УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов

Аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций

В работе изучаются свойства диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^{k}$ с произвольными различными комплексными параметрами $\{\lambda_k\}_{j=0}^{k}$: установлена асимптотика остаточной функции, описана область локализации нулей; при действительных значениях параметров найдены асимптотики и описаны экстремальные свойства. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя.

Библиография: 43 названия.

Ключевые слова: система экспонент, многочлены Паде, многочлены Эрмита–Паде, асимптотические равенства, метод Лапласа, метод перевала.

DOI: 10.4213/sm8470

§ 1. Введение

В последние годы наблюдается повышенный интерес к аппроксимациям Эрмита–Паде экспоненциальных функций и их обобщениям, в частности, в задачах приближения аналитических функций [1]–[3] и аналитического продолжения [4], [5], в приложениях к случайным матрицам [6]–[8], теории операторов [9], [10], диофантовым приближениям, в том числе для измерения иррациональности [11], [12], в доказательствах трансцендентности [12], [13], в исследованиях алгебраической природы математических констант [14] (подробнее см. обзоры [4], [5], [12], [15]–[17]).

Саму конструкцию этих аппроксимаций предложил Ш. Эрмит в связи с исследованием арифметических свойств числа e. С тех пор аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций привлекали и привлекают внимание как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и известных современных математиков.

Далее будем придерживаться терминологии, принятой в работах [5], [18], [19]. *Диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода для системы экспонент* $\{e^{jz}\}_{j=1}^{k}$ назовем набор из рациональных функций

$$\pi^j_{n,n}(z;e^{j\xi})=\frac{P^j_n(z)}{Q_n(z)}\,,\qquad j=1,2,\dots,k,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2011–2015 годы.

где многочлены $P_n^1, P_n^2, \dots, P_n^k$, Q_n (их будем называть *диагональными многочленами Эрмита–Паде 2-го рода для системы экспонент* $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$) имеют степени не выше kn и определяются из условий

$$Q_n(z)e^{jz} - P_n^j(z) = O(z^{kn+n+1}), \qquad z \to 0. \tag{1.1}$$

Впервые рациональные дроби $\{\pi_{n,n}^j(z; e^{j\xi})\}_{j=1}^k$ появились в известной работе Ш. Эрмита [20], посвященной доказательству трансцендентности числа e. Ф. Линдеман (см. [21]) определил аналоги дробей Эрмита для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=1}^k$, где λ_p – различные алгебраические числа, и применил их, в частности, для доказательства трансцендентности числа π. А. И. Аптекаревым (см. [22]) была установлена равномерная сходимость рациональных функций $\pi_{n,n}^j(z; e^{\lambda_j \xi})$ к $e^{\lambda_j z}$ на компактах в $\mathbb{C}$ для систем экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ с произвольными различными и отличными от нуля комплексными множителями λ_j в показателях экспонент. При $k = 1$ этот результат хорошо известен и принадлежит А. Паде (см. [23]). В работах [24]–[26] описаны асимптотики поведения разностей $e^{\lambda_j z} - \pi_{n,n}^j(z; e^{\lambda_j \xi})$ в том случае, когда λ_j – произвольные различные и отличные от нуля действительные либо чисто мнимые числа (см. также работу [27]).

Немного позже Ш. Эрмит [28] ввел в рассмотрение многочлены $A_0, A_1, \dots, A_k$ (их будем называть *диагональными многочленами Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент* $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$) степени не выше $n-1$, одновременно тождественно не равные нулю, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \qquad z \to 0. \tag{1.2}$$

Опираясь на описанные в [28] свойства многочленов Эрмита–Паде 1-го рода, К. Малер [29] нашел еще одно доказательство трансцендентности числа e.

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1.1), (1.2), принадлежит А. Паде (см. [23]), а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае, когда $k \geqslant 2$, начало интенсивного и систематического изучения свойств многочленов и апроксимаций Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода (определение апроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода см., например, в [19]) для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [13], [29], [30] (об участии других авторов в создании формальной теории см. [15], [16], [31]). Оба типа аппроксимаций, явно различные в многомерном случае, как мы уже отмечали, имеют множество приложений в различных областях анализа.

При $k = 1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде экспоненты. В этом случае теорема Паде утверждает, что для многочленов Паде

$$A_0(z) = -P_{n-1}^1(z), \qquad A_1(z) = Q_{n-1}(z),$$

нормированных так, что $A_1(0) = 1$, при $n \to \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т.е. на любом компакте в $\mathbb{C}$, справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad A_1(z) = e^{z/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

С помощью явных формул П. Борвейн (см. [32]) нашел асимптотику диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ при $k = 2$. Этот результат обобщен Ф. Вилонским в [33] на случай произвольного k. В [34] доказан аналог теоремы Борвейна для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{2}$ с произвольными различными действительными $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

В настоящей статье изучаются некоторые свойства диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными комплексными параметрами $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$. В частности, для многочленов $\{A_n^p\}_{p=0}^{k}$, $\deg A_n^p \leqslant n-1$, удовлетворяющих условиям

$$R_n(z) = \sum_{p=0}^{k} A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \qquad z \to 0, \tag{1.3}$$

найдена асимптотика остаточной функции R_n, а в случае действительных параметров $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ найдены асимптотики A_n^p. Установлено, что при действительных множителях λ_p в показателях экспонент нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A_{n+1}^p\}_{p=0}^{k}$ являются решением следующей экстремальной задачи:

при заданном n найти многочлены a_n^p, $p = 0, 1, \ldots, k$, степени не выше n, со старшим коэффициентом многочлена a_n^k, равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве

$$E_n = E_n(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \rho) = \min_{\{a_n^p(z)\}_{p=0}^{k}} \left\| \sum_{p=0}^{k} a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_\rho, \tag{1.4}$$

где $\|h\|_\rho = \max\{|h(z)| : z \in D_\rho\}$, $D_\rho = \{z : |z| \leqslant \rho\} \subset \mathbb{C}$.

Считаем, что конечной целью задачи является нахождение асимптотики убывания последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$.

При $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, для $k = 2$ и $\rho = 1$ данная задача была поставлена и решена П. Борвейном (см. [32]). Ф. Вилонский в [33] исследовал случай, когда $k \geqslant 2$ и $\rho < \pi/k$. Еще раньше при $k = 1$ решение задачи для круга и отрезка получено Л. Трефезеном (см. [35]) и Д. Браессом (см. [36]).

Сформулируем один из основных результатов.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ – произвольные действительные числа, а $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$. Тогда при $n \to \infty$*

$$E_n \sim \frac{n!\,\lambda^{n+1}}{(kn+n+k)!} \rho^{kn+n+k},$$

где

$$\lambda = \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p).$$

Все основные утверждения статьи, в том числе и теорема 1, получены в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений остаточной функции R_n и многочленов A_n^p. Асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода экспоненциальных функций изучались (с помощью метода Лапласа) в [24]–[26]. В данном случае метод Лапласа применяется в сочетании с методом перевала. Технология их применения является результатом дальнейшего совершенствования метода Ф. Вилонского, изложенного им в основополагающей работе [33] (см. также [24]–[26]).

