{n-k}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(\lambda_j^\alpha-\lambda_i^\alpha), \tag{3.4}$$

$$D^j_{n,m}\sim(-q)^{m(m-1)/2}\frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}}\prod_{k=0}^{m-1}f_{n-k}\prod_{1\leqslant i<l\leqslant m}(\lambda_{l,j}^\alpha-\lambda_{i,j}^\alpha), \tag{3.5}$$

где

$$\lambda_{i,j}=\lambda_i=\frac{1}{n+1-i},\quad i\neq j;\qquad \lambda_{j,j}=\frac{1}{n+1},\quad j=\overline{1,m}.$$

Доказательство. Определитель не изменится, если каждый его элемент заменить симметричным относительно второстепенной диагонали. Поэтому

$$D_{n,m}=\begin{vmatrix} f_{n+m-1} & f_{n+m-2} & \cdots & f_n\\ f_{n+m-2} & f_{n+m-3} & \cdots & f_{n-1}\\ \hdotsfor{4}\\ f_{n+1} & f_n & \cdots & f_{n-m+2}\\ f_n & f_{n-1} & \cdots & f_{n-m+1}\end{vmatrix}$$

$$=f_nf_{n-1}\cdots f_{n-m+1}\begin{vmatrix} \dfrac{f_{n+m-1}}{f_n} & \dfrac{f_{n+m-2}}{f_{n-1}} & \cdots & \dfrac{f_n}{f_{n+m-1}}\\ \dfrac{f_{n+m-2}}{f_n} & \dfrac{f_{n+m-3}}{f_{n-1}} & \cdots & \dfrac{f_{n-1}}{f_{n+m-1}}\\ \hdotsfor{4}\\ \dfrac{f_{n+1}}{f_n} & \dfrac{f_n}{f_{n-1}} & \cdots & \dfrac{f_{n-m+2}}{f_{n+m-1}}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

Поскольку $f \in \mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$, то из условий (1.11)

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = q^j \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} \frac{1}{n^k}, \qquad j = \overline{0, m-1},$$

где

$$\begin{cases} a_0^{(0)} = 1, & a_k^{(0)} = 0,\ k \geqslant 1; \\ a_{\alpha j}^{(j)} = 1, & 1 \leqslant j \leqslant m-1; \\ a_k^{(j)} = 0, & 0 \leqslant k < \alpha j,\ 1 \leqslant j \leqslant m-1; \\ a_k^{(j)} = b_{k-\alpha j}^{(j)}, & k \geqslant \alpha j + 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m-1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Поэтому, определяя функции $\{f_{m-i}\}_{i=1}^m$ равенствами

$$\begin{aligned} f_{m-1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m-1)} z^k, \\ f_{m-2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m-2)} z^k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} z^k, \\ f_0(z) &= 1 \end{aligned}$$

и полагая $\lambda_j = 1/(n+1-j)$, $j = \overline{1, m}$, получаем

$$D_{n,m} = q^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} |f_{m-i}(\lambda_j)|_{i,j=1}^m.$$

Из равенств (3.6) и неравенства (1.10) следует, что выполняются все условия теоремы 2.1. Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{n,m} &\sim q^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} W_m(\vec{\lambda}^\alpha) \\ &= q^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha) \\ &= (-q)^{m(m-1)/2} \prod_{j=0}^{m-1} f_{n-j} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha). \end{aligned}$$

Эквивалентность (3.4) доказана, а вместе с ней доказана и теорема 1.1.

Аналогично при $j = \overline{1,m}$ (полужирным шрифтом помечен столбец, который отсутствует)

$$D^j_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & \boldsymbol{f_{n-j+1}} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & \boldsymbol{f_{n-j+2}} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1} & f_n & \cdots & \boldsymbol{f_{n+m-j-1}} & \cdots & f_{n+m-2} & f_{n+m-1} \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & \boldsymbol{f_{n+m-j}} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_{n+1} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+2} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1} & f_n & \cdots & f_{n+m-1} & \cdots & f_{n+m-2} \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}$$

$$\sim (-1)^{j-1} q^{m(m-1)/2} \frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}} \prod_{k=0}^{m-1} f_{n-k} \prod_{1 \leqslant i < l \leqslant m} (\lambda^\alpha_{i,j} - \lambda^\alpha_{l,j}).$$

Отсюда, учитывая определение чисел $\lambda_{i,j}$, получаем (3.5).

Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. *При выполнении условий теоремы* 3.1 *и* $z \in D$

$$Q_{m,n}(z) = D_{n,m}\left(1 + O\left(\frac{m}{n^\alpha}\right)\right). \tag{3.7}$$

Доказательство. Из (3.3) следует (см. [1; гл. 1, § 1.1]), что

$$Q_{m,n}(z) = \sum_{j=0}^m D^j_{n,m}(-z)^j = D_{n,m}\left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{D^j_{n,m}}{D_{n,m}}(-z)^j\right).$$

С учетом соотношений (3.4) и (3.5) при $j = \overline{1,m}$ и $n \to \infty$

$$\left|\frac{D^j_{n,m}}{D_{n,m}}\right| \sim \left|\frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}}\right| \prod_{i=1, i\neq j}^m \left|\frac{\lambda^\alpha_{j,j} - \lambda^\alpha_i}{\lambda^\alpha_j - \lambda^\alpha_i}\right|$$

$$= \left|\frac{f_{n+1}}{f_{n-j+1}}\right| \prod_{i=1, i\neq j}^m \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+1-i)^\alpha}}{\frac{1}{(n+1-j)^\alpha} - \frac{1}{(n+1-i)^\alpha}}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{2q}{(n+1-j)^\alpha}\right|^j \prod_{i=1, i\neq j}^m \left|\frac{\frac{\alpha}{(n+1-m)^{\alpha-1}}}{\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha-1}}} \, \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1-i}}{\frac{1}{n+1-j} - \frac{1}{n+1-i}}\right|$$

$$\leqslant C^j_m \left|\frac{2q}{(n+1-j)^\alpha}\right|^j \left|\frac{n+1}{n+1-m}\right|^{(m-1)(\alpha-1)} \leqslant 2C^j_m \left|\frac{2q}{(n+1-j)^\alpha}\right|^j.$$

Далее, при $j \leqslant m$ и достаточно больших n

$$\frac{1}{(n-j)^k} = \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=0}^\infty C^\nu_{k+\nu-1} \left(\frac{j}{n}\right)^\nu \leqslant \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=0}^\infty \left(\frac{kj}{n}\right)^\nu.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{D_{n,m}^j}{D_{n,m}}\right| \leqslant 2\sum_{j=1}^{m} C_m^j \left(\frac{4|q|}{n^\alpha}\right)^j \leqslant 2\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{4|q|m}{n^\alpha}\right)^j = O\left(\left(\frac{4|q|m}{n^\alpha}\right)^j\right).$$

Отсюда и следует (3.7).

Следствие доказано.

Теорема 3.2. *Пусть $f \in \mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие* (1.9). *Тогда для каждого m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$D_{n,m,k} \sim (-q)^{m(m+1)/2} f_{n+k} \prod_{\nu=0}^{m-1} f_{n-\nu} \prod_{0\leqslant i<j\leqslant m} (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha), \tag{3.8}$$

где

$$\lambda_i = \frac{1}{n+1-i}, \quad i=\overline{1,m}; \qquad \lambda_0 = \frac{1}{n+k}, \quad k=1,2,\dots.$$

Доказательство. При $k = 1$ соотношение (3.8) следует из (3.4), так как $D_{n,m,1} = D_{n+1,m+1}$. Применяя элементарные преобразования определителя $D_{n,m,k}$ (см. (3.2)), получаем

$$D_{n,m,k} = f_{n+k}\prod_{\nu=0}^{m-1} f_{n-\nu}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{f_{n-m+2}}{f_{n-m+1}} & \dots & \dfrac{f_n}{f_{n-m+1}} & \dfrac{f_{n+1}}{f_{n-m+1}} \\ 1 & \dfrac{f_{n-m+3}}{f_{n-m+2}} & \dots & \dfrac{f_{n+1}}{f_{n-m+2}} & \dfrac{f_{n+2}}{f_{n-m+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dfrac{f_{n+1}}{f_n} & \dots & \dfrac{f_{n+m-1}}{f_n} & \dfrac{f_{n+m}}{f_n} \\ 1 & \dfrac{f_{n+k+1}}{f_{n+k}} & \dots & \dfrac{f_{n+m+k-1}}{f_{n+k}} & \dfrac{f_{n+m+k}}{f_{n+k}} \end{vmatrix}$$

$$= f_{n+k}\prod_{\nu=0}^{m-1} f_{n-\nu}\begin{vmatrix} \dfrac{f_{n+m+k}}{f_{n+k}} & \dfrac{f_{n+m}}{f_n} & \dots & \dfrac{f_{n+2}}{f_{n-m+2}} & \dfrac{f_{n+1}}{f_{n-m+1}} \\ \dfrac{f_{n+m+k-1}}{f_{n+k}} & \dfrac{f_{n+m-1}}{f_n} & \dots & \dfrac{f_{n+1}}{f_{n-m+2}} & \dfrac{f_n}{f_{n-m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{f_{n+k+1}}{f_{n+k}} & \dfrac{f_{n+1}}{f_n} & \dots & \dfrac{f_{n-m+3}}{f_{n-m+2}} & \dfrac{f_{n-m+2}}{f_{n-m+1}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления последнего определителя остается применить теорему 2.1.

Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Рациональная аппроксимация функций класса $\mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$

Результаты предыдущего параграфа позволяют исследовать поведение некоторых последовательностей элементов таблиц (1.2) функций из класса $\mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in \mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие* (1.9). *Тогда для любых $z \in D$ и m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$\begin{aligned} f(z) - \pi_{n,m}(z;f) &= \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} z^{n+m+1}\left(1 + O\left(\frac{m+1}{n^\alpha}\right)\right) \\ &= (-1)^m m! f_{n+1}\left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}}\right)^m z^{n+m+1}\left(1+O\left(\frac{m+1}{n^\alpha}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Доказательство. Из (3.1) и следствия 3.1 (см. (3.7)) имеем

$$f(z)-\pi_{n,m}(z;f)=\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}z^{n+m+1}\left(1+O\left(\frac{m}{n^{\alpha}}\right)\right). \tag{4.2}$$

Учитывая (3.4) и (3.8), получаем

$$\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}}=\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}=(-q)^m f_{n+1}\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_0^{\alpha}),$$

где $\lambda_i=1/(n+1-i)$, $i=\overline{0,m}$. Так как

$$\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_0^{\alpha})=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(n+1-i)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{(n+1)^{\alpha}-(n+1-i)^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}(n+1-i)^{\alpha}}\sim m!\left(\frac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{2\alpha}}\right)^m=m!\left(\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}\right)^m,$$

то, окончательно,

$$\frac{D_{n,m,1}}{D_{n,m}}\sim(-1)^m m! f_{n+1}\left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}}\right)^m. \tag{4.3}$$

Далее, из (3.8) при $n\geqslant n_0$ следует

$$\left|\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}\right|\sim\left|\frac{f_{n+k}}{f_{n+1}}\right|\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(n+1-i)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+k)^{\alpha}}\right)}{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(n+1-i)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right)}$$
$$\leqslant\left|\frac{f_{n+k}}{f_{n+1}}\right|\frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}\left(\frac{n+1}{n+1-m}\right)^{(\alpha-1)m}$$
$$\leqslant 2C_{m+k-1}^{k-1}\left|\frac{f_{n+k}}{f_{n+1}}\right|.$$

Поэтому

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}\right|\leqslant c\sum_{k=2}^{\infty}C_{m+k-1}^{k-1}\left|\frac{f_{n+k}}{f_{n+1}}\right|.$$

Из условий на коэффициенты ($j=1$) при $n\geqslant n_0$

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right|\leqslant\frac{2|q|}{n^{\alpha}}.$$

Тогда для $n\geqslant n_0$

$$\left|\frac{f_{n+k}}{f_{n+1}}\right|=\left|\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right|\left|\frac{f_{n+3}}{f_{n+2}}\right|\cdots\left|\frac{f_{n+k}}{f_{n+k-1}}\right|$$
$$\leqslant\frac{2|q|}{(n+1)^{\alpha}}\,\frac{2|q|}{(n+2)^{\alpha}}\cdots\frac{2|q|}{(n+k-1)^{\alpha}}\leqslant\left(\frac{2|q|}{n^{\alpha}}\right)^{k-1}.$$

Из последних трех неравенств и неравенства (2.18) получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}\right| \leqslant c\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2|q|(m+1)}{n^{\alpha}}\right)^{k-1} = O\left(\frac{m+1}{n^{\alpha}}\right). \tag{4.4}$$

Теперь равенства (4.1) являются следствием соотношений (4.2)–(4.4).

Теорема 4.1 доказана.

Покажем, как с помощью простых соображений класс функций, к которым применима теорема 4.1, можно существенно расширить, рассматривая функции, у которых коэффициенты степенного ряда не обязательно отличны от нуля.

Пусть

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{l_n}, \tag{4.5}$$

где l_n – арифметическая прогрессия, членами которой являются целые неотрицательные числа, а разность $d \in \mathbb{N}$, т.е. $l_n = l_0 + dn$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При этом коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ степенного ряда (4.5) не равны нулю и удовлетворяют условиям (1.9)–(1.11). Положим $\xi = z^d$. Следовательно,

$$g(z) = z^{l_0}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n = z^{l_0} f(z^d), \tag{4.6}$$

где $f \in \mathscr{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$. Пусть теперь $\pi_{n,m}(\xi; f)$ – аппроксимация Паде порядка (n, m) функции $f(\xi)$, существование которой доказано в §3 (см. [1; гл. 1, §1.4]). Тогда

$$f(\xi) - \pi_{n,m}(\xi; f) = O(\xi^{n+m+1}).$$

Поэтому

$$z^{l_0} f(z^d) - z^{l_0}\pi_{n,m}(z^d; f) = O(z^{d(n+m)+l_0+d}),$$

т.е.

