УДК 517.538.52+517.538.53

АСИМПТОТИКА КВАДРАТИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ASYMPTOTICS OF QUADRATIC HERMITE – PADÉ APPROXIMANTS OF THE EXPONENTIAL FUNCTIONS

A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе изучаются асимптотические свойства квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна и Ф. Вилонского.

Ключевые слова: *аппроксимации Эрмита – Паде I типа, квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод перевала.*

The paper deals with asymptotic properties of diagonal quadratic Hermite – Pad'e approximants of type I for exponential system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ with arbitrary real $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. The proved theorems complement the known results of P. Borwein, F. Wielonsky.

Keywords: *Hermite – Pad'e approximants of type I, quadratic and Hermite – Pad'e approximants, asymptotic equality, saddle-point method.*

Введение

Будем рассматривать два типа диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций (по поводу терминологии см. [1]). Один из этих типов (German type – тип II) состоит из совместных рациональных аппроксимаций $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{j\xi}) = P^j_{kn}(z)/Q_{kn}(z)$, $j = 1,2,\ldots,k$ набора экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$, где многочлены P^j_{kn}, Q_{kn} имеют степень не выше kn и определяются из условий

$$Q_{kn}(z)e^{jz} - P^j_{kn}(z) = O\left(z^{kn+n+1}\right), z \to 0. \quad (0.1)$$

Впервые такие конструкции рациональных дробей рассматривал Ш. Эрмит (1873 г.) в связи с доказательством трансцендентности числа e [2], [3]. При доказательстве трансцендентности числа π Линдеман (1882 г.) использовал аналоги дробей Эрмита, построенные уже для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные алгебраические числа (см. [3]).

Позже (1883 г.) Эрмит [4] ввёл другой тип аппроксимаций (Latin type – тип I). Для набора функций $\{e^{jz}\}_{j=0}^k$ эти аппроксимации совпадают с многочленами $A_0(z)$, $A_1(z), \ldots, A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O\left(z^{kn+n-1}\right), z \to 0. \quad (0.2)$$

Предполагается, что хотя бы один из многочленов $A_p(z)$ тождественно не равен нулю. К. Малером [5] было показано, что с помощью этого типа аппроксимаций также можно доказать трансцендентность числа e.

В одномерном случае ($k=1$) общая постановка задачи о нахождении полиномов, удовлетворяющих равенствам (0.1), (0.2) принадлежит Паде [6], а построенные два типа полиномов совпадают. В многомерном случае ($k \ge 2$) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов связано с появлением работ К.Малера [1], [5] (об участии других авторов в создании формальной теории см. обзоры [7], [8]). Оба типа аппроксимаций Эрмита – Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество применений в теории чисел, в частности, для измерения иррациональности [9], в доказательствах трансцендентности [10] и в исследованиях алгебраической природы математических констант, например, значений дзета функции Римана в натуральных точках, постоянной Эйлера [11] (о других приложениях см. [12], [8], [13]). Как уже было сказано ранее, при $k=1$ мы приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае теорема Паде утверждает, что для полиномов $A_0(z) = -P^1_{n-1}(z)$, $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, нормированных так, что $A_1(0)=1$, при $n \to \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т. е. на любом компакте в $\mathbb{C}$, справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2}\left(1+O(1/n)\right),$$
$$A_1(z) = e^{z/2}\left(1+O(1/n)\right).$$

С помощью явных формул П. Борвейн [14] нашёл асимптотику квадратичных ($k=2$) аппроксимаций Эрмита – Паде I типа. Этот результат был обобщён Ф. Вилонским [15] на случай произвольного k. Равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде II типа $\pi^j_{kn,kn}(z;e^{j\xi})$ к e^{jz}, $j=1,2,...,k$ на компактах в $\mathbb{C}$ была доказана А.И. Аптекаревым [16]. Им же установлена равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде II типа, построенных для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – произвольные отличные от нуля комплексные числа. В работах автора [17], [18] найдена асимптотика таких аппроксимаций соответственно для систем $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ и $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – произвольные отличные от нуля действительные числа.

Целью данной статьи является обобщение результатов П. Борвейна о квадратичных диагональных аппроксимациях I типа на системы экспонент $\left\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\right\}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Такое обобщение получено в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений многочленов $\{A_n^j(z)\}_{j=0}^2$, $degA_n^j \le n-1$, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{p=0}^{2} A_n^p(z)e^{\lambda_p z} = O\left(z^{3n-1}\right), z \to 0. \qquad (0.3)$$

При исследовании применяются эффективные для такого анализа методы Лапласа и перевала. Технология их применения является результатом синтеза методов доказательства основных результатов в работах [15], [17] и может быть использована для изучения асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита – Паде I рода для систем $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ при произвольных действительных λ_j и $k>2$.