§ 2. Предварительные результаты

В этом и в следующем параграфах λ_p – произвольные различные комплексные числа, занумерованные так, что $|\lambda_0| \leqslant |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|$.

Многочлены $A_n^0, A_n^1, \dots, A_n^k$, удовлетворяющие равенствам (1.3), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Более того, такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j, $j = 0, 1, 2, \dots, k$ принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}\,, \qquad 0 \leqslant p \leqslant k, \tag{2.1}$$

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}\,, \tag{2.2}$$

где $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1) \cdots (\xi - \lambda_k)$, удовлетворяют (1.3) и всем другим условиям.

Далее будем рассматривать нормированную функцию $\widetilde{R}_{n-1}$, полученную делением R_n на старший коэффициент многочлена A_n^k. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем $n-1$ раз равенство (2.1) при $p = k$. В результате получим, что значение старшего коэффициента A_n^k совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i(n-1)!} \int_{C_k} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_k)(\xi - \lambda_0)^n (\xi - \lambda_1)^n \cdots (\xi - \lambda_{k-1})^n},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$\frac{1}{(n-1)! \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^n} = \frac{\lambda^{-n}}{(n-1)!}\,.$$

Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые в дальнейшем утверждения (см. [37; гл. VII, § 43, § 45]).

Утверждение 1 (метод Лапласа). *Пусть $f(x)$, $S(x)$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплекснозначной. Полагаем*

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)}\, dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ *в точке* $x_0 \in (a,b)$ *имеет абсолютный максимум на отрезке* $[a,b]$, *т.е.* $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $S''(x_0) \neq 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $n \to +\infty$ *и* $f(x_0) \neq 0$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}}\, e^{nS(x_0)}\left(f(x_0) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Утверждение 2 (метод перевала). *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой области* G, *содержащей кусочно гладкую кривую* γ *и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi) e^{nS(\xi)}\, d\xi.$$

Предположим, что $\max\{\operatorname{Re} S(\xi) : \xi \in \gamma\}$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура* γ *и простой точкой перевала, т.е.* $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$. *Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора* (*см.* [37; гл. VII, § 45]), *в которых* $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. *Тогда при* $n \to \infty$ *и* $f(z_0) \neq 0$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}\, e^{nS(z_0)}\left(f(z_0) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2.3}$$

Выбор ветви корня в (2.3) *определяется из условий*

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 *– угол между касательной к кривой* l *в точке* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* l *– линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0, *т.е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия*: $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ *при* $z \in l$; $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $z \neq z_0$.

Напомним, что две бесконечно большие или две бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ называют эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$) при $n \to \infty$, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/\beta_n = 1$.

§ 3. Асимптотика остаточной функции R_n

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ *– произвольные различные комплексные числа. Тогда при* $n \to \infty$ *равномерно по* z *на компактах в* $\mathbb{C}$

$$R_n(z) \sim \frac{\exp\{\frac{\lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_k}{k+1} z\}}{(kn+n-1)!} z^{kn+n-1}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_0 = 0$. Общий случай сводится к рассматриваемому. Для этого достаточно равенство (1.3) умножить на $e^{-\lambda_0 z}$.

Так как $R_n(0) = 0$, то при $z = 0$ соотношение (3.1) справедливо. Возьмем произвольное фиксированное $z \neq 0$. В равенстве (2.2) сделаем замену $z = nw$. Тогда

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w}\varphi(\xi)]^n} \,. \tag{3.2}$$

Будем искать критические точки функции $\psi(\xi) = e^{-\xi\, w}\varphi(\xi)$, т.е. нули $\psi'(\xi)$. Они являются корнями уравнения

$$w\varphi(\xi) = \varphi'(\xi),$$

которое можно записать в виде

$$w = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - \lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\xi - \lambda_k} \,. \tag{3.3}$$

Контур C_∞ охватывает все точки λ_p. Будем искать критическую точку, лежащую на контуре C_∞, достаточно далеко удаленную от нуля. Точнее, будем считать, что расстояние критической точки от нуля больше $2|\lambda_k|$. В таком случае, сделав замену $\zeta = 1/\xi$, представим правую часть равенства (3.3) в виде степенного ряда

$$w = (k+1)\zeta + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\zeta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_k^2)\zeta^3 + \cdots \,. \tag{3.4}$$

Обращая ряд (3.4) с использованием формул Бурмана–Лагранжа (см. [37; гл. V, § 31]) и возвращаясь к прежней переменной ξ, получим зависимость поведения критической точки ξ_0 от значений w, которые с учетом замены $z = nw$ находятся в достаточно малой окрестности нуля:

$$\xi_0 = \frac{k+1}{w} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k}{k+1} + O(w). \tag{3.5}$$

Определим теперь контур C_∞ так, чтобы он проходил через ξ_0, охватывал все точки $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, а модуль функции $\psi(\xi)$ достигал на C_∞ своего наименьшего значения в единственной точке ξ_0. С этой целью рассмотрим линии уровня функций $\varphi(\xi)$ и $e^{-w\xi}$, проходящие через точку ξ_0:

$$L = \big\{\xi \in \mathbb{C} : |\varphi(\xi)| = |\varphi(\xi_0)|\big\}, \qquad L_1 = \big\{\xi \in \mathbb{C} : |e^{-w\xi}| = |e^{-w\xi_0}|\big\}.$$

L является лемнискатой, а L_1 – прямой, проходящей через ξ_0 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол равный $\arg(i/w)$. Уравнение лемнискаты L запишем в виде

$$\left|\varphi(\xi_0) + \frac{\varphi'(\xi_0)}{1!}(\xi - \xi_0) + \cdots + \frac{\varphi^{(k+1)}(\xi_0)}{(k+1)!}(\xi - \xi_0)^{(k+1)}\right| = |\varphi(\xi_0)|.$$

Опираясь на это соотношение и равенство $\varphi'(\xi_0) = w\varphi(\xi_0)$, легко показать, что угловой коэффициент касательной к L в точке ξ_0 равен $\mathrm{tg}(\arg(i/w))$. Таким образом, L_1 является касательной к L в точке ξ_0.

При достаточно малых $|w|$ лемниската L является (см. [38; гл. III, § 3.3]) жордановой аналитической кривой и охватывает все нули $\varphi(\xi)$, а прямая L_1

разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (полуплоскость Ω) содержит L. В полуплоскости Ω модуль $e^{-w\xi}$ больше модуля $e^{-w\xi_0}$. Лемниската L разбивает плоскость на две связные области – внутреннюю и внешнюю. Если ξ принадлежит внешней области, то $|\varphi(\xi)| > |\varphi(\xi_0)|$.

Учитывая возможность деформирования контура интегрирования в интеграле (3.2), построим теперь необходимый контур C_∞. Для этого возьмем отрезок с центром в точке ξ_0, принадлежащий L_1, и соединим его концы гладкой жордановой кривой, которая лежит в полуплоскости Ω и охватывает L. Построенный контур C_∞ соответствует всем необходимым требованиям.