$$g(z) - z^{l_0}\pi_{n,m}(z^d; f) = O(z^{d(n+m)+l_0+d}).$$

Отсюда следует, что

$$\pi_{l_n+i,dm+j}(z; g) = z^{l_0}\pi_{n,m}(z^d; f)$$

при $0 \leqslant i + j \leqslant d - 1$. Более того, если $0 \leqslant i + j \leqslant d - 1$, то для всех $z \in D$

$$g(z) - \pi_{l_n+i,dm+j}(z; g) = z^{l_0}(f(z^d) - \pi_{n,m}(z^d; f)).$$

С учетом этого замечания для функции (4.5) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть функция g представима в виде* (4.6), *где $f \in \mathscr{A}_{\beta}^{\alpha}(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие* (1.9). *Тогда для любых $z \in D$ и m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$\begin{aligned} g(z) &- \pi_{l_n+i,dm+j}(z; g) \\ &= (-1)^m m! f_{n+1}\left(\frac{\alpha q}{n^{\alpha+1}}\right)^m z^{l_n+dm+d}\left(1 + O\left(\frac{m+1}{n^{\alpha}}\right)\right), \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $0 \leqslant i + j \leqslant d - 1$.

Следующая лемма принадлежит В. К. Дзядыку (см. [2; лемма 3.1]).

Лемма 4.2. *Если аналитическая в односвязной области G и непрерывная на $\overline{G}$ функция φ имеет в G, по крайней мере, $n+1$ нуль, то при произвольном целом $m \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$R_{n,m}(\varphi;\overline{G}) \geqslant \min_{z\in\partial G}|\varphi(z)|.$$

Теорема 4.3. *Пусть $f \in \mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие* (1.9). *Тогда для любого m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$R_{n,m}(f) \sim \left|\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}\right| \sim m!\,|f_{n+1}|\left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m.$$

Теорема 4.4. *Пусть функция g представима в виде* (4.6), *где $f \in \mathscr{A}_\beta^\alpha(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{C}$, и выполняется условие* (1.9). *Тогда для любого m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$R_{l_n+i,dm+j}(g) \sim \left|\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}\right| \sim m!\,|f_{n+1}|\left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m,$$

где $0 \leqslant i+j \leqslant d-1$.

Замечание 4.1. При $m=0$ считаем, что $D_{n,0}=1$, $D_{n+1,1}=f_{n+1}$.

Замечание 4.2. Интересно то, что правая часть в последнем соотношении не зависит от d. Это обстоятельство объясняет ухудшение (данное явление подробно рассмотрено в следующем параграфе) аппроксимационных свойств элементов таблиц Паде и Чебышёва функции f при усилении лакунарности степенного ряда (1.1).

Остановимся на доказательстве теоремы 4.4. Определим функцию φ, полагая

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= m!\,f_{n+1}\left(\frac{-\alpha q}{n^{\alpha+1}}\right)^m z^{l_n+dm+d}\left(1+O\left(\frac{m+1}{n^\alpha}\right)\right)\\ &= \frac{1}{Q_{m,n}(z)}\sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,k}z^{n+m+k}.\end{aligned}$$

Из (3.8) и следствия (3.1) имеем, что при достаточно больших n φ аналитична внутри D, непрерывна на D и имеет в единичном круге l_n+dm+d нулей. Тогда, учитывая, что рациональная функция $z^{l_0}\pi_{n,m}(z^d;f)$ имеет порядок знаменателя не выше dm, а порядок числителя – не выше l_n, на основании равенства (4.7) и леммы 4.1 получаем, что при больших n

$$R_{l_n+i,dm+j}(g) \geqslant R_{l_n+dm+i,2dm+j}(\varphi) \geqslant \min_{|z|=1}|\varphi(z)| \sim m!|f_{n+1}|\left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m,$$

где $0 \leqslant i+j \leqslant d-1$. Теперь остается заметить, что

$$\begin{aligned}R_{l_n+i,dm+j}(g) &\leqslant \max_{|z|=1}|g(z)-\pi_{l_n+i,dm+j}(z;g)|\\ &\leqslant \max_{|z|=1}|\varphi(z)| \sim m!|f_{n+1}|\left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m.\end{aligned}$$

Теорема 4.4 доказана.

Доказательство теоремы 4.3 проводится аналогично. Очевидно также, что теоремы 1.2 и 1.3 являются следствием теорем 4.1–4.4.