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$. Общий случай сводится к рассматриваемому. Для этого достаточно равенство (0.3) умножить на $e^{-\lambda^* z}$, где $\lambda^* = \min\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$.

1 Предварительные результаты

Полиномы $A_n^0(z)$, $A_n^1(z)$, $A_n^2(z)$, удовлетворяющие равенствам (0.3), могут быть получены решением линейной системы $3n-1$ однородных уравнений с $3n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{ed\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n}, 0 \le p \le 2, \quad (1.1)$$

где $\varphi(\xi) = \xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)$, удовлетворяют (0.3) и всем другим условиям.

Далее при изучении асимптотики полиномов (1.1) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения [19, с. 398, с. 415].

Утверждение **1.1 (Метод Лапласа).** *Пусть* $f(x)$, $S(x)$ *непрерывные на отрезке* $[a,b]$ *функции, при этом* $S(x)$ *принимает только действительные значения, а* $f(x)$ *может быть комплекснозначной. Полагаем*

$$I_n = \int_a^b f(x)e^{nS(x)}dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ *в точке* $x_0 \in (a,b)$ *имеет абсолютный максимум на отрезке* $[a,b]$, *т. е.* $S(x) < S(x_0)$, $x \ne x_0$, $S''(x_0) \ne 0$, *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $n \to +\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}}e^{nS(x_0)}\left\{f(x_0)+O(1/n)\right\}. \quad (1.2)$$

Утверждение **1.2 (Метод перевала).** *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой односвязной области* G, *содержащей кусочно гладкую кривую* γ *и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi)e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Предположим, что $\max_{\xi\in\gamma} ReS(\xi)$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е.* $S'(z_0)=0$, $S''(z_0)\ne 0$. *Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора* [19, с. 414], *в которых* $ReS(\xi) < ReS(z_0)$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}e^{nS(z_0)}\left\{f(z_0)+O(1/n)\right\}. \quad (1.3)$$

Выбор ветви корня в (1.3) *определяется из условий*

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}}=\varphi_0,$$

где φ_0 *– угол между касательной к кривой* l *в точке* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* l *– линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0, *т. е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия:* $ImS(z)=ImS(z_0)$ *при* $z\in l$, $ReS(z)<ReS(z_0)$ *при* $z\in l$, $z\neq z_0$.

2 Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде

Перейдём непосредственно к изучению асимптотики полиномов A_n^p, $0\le p\le 2$. С этой целью введём необходимые обозначения. Пусть x_i, $i=1,2$ нули функции $\varphi'(\xi)$, т. е. $\varphi'(x_i)=0$, $i=1,2$. Ясно, что x_i – действительные числа и $x_1\in(0,\lambda_1)$, $x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$. При $\xi\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_j\}_{j=0}^2$ рассмотрим однозначную функцию (главную ветвь логарифма)

$$S(\xi)=-\ln\varphi(\xi)=-\ln|\varphi(\xi)|-i\arg_0\varphi(\xi),$$

где $\arg_0\varphi(\xi)\in(-\pi,\pi]$. В области её определения справедливы равенства

$$S'(\xi)=-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}=-\frac{1}{\xi}-\frac{1}{(\xi-\lambda_1)}-\frac{1}{(\xi-\lambda_2)},$$

$$S''(\xi)=-\frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi)-\left[\varphi'(\xi)\right]^2}{\varphi^2(\xi)}=$$

$$=\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{(\xi-\lambda_1)^2}+\frac{1}{(\xi-\lambda_k)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_j)=0$,

$$S''(x_j)=-\varphi''(x_j)/\varphi(x_j)>0,\quad j=1,2.$$

Теорема 2.1. *При* $n\to\infty$ *локально равномерно по* z

$$A_n^0(z)=\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1z}\left(1+O(1/n)\right),\quad(2.1)$$

$$A_n^1(z)=\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_2)}}e^{nS(x_2)}e^{(x_2-\lambda_1)z}\left(1+O(1/n)\right)-$$
$$-\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{(x_1-\lambda_1)z}\left(1+O(1/n)\right),\quad(2.2)$$

$$A_n^2(z)=-\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_2)}}e^{nS(x_2)}e^{(x_2-\lambda_2)z}\left(1+O(1/n)\right).(2.3)$$