Заметим, что число корней уравнения $\varphi'(\xi) = 0$ равно k и все они лежат в выпуклом многоугольнике, содержащем все нули $\varphi(\xi)$, т.е. если η является нулем $\varphi'(\xi)$, то [39; часть III, гл. 1, § 3, задача 31]

$$\eta = m_0\lambda_0 + m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k,$$

где $m_p \geqslant 0$, $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = 1$. Отсюда следует, что $|\eta| \leqslant |\lambda_k|$. Если $w \to 0$, то $\xi_0 \to \infty$, а остальные k корней уравнения $w\varphi(\xi) = \varphi'(\xi)$ находятся в достаточной близости от корней уравнения $\varphi'(\xi) = 0$ и, следовательно, лежат в круге с центром в нуле и радиуса $2|\lambda_k|$. Поэтому на контуре C_∞ лежит единственная критическая точка ξ_0 функции $\psi(\xi)$.

В силу принципа аргумента при обходе точкой ξ контура C_∞ в положительном направлении приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно $2(k+1)\pi$. Поэтому C_∞ можно разбить на два контура C_∞^j, $j = 0, 1$, так, что на контуре C_∞^1 приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно $(2k+1)\pi$. Без ограничения общности можно считать, что ξ_0 лежит внутри контура C_∞^0 и $-\pi/2 \leqslant \arg\varphi(\xi) \leqslant \pi/2$, если $\xi \in C_\infty^0$. В противном случае правую часть равенства (3.2) следует умножить и разделить на $e^{in\alpha}$, где действительное число α выбирается так, чтобы $-\pi/2 \leqslant \arg(e^{i\alpha}\varphi(\xi)) \leqslant \pi/2$, и далее вместо $\varphi(\xi)$ рассматривать функцию $e^{i\alpha}\varphi(\xi)$. Здесь и далее i – мнимая единица.

Определим функцию $S(\xi)$, полагая

$$S(\xi) = w\xi - \ln\varphi(\xi), \qquad \xi \in C_\infty^0,$$

где $\ln\varphi(\xi) = \ln|\varphi(\xi)| + i\arg_0\varphi(\xi)$ – однозначная ветвь логарифма, для которой $\arg_0\varphi(\xi) \in [-\pi/2, \pi/2]$. $S(\xi)$ является сужением на $C_\infty^0 \subset G$ однозначной аналитической функции $S(\xi)$, определенной в односвязной области G, не содержащей нулей $\varphi(\xi)$. В этой области справедливы равенства

$$S'(\xi) = w - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = w - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - \lambda_1} - \cdots - \frac{1}{\xi - \lambda_k},$$
$$S''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(\xi - \lambda_k)^2},$$

из которых следует, что $S'(\xi_0) = 0$, $S''(\xi_0) \neq 0$.

Для всех $\xi \in C_\infty$

$$\frac{1}{|\psi(\xi)|^n} = \exp\bigl\{n(\operatorname{Re}(w\xi) - \ln|\varphi(\xi)|)\bigr\},$$

а функция $\operatorname{Re}(w\xi) - \ln|\varphi(\xi)|$ достигает на C_∞ своего наибольшего значения в единственной точке ξ_0. Введем в рассмотрение интегралы

$$F_j(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^j_\infty} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w}\varphi(\xi)]^n}, \qquad j = 0, 1.$$

Рассуждая как и при доказательстве неравенств (8) в [37; гл. VII, § 45], нетрудно показать, что

$$|F_1(n)| \leqslant c|e^{n(S(\xi_0)-\delta)}|, \tag{3.6}$$

где $c, \delta > 0$ – постоянные. Интеграл $F_0(n)$ представляется в виде

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^0_\infty} e^{nS(\xi)}\,d\xi.$$

Так как $\max\{\operatorname{Re} S(\xi) : \xi \in C^0_\infty\}$ достигается в единственной точке ξ_0, которая является внутренней точкой контура C^0_∞ и простой точкой перевала, то для нахождения асимптотики этого интеграла применим метод перевала (утверждение 2). В результате получим

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}}\, e^{nS(\xi_0)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Из неравенств (3.6) следует, что при $n \to \infty$ интеграл $F_1(n)$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(\xi_0)}$. Значит основной вклад в асимптотику $R_n(nw)$ вносит интеграл $F_0(n)$. Поэтому

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}}\, e^{nS(\xi_0)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3.7}$$

Точка ξ_0 достаточно далеко удалена от нуля. Поэтому

$$\begin{aligned} S(\xi_0) &= w\xi_0 - (k+1)\ln\xi_0 - \ln\left(1 - \frac{\lambda_1}{\xi_0}\right) - \dots - \ln\left(1 - \frac{\lambda_k}{\xi_0}\right) \\ &= w\xi_0 + (k+1)\ln\frac{1}{\xi_0} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{\xi_0} + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.5) следует, что

$$S(\xi_0) = k + 1 + (k+1)\ln\frac{w}{k+1} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1}w + O(w^2).$$

Тогда

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{(k+1)n}\left(\frac{w}{k+1}\right)^{(k+1)n}\exp\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1}nw\right\}(1 + O(nw^2)).$$

Если перейти здесь от переменной w к z, то при $n \to \infty$ получим

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{(k+1)n}\left(\frac{z}{(k+1)n}\right)^{(k+1)n}\exp\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{k+1}z\right\}\left(1 + O\left(\frac{z^2}{n}\right)\right). \tag{3.8}$$

Из полученного ранее равенства для $S''(\xi)$ следует, что

$$S''(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2}\left(k+1+2\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{\xi_0}+O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right)\right).$$

Отсюда и из (3.5) вытекает

$$S''(\xi_0) = \frac{w^2}{k+1}(1+O(w)),$$

поэтому

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{\frac{-(k+1)}{w^2}}\,(1+O(w)).$$

Учитывая, что для контура C_∞^0 угол $\varphi_0 = \arg(i/w)$, переходя к переменной z, окончательно получаем

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{k+1}\,\frac{i}{w}(1+O(w)) = i\sqrt{k+1}\,\frac{n}{z}\left(1+O\left(\frac{z}{n}\right)\right). \tag{3.9}$$

Из (3.7)–(3.9) следует, что

$$R_n(z) = \sqrt{\frac{(k+1)n}{2\pi}}\left(\frac{e}{(k+1)n}\right)^{(k+1)n} \times \exp\left\{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{k+1}z\right\}z^{kn+n-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Отсюда, с учетом формулы Стирлинга, вытекает справедливость асимптотического равенства (3.1) для любого фиксированного комплексного числа z.