В заключение этого параграфа коснемся одной гипотезы В. К. Дзядыка (см. [2]). Известно [7], что аппроксимации Паде $\pi_{2n,2n}(\,\cdot\,;e^z)$ в сравнении с многочленами Тейлора $\pi_{4n,0}(\,\cdot\,;e^z)$ дают существенный выигрыш в скорости приближения экспоненты. Оценка снизу нормы разности $\sin z - \pi_{2n+1,2n}(z;\sin\xi)$, полученная в [2], показывает, что для синуса аналогичный выигрыш, по крайней мере, в $(4/3)^n$ раз хуже, чем для экспоненты. Более того, В. К. Дзядык замечает, "что если провести точные вычисления при $n = 1,2,\ldots,9$, то вообще никакого выигрыша не обнаружим, а получим при помощи полиномов Паде $\pi_{2n+1,2n}(z;\sin\xi)$ примерно такую величину приближения функции $\sin z$, как и в случае ее приближения при помощи сумм Тейлора степени $4n+1$, $n = 1,2,\ldots,9$". Теоремы 4.1 и 4.2 позволяют внести ясность в эту ситуацию, по крайней мере, в случае, когда последовательность $m(n)\to\infty$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(m(n))^4}{n} = 0. \tag{4.8}$$

Действительно, в следующем параграфе будет показано, что экспонента принадлежит классу $\mathscr{A}_2^1(1)$, а

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = zf(z^2),$$

где $f\in\mathscr{A}_2^2(1/4)$. Поэтому, применяя теорему 4.2 ($f_n = 1/(2n+1)!$) и формулу Стирлинга, при $n\to\infty$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{\|\sin z - \pi_{2n+1,2m}(z;\sin\xi)\|}{\|\sin z - \pi_{2n+2m+1,0}(z;\sin\xi)\|} &\sim m!\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+m+1}}\right|\left(\frac{1}{2n^3}\right)^m \\ &\sim m!\,(4n^2)^m\left(\frac{1}{2n^3}\right)^m \sim m!\left(\frac{2}{n}\right)^m \sim \sqrt{2\pi m}\left(\frac{2}{e}\,\frac{m}{n}\right)^m.\end{aligned}$$

Аналогично, воспользовавшись теоремой 4.1 при $n\to\infty$, будем иметь (см. также [7])

$$\begin{aligned}\frac{\|e^z - \pi_{2n+1,2m}(z;e^\xi)\|}{\|e^z - \pi_{2(n+m)+1,0}(z;e^\xi)\|} &\sim (2m)!\left|\frac{f_{2n+2}}{f_{2(n+m+1)}}\right|\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^{2m} \\ &\sim (2m)!\,(2n+2)^{2m}\frac{1}{(2n+1)^{4m}} \sim (2m)!\left(\frac{1}{2n}\right)^{2m} \sim \sqrt{4\pi m}\left(\frac{1}{e}\,\frac{m}{n}\right)^{2m}.\end{aligned}$$

Таким образом, аппроксимации Паде в сравнении с суммами Тейлора и для $\sin z$ дают значительный выигрыш в скорости аппроксимации. Правда, этот выигрыш в $(2en/m)^m/\sqrt{2}$ раз меньше, чем для экспоненты. В следующем параграфе будет показано, что данное явление имеет место и для других известных целых функций.

§ 5. Поведение параболических последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва для индивидуальных функций

В этом параграфе покажем, что проверку условий (1.10), (1.11) для многих элементарных функций, часто встречающихся в анализе и его приложениях, можно существенно упростить. Как правило, коэффициенты Тейлора известных функций удовлетворяют следующим ограничениям: существует такая последовательность комплексных чисел $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что при $n \geqslant n_0$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{q}{n^{\alpha}}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{n^k}\right), \tag{5.1}$$

где α – фиксированное натуральное число, $q \in \mathbb{C}$ и

$$|b_k| \leqslant M^k, \qquad M = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{5.2}$$

Множество всех функций f вида (1.1), для которых существует такая последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, что справедливы соотношения (5.1), (5.2), обозначим через $\mathscr{A}(\alpha, q)$.

Теорема 5.1. *Если $\alpha \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{C}$, то $\mathscr{A}(\alpha, q) \subset \mathscr{A}_2^{\alpha}(q)$.*

Доказательство. Предположим, что $f \in \mathscr{A}(\alpha, q)$. Необходимо показать, что для любого $j \leqslant m(n)$ и последовательности $m(n)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(m(n))^4}{n} = 0,$$

существует последовательность комплексных чисел $\{b_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$|b_{k,j}| \leqslant (cj^2)^k, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

и при $n \geqslant n_0$

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \left(\frac{q}{n^{\alpha}}\right)^j \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,j}}{n^k}\right).$$

Далее нам понадобится следующая лемма, которая является следствием формулы, связывающей коэффициенты степенных рядов при их перемножении.