Доказательство. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}e^{\xi z}e^{nS(\xi)}d\xi,\qquad(2.4)$$

докажем равенство (2.1) для каждого фиксированного $z\in\mathbb{C}$. Для этого в интеграле (2.4) деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R, принадлежащий области $\{z:-\infty<Rez<\lambda_1\}$, с вершинами в точках $A(-a',-r)$, $B(-a',r)$, $C(a,r)$, $D(a,-r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a\in(0,\lambda_1)$, $a'>0$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B, максимум функции $ReS(\xi)$ достигается в единственной точке $-a'$. Аналогично на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D, максимум этой функции достигается в единственной точке a. На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значения $ReS(\xi)$ меньше каждого из значений $ReS(\xi)$ в точках $-a'$ и a. Действительно, пусть, например, $\xi\in[B,C]$, т. е. $\xi=t+ir$, $t\in[-a',a]$. Тогда

$$|\varphi(\xi)|=\sqrt{(t^2+r^2)((t-\lambda_1)^2+r^2)((t-\lambda_2)^2+r^2)}>$$
$$>\min\{|\varphi(-a')|,|\varphi(a)|\},$$

если только $r>2\max\{a',\lambda_2\}$. Отсюда и определения $S(\xi)$ следует, что для всех $\xi\in[B,C]$ $ReS(\xi)<\min\{ReS(-a'),ReS(a)\}$. Определимся теперь с выбором a' и a. Положим $a=x_1$, а a' возьмём таким, чтобы $ReS(-a')<ReS(x_1)$. Такой выбор возможен, так как $\ln|\varphi(t)|^{-1}\to-\infty$ при $t\in\mathbb{R}$ и $t\to-\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L,N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L,N]}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{[L,N]}e^{\xi z}e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Применим метод перевала (утверждение 1.2) к интегралу $F_n^{[D,C]}(z)$. Тогда

$$F_n^{[D,C]}(z)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1z}\left(1+O(1/n)\right).(2.5)$$

Выбираем ветвь корня в (2.5) с учётом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0=\pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n\to\infty$

$$F_n^{[D,C]}(z)=\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1z}\left(1+O(1/n)\right).(2.6)$$

Применяя к интегралу $F_n^{[B,A]}(z)$ утверждение 1.2 и учитывая выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что локально равномерно по z

$$\left|F_n^{[B,A]}(z)\right|\le\theta\left|e^{n(S(x_1)-\delta)}\right|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n\to\infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}(z)$ экспоненциально мал по сравнению с $e^{nS(x_1)}$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}(z)$, $F_n^{[A,D]}(z)$. Значит основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D,C]$. Поэтому из (2.6) следует справедливость равенства (2.1) для любого фиксированного $z\in\mathbb{C}$.

Равенство (2.3) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учётом того, что угол $\varphi_0=-\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенства (2.2). Зафиксируем произвольное $z\in\mathbb{C}$ и представим многочлен $A_n^1(z)$ в виде

$$A_n^1(z)=\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\int_{C_1}e^{\xi z}e^{nS(\xi)}d\xi. \qquad (2.7)$$

В интеграле (2.7) деформируем контур интегрирования C_1 в прямоугольник R^*, принадлежащий области $\{z:0<Rez<\lambda_2\}$ с вершинами в точках $A^*(a',-r)$, $B^*(a',r)$, $C^*(a,r)$, $D^*(a,-r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a'\in(0,\lambda_1)$ $a\in(\lambda_1,\lambda_2)$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки A^* и B^*, максимум функции $ReS(\xi)$ достигается в единственной точке a', а на отрезке $[D^*,C^*]$ он достигается в единственной точке a. При достаточно большом r $(r>3\lambda_2)$ значения $ReS(\xi)$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $[B^*,C^*]$ и $[A^*,D^*]$ меньше каждого из значений $ReS(\xi)$ в точках a' и a. Если положить $a'=x_1$, $a=x_2$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику $A_n^1(z)$ будут вносить интегралы по отрезкам $[A^*,B^*]$ и $[D^*,C^*]$. Применяя к ним утверждение 1.2, при $n\to\infty$ получим, что

$$F_n^{[D,C]}(z)=\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_2)}}e^{nS(x_2)}e^{x_2 z}\left(1+O(1/n)\right). \qquad (2.8)$$

$$F_n^{[B,A]}(z)=\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1 z}\left(1+O(1/n)\right). \qquad (2.9)$$

Заметим, что при выборе ветви корня в (2.8) $\varphi_0=\pi/2$, а при выборе ветви корня в (2.9) $\varphi_0=-\pi/2$. С учётом этого, из (2.8) и (2.9) следует равенство (2.2). Таким образом, для каждого фиксированного z асимптотические равенства (2.1)–(2.3) доказаны. Справедливость равенств (2.1)–(2.3) равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ будет обоснована при доказательстве теоремы 2.2.