Равномерность асимптотики в (3.1) следует из теоремы Витали и того, что последовательность функций

$$(kn+n-1)!\,\exp\left\{-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{k+1}z\right\}\frac{R_n(z)}{z^{kn+n-1}}\,, \qquad n = n_0, n_0+1, \ldots,$$

по модулю равномерно ограничена на компактах в $\mathbb{C}$. Действительно,

$$|R_n(nw)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \exp\bigl\{n(\operatorname{Re}(w\zeta(t)) - \ln|\varphi(\zeta(t))|)\bigr\}|\zeta'(t)|\,dt,$$

где контур интегрирования C_∞ прежний и параметризуется вещественным параметром $t \in [\alpha,\beta]$. Если обозначить через $[\alpha_1,\beta_1]$ отрезок, соответствующий параметризации контура C_∞^0, то при достаточно больших n

$$|R_n(nw)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \exp\bigl\{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))\bigr\}|\zeta'(t)|\,dt. \tag{3.10}$$

Для нахождения асимптотики интеграла в (3.10) применим метод Лапласа (утверждение 1). В результате получим, что

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}|\zeta'(t)|\,dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re}S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}}\,e^{n\operatorname{Re}S(\xi_0)}|\zeta'(t_0)|\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.11}$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0) = \xi_0$. В достаточно малой окрестности точки $\xi_0 = x_0 + iy_0$ кривая C^0_∞ задается параметрическим уравнением

$$\zeta(t) = x(t) + iy(t), \qquad t \in [-\tau, \tau], \quad \tau > 0,$$

где

$$\begin{aligned} x(t) &= \beta t + x_0, & y(t) &= \alpha t + y_0, & w &= \alpha + i\beta, \\ t_0 &= 0, & \zeta(0) &= \xi_0, & |\zeta'(t_0)| &= |w|. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $\operatorname{Re} S(\zeta(t))$ в точке t_0 имеет локальный максимум, с помощью элементарных вычислений получим, что

$$-[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=0} = \sum_{p=0}^{k} \frac{|w|^2}{|\xi_0 - \lambda_p|^2} - 2\sum_{p=0}^{k} \left[\frac{\operatorname{Im}(w(\xi_0 - \lambda_p))}{|\xi_0 - \lambda_p|^2}\right]^2.$$

Опираясь на это соотношение, используя (3.5) и легко проверяемое равенство

$$2[\operatorname{Im}\{w(\xi_0 - \lambda_p)\}]^2 = |w|^2\,|\xi_0 - \lambda_p|^2 - \operatorname{Re}\{w^2(\xi_0 - \lambda_p)^2\},$$

нетрудно показать, что при достаточно больших n

$$-[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=0} = \frac{|w|^4}{k+1}(1 + O(w)).$$

Переходя здесь к переменной z и учитывая (3.8)–(3.11), при достаточно больших n получаем необходимое неравенство

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{2\,|z|^{kn+n-1}}{(kn+n-1)!}\left|\exp\left\{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k}{k+1}\, z\right\}\right|.$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Вслед за Л. Трефезеном [35] и Д. Браессом [36] рассмотрим сдвиг многочленов Эрмита–Паде 1-го рода и n-го порядка. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ – произвольные действительные числа,

$$\begin{aligned} \widetilde{a}^p_n(z) &= n!\,\lambda^{n+1} A^p_{n+1}(z - z_n), & 0 \leqslant p \leqslant k\,, \\ \widetilde{R}_n(z) &= n!\,\lambda^{n+1} R_{n+1}(z - z_n), & E^*_n = \|\widetilde{R}_n\|_\rho, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$z_n = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k}{k+1}\;\frac{\rho^2}{kn+n+k}\,,$$

а множитель $n!\,\lambda^{n+1}$ в приведенных выше формулах нормализует многочлен $\widetilde{a}^k_n$ так, что его старший коэффициент равен 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 1. *При* $n \to \infty$

$$E_n^* \sim \frac{n!\,\lambda^{n+1}}{(kn+n+k)!}\rho^{kn+n+k}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Из теоремы 2 и эквивалентности

$$(z-z_n)^{kn+n+k} \sim z^{kn+n+k}\exp\biggl\{-\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k}{k+1}\,\frac{\rho^2}{z}\biggr\}$$

следует, что при $n \to \infty$ для $|z| = \rho$

$$|R_{n+1}(z-z_n)| \sim \frac{\rho^{kn+n+k}}{(kn+n+k)!}\,.$$

Отсюда и из определения E_n^* (см. (4.1)) следует (4.2). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$, *то для достаточно больших* n $E_n = E_n^*$.

Доказательство. Воспользуемся методом работ [32], [33]. Достаточно показать, что $E_n^* \leqslant E_n$ при больших n. Предположим, что это не так. Тогда $E_n < E_n^*$ и, следовательно, найдутся многочлены a_n^p, $p = 0, 1, \dots, k$, $\deg a_n^p \leqslant n$, a_n^k имеет старший коэффициент, равный 1, такие, что

$$\biggl\|\sum_{p=0}^{k} a_n^p(z)e^{\lambda_p z}\biggr\| < \biggl\|\sum_{p=0}^{k} \widetilde{a}_n^p(z)e^{\lambda_p z}\biggr\|.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n для $|z| = \rho$

$$\biggl|\sum_{p=0}^{k} a_n^p(z)e^{\lambda_p z}\biggr| < \biggl|\sum_{p=0}^{k} \widetilde{a}_n^p(z)e^{\lambda_p z}\biggr|.$$

Тогда по теореме Руше функция

$$\sum_{p=0}^{k}(a_n^p(z) - \widetilde{a}_n^p(z))e^{\lambda_p z} \tag{4.3}$$

имеет в D_ρ по крайней мере $kn+n+k$ нулей. Но это не так. Действительно, рассмотрим многочлены $b_n^p = a_n^p - \widetilde{a}_n^p$, $p = 0, 1, \dots, k$. Пусть h – сумма степеней всех этих многочленов. Известно (см. [39; часть III, гл. 4, § 4, задача 206.2]), что функция

$$\sum_{p=0}^{k} b_n^p(z)e^{\lambda_p z}$$

в круге D_ρ может иметь не больше $h + k + (\lambda_k - \lambda_0)\rho/\pi$ нулей. В нашем случае $h \leqslant (k+1)n - 1$ и $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$. Поэтому функция (4.3) может иметь в D_ρ не больше, чем $kn + n + k - 1$ нулей. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

§ 5. Асимптотика многочленов A_n^p

В этом параграфе $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – различные действительные числа. Без ограничения общности далее считаем, что $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$. Общий случай сводится к рассматриваемому.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^k$ – нули многочлена φ'. Ясно, что x_j – действительные числа и $x_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$. Считаем, что G – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^k \subset G \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^k$. Тогда (см. [37; гл. IV, § 24, пример 6] функция

$$S(\xi) = -\ln \varphi(\xi),$$

где

$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)|, \quad \text{если} \quad \varphi(x_1) > 0,$$
$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)| - i\pi, \quad \text{если} \quad \varphi(x_1) < 0,$$

является однозначной аналитической функцией в G. Значения функции S вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -\ln|\varphi(\xi)| - i[\operatorname{Im} S(x_1) + \Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Если $\xi \in G$, то справедливы равенства

$$S'(\xi) = -\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - \lambda_1} - \dots - \frac{1}{\xi - \lambda_k},$$
$$S''(\xi) = -\frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi) - [\varphi'(\xi)]^2}{\varphi^2(\xi)} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{1}{(\xi - \lambda_k)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_j) = 0$, $S''(x_j) = -\varphi''(x_j)/\varphi(x_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_j)}}\, e^{nS(x_j)}, \qquad j = 1, 2, \dots, k.$$