Лемма 5.1. *Пусть*

$$f(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n^k}, \qquad |\alpha_k| \leqslant M_1^k, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$g(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{n^k}, \qquad |\beta_k| \leqslant M_2^k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$f(n)g(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n^k}, \qquad |\gamma_k| \leqslant (M_1 + M_2)^k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Продолжим доказательство теоремы 5.1. В силу условий (5.1)

$$\frac{f_{n+j+1}}{f_{n+j}} = \frac{q}{(n+j)^\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(n+j)^k}\right). \tag{5.3}$$

При $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ и $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\alpha+k-1}^{k} z^k.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(n+j)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{\alpha+k-1}^{k}\left(\frac{j}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{n^k},$$

где в силу неравенства (2.18)

$$|\alpha_k| = |C_{\alpha+k-1}^{k} j^k| \leqslant (\alpha j)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.4}$$

Далее,

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(n+j)^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{n^k}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu C_{k+\nu-1}^{\nu}\left(\frac{j}{n}\right)^\nu = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{n^k},$$

где

$$\begin{aligned} |\beta_k| &= \left|\sum_{i=1}^{k} b_i(-1)^{k-i} j^{k-i} C_{k-1}^{k-i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} C_{k-1}^{k-i} M^i j^{k-i} \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^{l} M^{k-l} j^l = M(M+j)^{k-1} \leqslant (M+j)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Применяя лемму 5.1 к произведению (5.3) и учитывая (5.4), (5.5), при $n \geqslant n_0$ получаем

$$\frac{f_{n+j+1}}{f_{n+j}} = \frac{q}{n^\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{k,j}}{n^k}\right),$$

где

$$|\alpha_{k,j}| \leqslant (M + j + \alpha j)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда, учитывая представление

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n}\,\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\cdots\frac{f_{n+j}}{f_{n+j-1}}$$

и применяя лемму 5.1, с помощью индукции по j легко показать, что

$$\frac{f_{n+j}}{f_n} = \left(\frac{q}{n^\alpha}\right)^j\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{k,j}}{n^k}\right),$$

где
$$|b_{k,j}| \leqslant \left(M(j-1) + \frac{(\alpha+1)j(j-1)}{2}\right)^k, \qquad k = 1, 2, \dots$$
и $j \leqslant m(n)$. Тогда, положив $c = \max\{M, (\alpha+1)/2\}$, получим
$$|b_{k,j}| \leqslant (cj^2)^k, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Теорема 5.1 доказана.

Пусть теперь
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{l_n},$$
где l_n – арифметическая прогрессия, члены которой неотрицательные целые числа, а разность $d \in \mathbb{N}$. Предположим также, что функция
$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n \tag{5.6}$$
принадлежит классу $\mathscr{A}(\alpha, q)$ и
$$g(z) = z^{l_0} f(z^d).$$
Для удобства о g также будем говорить, что она принадлежит классу $\mathscr{A}(\alpha, q)$. Теорема 5.1 позволяет к функциям $f \in \mathscr{A}(\alpha, q)$ и g применять теоремы 4.1–4.4. В результате для m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при выполнении условия (4.8) получим ряд следствий.

Следствие 5.1. *Функция e^z принадлежит классу $\mathscr{A}(1,1)$ и при $n \to \infty$*
$$R_{n,m}(e^z) \sim \|e^z - \pi_{n,m}(z; e^\xi)\| \sim \frac{m!}{(n+1)!\, n^{2m}}$$
$$\sim m! \left(\frac{1}{n}\right)^m R_{n+m,0}(e^z) \sim m! \left(\frac{1}{n}\right)^m \|e^z - \pi_{n+m,0}(z; e^\xi)\|.$$

Следствие 5.2. *Функции*
$$\cos z, \quad \operatorname{ch} z, \quad \frac{\sin z}{z}, \quad \frac{\operatorname{sh} z}{z}$$
принадлежат классу $\mathscr{A}(2, 1/4)$, и если g $(l_0 = 0,\ d = 2)$ одна из них, то при $n \to \infty$
$$R_{2n+i,2m+j}(g) \sim \|g - \pi_{2n+i,2m+j}(\,\cdot\,; g)\| \sim \frac{m!}{(2n^3)^m} R_{2n,0}(g)$$
$$\sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m R_{2(n+m),0}(g) \sim m! \left(\frac{2}{n}\right)^m \|g - \pi_{2(n+m),0}(\,\cdot\,; g)\|,$$
где $0 \leqslant i + j \leqslant 1$ и
$$R_{2n,0}(g) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{(2n+2)!}, & \text{если } g(z) = \cos z, \operatorname{ch} z; \\[2mm] \dfrac{1}{(2n+3)!}, & \text{если } g(z) = \dfrac{\sin z}{z}, \dfrac{\operatorname{sh} z}{z}. \end{cases}$$

Следствие 5.3. *Функции* $\sin z$, $\operatorname{sh} z$ *принадлежат классу* $\mathscr{A}(2,1/4)$, *и если* g $(l_0=1,\ d=2)$ *одна из них, то при* $0\leqslant i+j\leqslant 1$ *и* $n\to\infty$

$$\begin{aligned}R_{2n+1+i,2m+j}(g)\sim\|g-\pi_{2n+1+i,2m+j}(\,\cdot\,;g)\|&\sim\frac{m!}{(2n^3)^m(2n+3)!}\\&\sim m!\left(\frac{2}{n}\right)^m R_{2(n+m)+1,0}(g)\\&\sim m!\left(\frac{2}{n}\right)^m\|g-\pi_{2(n+m)+1,0}(\,\cdot\,;g)\|.\end{aligned}$$

Следствие 5.4. *Пусть* J_ν, I_ν *суть соответственно функция Бесселя первого рода и модифицированная функция Бесселя при* $\nu=1,2,\dots$, *т.е.*

$$J_\nu=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(z/2)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}\,,$$
$$I_\nu=\sum_{n=0}^\infty\frac{(z/2)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}\,.$$

Тогда функции $J_\nu, I_\nu\in\mathscr{A}(2,1/4)$, *и если* g $(l_0=\nu,\ d=2)$ *одна из них, то при* $0\leqslant i+j\leqslant 1$ *и* $n\to\infty$

$$\begin{aligned}R_{2n+\nu+i,2m+j}(g)&\sim\|g-\pi_{2n+\nu+i,2m+j}(\,\cdot\,;g)\|\\&\sim\frac{m!}{2^{2n+m+\nu+2}n^{3m}(n+1)!(n+\nu+1)!}\,.\end{aligned}$$

Следствие 5.5. *Интеграл вероятности*

$$\operatorname{Er}f(z)=\int_0^z e^{-t^2}\,dt=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

принадлежит классу $\mathscr{A}(1,-1)$ $(l_0=1,\ d=2)$ *и при* $n\to\infty$

$$R_{2n+1+i,2m+j}(\operatorname{Er}f)\sim\|\operatorname{Er}f-\pi_{2n+1+i,2m+j}(\,\cdot\,;\operatorname{Er}f)\|\sim\frac{m!}{2n^{2m+1}(n+1)!}\,,$$

где $0\leqslant i+j\leqslant 1$.

Следствие 5.6. *Функция*

$$G(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{(n!)^{1/\lambda}}\,,\qquad\lambda>0,\quad\frac{1}{\lambda}\in\mathbb{N},$$

принадлежит классу $\mathscr{A}(1/\lambda,1)$ *и при* $n\to\infty$

$$R_{n,m}(G)\sim\|G-\pi_{n,m}(\,\cdot\,;G)\|\sim\frac{m!}{((n+1)!)^{1/\lambda}(\lambda n^{1+1/\lambda})^m}\,.\tag{5.7}$$

Следствие 5.7. *Функция Миттаг-Леффлера*

$$M(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+n/\lambda)}\,,\qquad \lambda>0,\quad \frac{1}{\lambda}\in\mathbb{N},$$

принадлежит классу $\mathscr{A}(1/\lambda,\lambda^{1/\lambda})$ *и при* $n\to\infty$

$$R_{n,m}(M)\sim\|M-\pi_{n,m}(\,\cdot\,;M)\|\sim\frac{m!}{\Gamma(1+(n+1)/\lambda)}\left(\frac{\lambda^{1/\lambda-1}}{n^{1/\lambda+1}}\right)^m. \tag{5.8}$$

Для фиксированного m соотношения (5.7) и (5.8) установлены в [13] при произвольном $\lambda>0$. Можно показать, что следствия 5.6 и 5.7 остаются в силе для $m\leqslant m(n)$ при выполнении (4.8), если λ – вещественное число и $0<\lambda\leqslant 4$.

Следствие 5.8. *Функции*

$$\frac{1}{2}(\operatorname{ch}z+\cos z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!}\,,$$
$$\cos\frac{z}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{z}{\sqrt{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n}}{(4n)!}$$

принадлежат классу $\mathscr{A}(4,1/256)$, *и если* g $(l_0=0,\ d=4)$ *одна из них, то при* $0\leqslant i+j\leqslant 3$ *и* $n\to\infty$

$$R_{4n+i,4m+j}(g)\sim\|g-\pi_{4n+i,4m+j}(\,\cdot\,;g)\|\sim\frac{m!}{(4n+4)!\,(64n^5)^m}$$
$$\sim m!\left(\frac{4}{n}\right)^m R_{4(n+m),0}(g)\sim m!\left(\frac{4}{n}\right)^m\|g-\pi_{4(n+m),0}(\,\cdot\,;g)\|.$$

Следствие 5.9. *Функции*

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sh}z+\sin z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sh}\frac{z}{\sqrt{2}}\cos\frac{z}{\sqrt{2}}+\operatorname{ch}\frac{z}{\sqrt{2}}\sin\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

принадлежат классу $\mathscr{A}(4,1/256)$, *и если* g $(l_0=1,\ d=4)$ *одна из них, то при* $0\leqslant i+j\leqslant 3$ *и* $n\to\infty$

$$R_{4n+1+i,4m+j}(g)\sim\|g-\pi_{4n+1+i,4m+j}(\,\cdot\,;g)\|\sim\frac{m!}{(4n+5)!\,(64n^5)^m}$$
$$\sim m!\left(\frac{4}{n}\right)^m R_{4(n+m)+1,0}(g)$$
$$\sim m!\left(\frac{4}{n}\right)^m\|g-\pi_{4(n+m)+1,0}(\,\cdot\,;g)\|.$$