Теорема 3. *Для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ и $n \to \infty$*

$$A_n^0(z) = B_n(x_1)e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.1}$$

$$A_n^p(z) = B_n(x_{p+1})e^{(x_{p+1}-\lambda_p)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - B_n(x_p)e^{(x_p-\lambda_p)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad 1 \leqslant p \leqslant k-1, \tag{5.2}$$

$$A_n^k(z) = -B_n(x_k)e^{(x_k-\lambda_k)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.3}$$

Доказательство. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{e^{\xi z}\,d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}\,, \tag{5.4}$$

докажем равенство (5.1). Для этого в интеграле (5.4) деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R, принадлежащий полуплоскости

$$\{z : -\infty < \operatorname{Re} z < \lambda_1\},$$

с вершинами в точках $A(-a', -r)$, $B(-a', r)$, $C(a, r)$, $D(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a \in (0, \lambda_1)$, $a' > 0$. Так как

$$|\varphi(a+it)| = \prod_{j=0}^{k}\sqrt{(a-\lambda_j)^2+t^2} > |\varphi(a)|, \qquad t \in [-r,\, r] \setminus \{0\},$$

то на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке a. Аналогично, на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке $-a'$. На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значения $|\varphi(\xi)|$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках $-a'$ и a. Действительно, если $r > 2\max\{a', \lambda_k\}$, то при $t \in [-a, a]$

$$|\varphi(t \pm ir)| = \prod_{j=0}^{k}\sqrt{(t-\lambda_j)^2+r^2} > \max\{|\varphi(a)|, |\varphi(-a')|\}.$$

Определимся теперь с выбором a' и a. Положим $a = x_1$, а a' возьмем таким, чтобы $|\varphi(-a')| > |\varphi(a)|$. Такой выбор возможен, так как $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $t \in \mathbb{R}$ и $t \to -\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L, N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L,N]}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[L,N]} \frac{e^{\xi z}\,d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}\,.$$

Область G можно выбрать так, чтобы $[D, C] \subset G$. Поэтому

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[D,C]} e^{\xi z} e^{nS(\xi)}\,d\xi.$$

В силу выбора точки a максимум функции $\operatorname{Re} S(\xi)$ на отрезке $[D, C]$ достигается в единственной точке x_1, которая является простой точкой перевала. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла $F_n^{[D,C]}$ можно применить метод перевала (утверждение 2). В результате получим

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}\, e^{nS(x_1)} e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.5}$$

Выбираем ветвь корня в (5.5) с учетом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n \to \infty$

$$F_n^{[D,C]}(z) = B_n(x_1)e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.6}$$

К интегралу $F_n^{[B,A]}$ применимы аналогичные рассуждения. Учитывая при этом выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|F_n^{[B,A]}(z)| \leqslant \theta |e^{n(S(x_1)-\delta)}|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \to \infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(x_1)}$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}$, $F_n^{[A,D]}$. Значит, основной вклад в асимптотику A_n^0 вносит интеграл по отрезку $[D, C]$. Поэтому из (5.6) следует справедливость равенства (5.1).

Равенство (5.3) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учетом того, что угол $\varphi_0 = -\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенств (3.2). Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Представив многочлен A_n^p, $1 \leqslant p \leqslant k-1$, в виде (2.1), деформируем контур интегрирования C_p в прямоугольник R^*, принадлежащий области $\{z : \lambda_{p-1} < \operatorname{Re} z < \lambda_{p+1}\}$, с вершинами в точках $A^*(a', -r)$, $B^*(a', r)$, $C^*(a, r)$, $D^*(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a' \in (\lambda_{p-1}, \lambda_p)$, $a \in (\lambda_p, \lambda_{p+1})$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки D^* и C^*, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке a, а на отрезке $[B^*, A^*]$ он достигается в единственной точке a'. При достаточно большом r ($r > 2\lambda_k$) значения $|\varphi(\xi)|$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $[B^*, C^*]$ и $[A^*, D^*]$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках a', a. Если положить $a' = x_p$, $a = x_{p+1}$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику A_n^p будут вносить интегралы по отрезкам $[B^*, A^*]$ и $[D^*, C^*]$. Применив к ним предыдущие рассуждения, получим, что при $n \to \infty$

$$F_n^{[D^*,C^*]}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_{p+1})}}\, e^{nS(x_{p+1})}e^{x_{p+1}z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.7}$$

$$F_n^{[B^*,A^*]}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}}\, e^{nS(x_p)}e^{x_p z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.8}$$

При выборе ветви корня в (5.7) учитываем, что $\varphi_0 = \pi/2$, а при выборе ветви корня в (5.8) замечаем, что $\varphi_0 = -\pi/2$. С учетом этого из (5.7) и (5.8) следует равенство (5.2). Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *При* $n \to \infty$

$$A_n^0(0) = B_n(x_1)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$A_n^p(0) = B_n(x_{p+1})\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - B_n(x_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad 1 \leqslant p \leqslant k-1, \tag{5.9}$$
$$A_n^k(0) = -B_n(x_k)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Из (5.9) следует, что при достаточно больших n имеем $A_n^0(0) \neq 0$ и $A_n^k(0) \neq 0$. При таких n определим две последовательности нормированных многочленов

$$\widetilde{A}_n^0(z) = \frac{A_n^0(z)}{A_n^0(0)}, \qquad \widetilde{A}_n^k(z) = \frac{A_n^k(z)}{A_n^k(0)}.$$

Чтобы определить аналогичные последовательности при $1 \leqslant p \leqslant k-1$, рассмотрим три возможных ситуации, каждая из которых реализуется для конкретных систем экспонент.

A) $|\varphi(x_p)| \neq |\varphi(x_{p+1})|$. Обозначим через $\widetilde{x}_p$ ту из точек x_p, x_{p+1}, для которой

$$\min\bigl\{|\varphi(x_p)|, |\varphi(x_{p+1})|\bigr\} = |\varphi(\widetilde{x}_p)|.$$

В этом случае при достаточно больших n имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\widetilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0)$.

B) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) \neq S''(x_p)$. При больших n имеем $A_n^p(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность $\widetilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0)$.

C) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) = S''(x_p)$. Поскольку $(-1)^{k+p+1}\varphi(x_p) > 0$, то

$$e^{nS(x_p)} = (-1)^{n(k+p+1)} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|},$$
$$e^{nS(x_{p+1})} = (-1)^{n(k+p+1)+n} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}.$$

Поэтому

$$A_n^p(0) = (-1)^{n(k+p+1)}\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}}\, e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}\bigl((-1)^n - 1\bigr)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда при достаточно больших n имеем $A_{2n+1}^p(0) \neq 0$ и, следовательно, определена последовательность многочленов $\widetilde{A}_{2n+1}^p(z) = A_{2n+1}^p(z)/A_{2n+1}^p(0)$.