Для функций из двух последних следствий при выполнении условий (4.8), $0 \leqslant m \leqslant m(n)$ и $n \to \infty$ аппроксимации Паде дают выигрыш в сравнении с многочленами Тейлора, но он меньше выигрыша для экспоненты уже в $(4en/m)^m/\sqrt{2}$ раз. Если предположить, что следствия 5.8 и 5.9 справедливы для m, сравнимых с n, то для таких m при $n \to \infty$

$$m!\left(\frac{4}{n}\right)^m \sim \sqrt{2\pi m}\left(\frac{4}{e}\,\frac{m}{n}\right)^m \to \infty,$$

и в этом случае аппроксимации Паде указанных функций приближают их значительно хуже, чем многочлены Тейлора. Последнее замечание относится и к рациональным функциям наилучшего приближения. Очевидно, что в построенных примерах ухудшение аппроксимативных свойств аппроксимаций Паде связано с усилением лакунарности степенного ряда. Поэтому ясно, как с помощью ряда Тейлора экспоненты построить примеры степенных рядов, для сумм которых отмеченное уменьшение выигрыша становится более значительным.

В заключение приведем некоторые примеры степенных рядов из [25], для сумм которых теоремы 4.1–4.4 позволяют исследовать поведение параболических последовательностей элементов таблиц Паде и Чебышёва: 5.2.7 (7–9), 5.2.7 (13), 5.2.7 (14), 5.2.8 (3–5), 5.2.8 (8–19), 5.2.8 (22), 5.2.10 (1), 5.2.10 (3–6).

Список литературы

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
2. *Дзядык В. К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ // Матем. сб. 1979. Т. 108(150). №2. С. 247–267.
3. *Альпер С. Я.* Об асимптотических значениях наилучшего приближения аналитических функций в комплексной области // УМН. 1959. Т. 15. №1(85). С. 131–134.
4. *Гончар А. А.* Об одной теореме Саффа // Матем. сб. 1974. Т. 94. №1. С. 152–157.
5. *Saff E. B.* The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function. II // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 32. P. 187–194.
6. *Saff E. B.* On the degree of best rational approximation to the exponential function // J. Approx. Theory. 1973. V. 9. №2. P. 97–101.
7. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. №4. P. 375–379.
8. *Trefethen L. N.* The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. №4. P. 380–384.
9. *Аптекарев А. И.* Асимптотика определителей Адамара и сходимость строк аппроксимаций Паде для суммы экспонент // Матем. сб. 1980. Т. 113(155). №4(12). С. 520–537.
10. *Старовойтов А. П., Старовойтова Н. А.* Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышёва для суммы экспонент // Матем. сб. 1996. Т. 187. №2. С. 141–157.
11. *Русак В. Н.* Сравнение строк рациональной таблицы Чебышёва–Гончара для индивидуальных функций // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30. №11. С. 969–971.
12. *Русак В. Н.* Исследование строк рациональной таблицы Чебышёва для индивидуальных аналитических функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1988. №6. С. 26–30.
13. *Levin A. L., Lubinsky D. S.* Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients // Constr. Approx. 1990. V. 6. №3. P. 257–286.
14. *Березкина Л. Л., Русак В. Н.* О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций // Весці АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук. 1990. №4. С. 27–32.
15. *Lorentz G., v. Golitschek M., Makavoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

16. *Levin A. L., Lubinsky D. S.* Best rational approximations of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 293. № 2. P. 533–545.
17. *Русак В. Н., Старовойтов А. П.* О свойствах таблиц Паде и Чебышёва целых функций с правильным убыванием коэффициентов Тейлора // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 3. С. 24–27.
18. *Русак В. Н., Старовойтов А. П.* Рациональная аппроксимация целых функций с правильным убыванием коэффициентов Тейлора // Conference "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics": Abstracts. Kyiv: Kyiv National Taras Shevchenko University, 2001. С. 69–70.
19. *Русак В. Н., Старовойтов А. П.* Асимптотика определителей Адамара целых функций с правильным убыванием коэффициентов Тейлора // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2002. С. 173–174.
20. *Русак В. Н., Та Хонг Куанг.* Асимптотика параболических звеньев рациональной таблицы Чебышёва для аналитических функций // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 10. С. 868–871.
21. *Вейль Г.* Классические группы. М.: ИЛ, 1947.
22. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.
23. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
24. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978.
25. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Белорусский государственный университет
E-mail: rusak@phys.bsu.unibel.by
Svoitov@gsu.unibel.by

Поступила в редакцию
28.09.2001 и 27.05.2002