Производную многочлена A_n^p можно представить в виде

$$\frac{dA_n^p}{dz}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int_{C_p}(\xi - \lambda_p)\frac{e^{\xi z}\,d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}. \tag{5.10}$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики A_n^p, применив к интегралу в правой части равенства (5.10) при $z = 0$ метод перевала, получим

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0) = B_n(x_{p+1})(x_{p+1} - \lambda_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - B_n(x_p)\,(x_p - \lambda_p)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда при сделанных предположениях

$$\frac{dA^p_{2n}}{dz}(0) = (-1)^{n(k+p+1)}\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}}\,e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}(x_{p+1}-x_p)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и определена последовательность многочленов $\widetilde{A}^p_{2n}(z) = A^p_{2n}(z)/(A^p_{2n})'(0)$.

Теорема 4. *При $n\to\infty$ локально равномерно по z*

$$\widetilde{A}^0_n(z) \rightrightarrows e^{x_1 z}, \qquad \widetilde{A}^k_n(z) \rightrightarrows e^{(x_k-\lambda_k)z}. \tag{5.11}$$

Если $1\leqslant p\leqslant k-1$, то локально равномерно по z при $n\to\infty$:
в случае A) *имеем*

$$\widetilde{A}^p_n(z) \rightrightarrows e^{(\widetilde{x}_p-\lambda_p)z}; \tag{5.12}$$

в случае B) *имеем*

$$\widetilde{A}^p_{2n}(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{(x_{p+1}-\lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{e^{(x_p-\lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)^{-1}, \tag{5.13}$$

$$\widetilde{A}^p_{2n+1}(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{(x_{p+1}-\lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{e^{(x_p-\lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}}\right)^{-1}; \tag{5.14}$$

в случае C) *имеем*

$$\widetilde{A}^p_{2n}(z) \rightrightarrows \frac{1}{x_{p+1}-x_p}\big(e^{(x_{p+1}-\lambda_p)z} - e^{(x_p-\lambda_p)z}\big), \tag{5.15}$$

$$\widetilde{A}^p_{2n+1}(z) \rightrightarrows \frac{1}{2}\big(e^{(x_{p+1}+\lambda_p)z} + e^{(x_p-\lambda_p)z}\big). \tag{5.16}$$

Доказательство. Поточечная сходимость в (5.11)–(5.16) доказана в теореме 3. Остается доказать, что многочлены $\widetilde{A}^p_n$ при $0\leqslant p\leqslant k$ в каждом из случаев A), B) и C) равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к соответствующим функциям. Докажем это, например, для $\widetilde{A}^0_n$.

Если предположить, что $|z|\leqslant\rho$ и $\xi\in R$, то модуль $e^{\xi z}$ ограничен $M = e^{4\rho\max\{a',\lambda_k\}}$. Опираясь на равенство (5.4), в этом случае получим

$$|A^0_n(z)| \leqslant \frac{M}{\pi}\int_\alpha^\beta e^{-n\ln|\varphi(\zeta(t))|}|\zeta'(t)|\,dt \tag{5.17}$$

при условии, что контур интегрирования R прежний и параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\beta]$. При больших n неравенство (5.17) сохраняется, если вместо R взять отрезок $[D,C]$. Пусть его параметризации соответствует значение параметра $t\in[\alpha_1,\beta_1]$. Для нахождения асимптотики интеграла в (5.17) применим метод Лапласа (утверждение 1). В результате получим, что при $n\to\infty$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n\,\mathrm{Re}\,S(\zeta(t))}|\zeta'(t)|\,dt$$
$$= \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\mathrm{Re}\,S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}}\,e^{n\,\mathrm{Re}\,S(x_1)}|\zeta'(t_0)|\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.18}$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0) = x_1$. Нетрудно показать, что

$$[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=t_0} = -S''(x_1)|\zeta'(t_0)|^2.$$

Отсюда, учитывая (5.9), (5.18), при достаточно больших n получаем неравенство $|\widetilde{A}_n^0(z)| \leqslant 2M$, из которого следует, что последовательность $\{\widetilde{A}_n^0(z)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z : |z| \leqslant \rho\}$. Тогда по теореме Витали эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{x_1 z}$ на любом компакте из круга $\{z : |z| \leqslant \rho\}$. Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 4. Теорема 4 доказана.

§ 6. Иллюстрирующие примеры

6.1. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{2}$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Введем обозначения

$$p = \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}\,, \qquad h = 5\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2.$$

Тогда несложные вычисления приводят к равенствам

$$\begin{aligned} x_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 - p)/3, & x_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + p)/3, \\ \varphi(x_1) &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)h + 2p^3}{27}\,, & \varphi(x_2) &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)h - 2p^3}{27}\,, \\ S''(x_1) &= \ln\frac{54p}{(\lambda_1+\lambda_2)h + 2p^3}\,, & S''(x_2) &= \ln\frac{-54p}{(\lambda_1+\lambda_2)h - 2p^3}\,. \end{aligned}$$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. *При* $n \to \infty$

$$\begin{aligned} A_n^0(z) &= B_n(x_1)e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ A_n^1(z) &= B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_1)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - B_n(x_1)e^{(x_1-\lambda_1)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ A_n^2(z) &= -B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_2)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

В этом примере так же, как и в примерах из работ [32], [33] реализуются только случаи A) и C). Причем случай C) реализуется, когда $h = 0$, т.е. при $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

Если предположить, что $\lambda_2 = 2\lambda_1$, то

$$S(x_1) = \ln\left(\frac{27}{2p^3}\right), \qquad S(x_2) = \ln\left(\frac{27}{2p^3}\right) + i\pi, \qquad S''(x_1) = S''(x_2) = \frac{27}{p^2}\,,$$

$$A_n^1(0) = \sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}}\left(\frac{27}{2p^3}\right)^n [(-1)^n - 1]\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Поэтому при достаточно больших n имеем $A^1_{2n+1}(0) \neq 0$. Далее, с помощью уже известных рассуждений легко показать, что

$$\frac{dA^1_{2n}}{dz}(0) = \sqrt{\frac{p^2}{108\pi n}}\left(\frac{27}{2p^3}\right)^{2n}(x_2 - x_1)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда из теоремы 4 в данном случае получим

Следствие 3.

$$\widetilde{A}^0_n(z) \rightrightarrows e^{x_1 z}, \qquad \widetilde{A}^2_n(z) \rightrightarrows e^{(x_2-\lambda_2)z}.$$

В случае, когда $\lambda_2 \neq 2\lambda_1$,

$$\widetilde{A}^1_n(z) \rightrightarrows e^{(x_2-\lambda_1)z},$$

а если $\lambda_2 = 2\lambda_1$,

$$\widetilde{A}^1_{2n+1}(z) \rightrightarrows \frac{1}{2}\left(e^{(x_2-\lambda_1)z} + e^{(x_1-\lambda_1)z}\right), \qquad \widetilde{A}^1_{2n}(z) \rightrightarrows \frac{1}{x_2 - x_1}\left(e^{(x_2-\lambda_1)z} - e^{(x_1-\lambda_1)z}\right).$$

Для сравнения переформулируем с учетом принятых обозначений аналогичный результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода, полученный в [24] (см. также работы [27] и [40], в которых с помощью метода матричной задачи Римана–Гильберта найдены очень точные асимптотики преобразованных путем масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций и многочленов Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода в случае, когда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$).

Теорема 5. *Пусть* $\pi^j_{n,n}(z; e^{\lambda_j \xi})$, $j = 1, 2$, *– аппроксимации Эрмита–Паде 2-го рода для набора* $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$, *где* λ_1, λ_2 *– различные не равные нулю действительные числа. Тогда при* $n \to \infty$ *локально равномерно по* z

$$e^{\lambda_1 z} - \pi^1_{n,n}(z; e^{\lambda_1 \xi}) = B^*_n(x_1; z)e^{(\lambda_1 - x_1)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi^2_{n,n}(z; e^{\lambda_2 \xi}) = B^*_n(x_1; z)e^{(\lambda_2 - x_1)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + (-1)^n B^*_n(x_2; z)\, e^{(\lambda_2 - x_2)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$B^*_n(x_j; z) = \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{(\lambda_1+\lambda_2)z/3} \sqrt{\frac{2\pi}{nS''(x_j)}}\, e^{-nS(x_j)}, \qquad j = 1, 2.$$

Пусть теперь

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Тогда при $0 < \varepsilon < 1$ из теоремы 3 следует, что

$$A_n^0(z) \sim \sqrt{\frac{2p^3 + (2+\varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 + (2+\varepsilon)h} \right)^n e^{(2+\varepsilon-p)z/3},$$

$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2+\varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2+\varepsilon)h} \right)^n e^{(-1+\varepsilon+p)z/3},$$

$$A_n^2(z) \sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2+\varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2+\varepsilon)h} \right)^n e^{(-1-2\varepsilon+p)z/3}.$$

Сравнение этих соотношений показывает, что главные члены асимптотик значений многочленов $A_n^1(z)$ и $A_n^2(z)$ в точке z отличаются на множитель $e^{\varepsilon z}$, который при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно стремится к единице. При $\varepsilon = 1$ из теоремы 3 получим асимптотические равенства, которые согласуются с соответствующими утверждениями из работ [32] и [33]:

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z},$$

$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1} e^{-z/\sqrt{3}} \right),$$

$$A_n^2(z) \sim (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

Полезно сравнить предыдущие асимптотические равенства с равенствами, вытекающими в этом случае из теоремы 5:

$$e^z - \pi_{n,n}^1(z; e^\xi) \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n e^{z/\sqrt{3}}, \tag{6.1}$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi_{n,n}^2(z; e^{2\xi}) \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}} \right).$$

При $0 < \varepsilon < 1$ из теоремы 5 получим

Следствие 4. *Пусть* $\pi_{n,n}^1(z; e^\xi)$, $\pi_{n,n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi})$ *– аппроксимации Эрмита–Паде 2-го рода для набора* $\{e^z, e^{(1+\varepsilon)z}\}$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$e^z - \pi_{n,n}^1(z; e^\xi) \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2+\varepsilon)h)}{27pn}} \left(\frac{2p^3 + (2+\varepsilon)h}{27} \right)^n e^{(3+p)z/3},$$

$$e^{(1+\varepsilon)z} - \pi_{n,n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi}) \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2+\varepsilon)h)}{27pn}} \left(\frac{2p^3 + (2+\varepsilon)h}{27} \right)^n e^{(3+3\varepsilon+p)z/3}.$$

Следствие 4 позволяет утверждать, что при малых значениях ε асимптотики соответствующих уклонений аппроксимаций Эрмита–Паде 2-го рода отличаются несущественно и с убыванием ε к нулю стремятся к общему значению. При этом зависящий от ε множитель $(2p^3 + (2+\varepsilon)h)/27)^n$, определяющий поведение главного члена асимптотики, стремится к $(2/(3\sqrt{3}\,))^{2n}$. Это несколько неожиданно, если принять во внимание равенство (6.1), так как наблюдается эффект существенного роста (почти в $(2/(3\sqrt{3}\,))^n$ раз) скорости приближения функции e^z аппроксимациями Эрмита–Паде из следствия 4.

6.2. Приведем пример, когда реализуется случай В). Для этого рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1-\varepsilon, \quad \lambda_2 = 2+\varepsilon, \quad \lambda_3 = 3, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

При выбранных значениях параметров

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9-2(1-\varepsilon)(2+\varepsilon)}\,, \qquad x_2 = \frac{3}{2}\,,$$
$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-2(1-\varepsilon)(2+\varepsilon)}\,,$$
$$\varphi(x_1) = \varphi(x_3) = -\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2(2+\varepsilon)^2, \qquad \varphi(x_2) = \frac{9}{4}(0{,}5+\varepsilon)^2.$$

Тогда при $\varepsilon = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \in (0,1)$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,, \qquad x_2 = \frac{3}{2}\,, \qquad x_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,,$$
$$\varphi(x_2) = -\varphi(x_1) = -\varphi(x_3) = \frac{81}{8}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right),$$

в то время как

$$\varphi''(x_2) = -18 + 9\sqrt{2}\,, \qquad \varphi''(x_1) = \varphi''(x_3) = 36 - 18\sqrt{2}\,.$$

Поэтому

$$S''(x_1) = S''(x_3) = \frac{16}{9}(2-\sqrt{2}\,), \qquad S''(x_2) = \frac{32}{9}\,.$$

Следовательно, случай В) реализуется при $p=1$ и $p=2$. Из теоремы 4, например при $p=1$, получаем

$$\widetilde{A}^1_{2n}(z) \rightrightarrows \frac{e^{3(\sqrt{2}-1)\,z/2}}{1-\sqrt{1-\sqrt{2}/2}}\left[e^{-3\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z/2} - \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\right],$$

$$\widetilde{A}^1_{2n+1}(z) \rightrightarrows \frac{e^{3(\sqrt{2}-1)\,z/2}}{1+\sqrt{1-\sqrt{2}/2}}\left[e^{-3\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z/2} + \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\right].$$

§ 7. Локализация нулей многочленов A_n^p

Поведение нулей многочленов Тейлора степенных рядов, связанных с экспоненциальными функциями, изучалось Г. Сегё в [41]. Э. Сафф и Р. Варга в [42] исследовали область локализации нулей аппроксимаций Паде экспоненты и, в частности, нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде. Г. Шталь в [18] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной диагональных многочленов Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода для системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости (см. также работы [27] и [40]). Ф. Вилонский в [33] доказал аналог теоремы Саффа и Варги для многочленов Эрмита–Паде A_p, удовлетворяющих равенствам (1.2).

Следующая теорема дополняет и обобщает результаты Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, Ф. Вилонского.

Теорема 6. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n \geqslant 2$, $k \geqslant 1$ нули A_n^p, т.е. нули многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, лежат в круге $\{z : |z| < R_n^p\}$, где*

$$R_n^p = 2\left(n - \frac{1}{3}\right) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{k} \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_j|}\,.$$

Доказательство теоремы 6 проводится с помощью метода, описанного в работе [33]. Подробности здесь опускаем.

В заключение заметим, что результаты данной статьи частично анонсированы в [43].

Список литературы

[1] J. P. Boyd, "Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev–Hermite–Padé method", *J. Comput. Appl. Math.*, **223**:2 (2009), 693–702.

[2] B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky, "How well does the Hermite–Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon?", *Math. Comp.*, **80**:274 (2011), 931–958.

[3] В. Н. Сорокин, "Циклические графы и теорема Апери", *УМН*, **57**:3(345) (2002), 99–134; англ. пер.: V. N. Sorokin, "Cyclic graphs and Apéry's theorem", *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 535–571.

[4] С. П. Суетин, "Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда", *УМН*, **57**:1(343) (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, "Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series", *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 43–141.

[5] С. П. Суетин, "Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение", *УМН*, **70**:5(425) (2015), 121–174; англ. пер.: S. P. Suetin, "Distribution of the zeros of Padé polynomials and analytic continuation", *Russian Math. Surveys*, **70**:5 (2015), 901–951.

[6] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, "Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials", *Int. Math. Res. Not.*, **2004**:3 (2004), 109–129.

[7] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, "Large n limit of Gaussian random matrices with external source. II", *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.

[8] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, "Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов", *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, "Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials", *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.

[9] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100; англ. пер.: V. A. Kalyagin, “Hermite–Padé approximants and spectral analysis of nonsymmetric operators”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:1 (1995), 199–216.

[10] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, E. B. Saff, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.

[11] G. V. Chudnovsky, “Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π”, *The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications* (Bures-sur-Yvette/New York, 1979/1980), Lecture Notes in Math., **925**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 299–322.

[12] W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcedence”, *Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation* (Columbia, MO, 1998), Contemp. Math., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–342.

[13] K. Mahler, “Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms”, *Math. Ann.*, **168** (1967), 200–227.

[14] *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 84 с.; англ. пер.: Rational approximants for the Euler constant and recurrence relations, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**:, suppl. 2 (2011), S138–S190.

[15] A. I. Aptekarev, H. Stahl, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials”, *Progress in approximation theory* (Tampa, FL, 1990), Springer Ser. Comput. Math., **19**, Springer-Verlag, New York, 1992, 127–167.

[16] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1049–1131.

[17] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190; англ. пер.: A. I. Aptekarev, A. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.

[18] H. Stahl, “Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomals associated with the exponential function”, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 2002, № 14, 195–222.

[19] Г. Лопес Лагомасино, С. Медина Перальта, У. Фидальго Прието, “Аппроксимации Эрмита–Паде для некоторых систем мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **206**:2 (2015), 57–76; англ. пер.: G. López Lagomasino, S. Medina Peralta, U. Fidalgo Prieto, “Hermite-Padé approximation for certain systems of meromorphic functions”, *Sb. Math.*, **206**:2 (2015), 225–241.

[20] Ch. Hermite, “Sur la fonction exponentielle”, *C. R. Akad. Sci. (Paris)*, **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[21] Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. 1: *Арифметика. Алгебра. Анализ*, в 2-х т., 4-е изд., Наука, М., 1987, 432 с.; пер. с нем.: F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, v. 1: *Arithmetik, Algebra, Analysis*, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 1924, xii+321 pp.

[22] А. И. Аптекарев, “О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1981, № 1, 68–74; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Convergence of rational approximations to a set of exponents”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **36**:1 (1981), 81–86.

[23] H. Padé, "Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **16** (1899), 395–426.

[24] А. П. Старовойтов, "Аппроксимации Эрмита–Паде для системы функций Миттаг-Леффлера", *ПФМТ*, 2013, № 1(14), 81–87.

[25] А. П. Старовойтов, "О свойствах аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг-Леффлера", *Докл. НАН Беларуси*, **57**:1 (2013), 5–10.

[26] А. П. Старовойтов, "Об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг-Леффлера", *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 9, 59–68; англ. пер.: A. P. Starovoitov, "The asymptotic form of the Hermite–Padé approximations for a system of Mittag-Leffler functions", *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), **58**:9 (2014), 49–56.

[27] A. B. J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky, "Type II Hermite–Padé approximation to the exponential function", *J. Comput. Appl. Math.*, **207**:2 (2007), 227–244.

[28] Ch. Hermite, "Sur la généralisation des fractions continues algébriques", *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 2A*, **21** (1893), 289–308.

[29] K. Mahler, "Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus", I, *J. Reine Angew. Math.*, **166** (1932), 118–136; II, 137–150.

[30] K. Mahler, "Perfect systems", *Compositio Math.*, **19** (1968), 95–166.

[31] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988, 256 с.; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+221 pp.

[32] P. B. Borwein, "Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function", *Constr. Approx.*, **2**:4 (1986), 291–302.

[33] F. Wielonsky, "Asymptotics of diagonal Hermite–Padé approximants to e^z", *J. Approx. Theory*, **90**:2 (1997), 283–298.

[34] А. П. Старовойтов, "Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций", *ПФМТ*, 2014, № 1(18), 74–80.

[35] L. N. Trefethen, "The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk", *J. Approx. Theory*, **40**:4 (1984), 380–383.

[36] D. Braess, "On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x. II", *J. Approx. Theory*, **40**:4 (1984), 375–379.

[37] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, 3-е изд., Наука, М., 1989, 478 с.

[38] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961, 508 с.; пер. с англ.: J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **XX**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960, x+398 pp.

[39] Г. Полиа, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа*, т. I, 3-е изд., Наука, М., 1978, 392 с.; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. 1, 3. bericht. Aufl., Grundlehren Math. Wiss., **19**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964, xvi+338 pp.; англ. пер.: G. Pólya, G. Szegö, *Problems and theorems in analysis*, v. 1, Springer Study Edition, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976, xix+389 pp.

[40] A. B J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky, "Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function: a Riemann–Hilbert approach", *Constr. Approx.*, **21**:3 (2005), 351–412.

[41] G. Szegö, "Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe", *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, 1924, № 23, 50–64.

[42] E. B. Saff, R. S. Varga, "On the zeros and poles of Padé approximants to e^z. II", *Pade and rational approximation. Theory and applications* (Univ. South Florida, Tampa, FL, 1976), Academic Press, New York, 1977, 195–213.

[43] А. В. Астафьева, А. П. Старовойтов, "Экстремальные свойства аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций", *Докл. НАН Беларуси*, **58**:2 (2014), 32–37.

Поступила в редакцию
08.01.2015 и 20.03.2016

Анастасия Владимировна Астафьева
(Anastasiya V. Astafieva)
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Белоруссия
E-mail: astafeva@gsu.by

Александр Павлович Старовойтов
(Alexandr P. Starovoitov)
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Белоруссия
E-mail: svoitov@gsu.by