***Следствие* 2.1.** *При* $n\to\infty$

$$A_n^0(0)=\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}\left(1+O(1/n)\right),$$

$$A_n^1(0)=\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_2)}}e^{nS(x_2)}\left(1+O(1/n)\right)-$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}\left(1+O(1/n)\right), \qquad (2.10)$$

$$A_n^2(0)=-\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_2)}}e^{nS(x_2)}\left(1+O(1/n)\right),$$

Из равенств (2.10) следует, что при достаточно больших n $A_n^0(0)\neq0$ и $A_n^2(0)\neq0$. При таких n определим две последовательности нормированных полиномов

$$\tilde{A}_n^0(z)=A_n^0(z)/A_n^0(0),$$
$$\tilde{A}_n^2(z)=A_n^2(z)/A_n^2(0).$$

Выясним, когда $A_n^1(0)\neq0$. Обозначим через $p=\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}$, $h=5\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1^2-2\lambda_2^2$. Тогда несложные вычисления приводят к равенствам

$$x_1=(\lambda_1+\lambda_2-p)/3,\ x_2=(\lambda_1+\lambda_2+p)/3,$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)&=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)h+2p^3}{27},\\ \varphi(x_2)&=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)h-2p^3}{27},\\ S''(x_1)&=\ln\frac{54p}{(\lambda_1+\lambda_2)h+2p^3},\\ S''(x_2)&=\ln\frac{-54p}{(\lambda_1+\lambda_2)h-2p^3}.\end{aligned} \qquad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что если $A_n^1(0)=0$, то необходимо чтобы $h=0$, т. е. $\lambda_2=2\lambda_1$. В этом случае

$$S(x_1)=\ln(27/p^3),$$
$$S(x_2)=\ln(27/p^3)+i\pi,$$
$$S''(x_1)=S''(x_2)=27/p^2.$$

Поэтому при $\lambda_2=2\lambda_1$ из второго равенства в (2.10) вытекает, что при $n\to\infty$

$$A_n^1(0)=\sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}}\left[(-1)^n\left(\frac{27}{p^3}\right)^n\left(1+O(1/n)\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{27}{p^3}\right)^n\left(1+O(1/n)\right)\right].$$

Следовательно, при достаточно больших n $A_{2n+1}^1(0)\neq0$ и поэтому определена последовательность нормированных многочленов

$$\tilde{A}_{2n+1}^1(z)=A_{2n+1}^1(z)/A_{2n+1}^1(0).$$

Производную многочлена $A_n^1(z)$ можно представить в виде

$$\frac{dA_n^1}{dz}(z)=\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\int_{C_1}(\xi-\lambda_1)e^{\xi z}e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики $A_n^1(z)$, применив к интегралу в правой части последнего равенства при $z=0$ метод перевала, получим

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0)=\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_2)}}(x_2-\lambda_1)e^{nS(x_2)}\left(1+O(1/n)\right)-$$
$$-\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_1)}}(x_1-\lambda_1)e^{nS(x_1)}\left(1+O(1/n)\right).$$

Тогда при $\lambda_2=2\lambda_1$ и $n\to\infty$ справедливо равенство

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0)=\sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}}\left(\frac{27}{p^3}\right)^n(x_2-x_1)\left(1+O(1/n)\right),$$

из которого следует, что при больших n $\left(A_{2n}^1\right)'(0)\neq 0$. Поэтому в случае, когда $\lambda_2=2\lambda_1$, определена последовательность нормированных полиномов $\tilde{A}_{2n}^1(z)=A_{2n}^1(z)/\left(A_{2n}^1\right)'(0)$.

Теорема 2.2. *Локально равномерно по z при $n\to\infty$*

$$\tilde{A}_n^0(z)\rightrightarrows e^{x_1 z},\quad \tilde{A}_n^2(z)\rightrightarrows e^{(x_2-\lambda_2)z}. \qquad (2.12)$$

Если $\lambda_2\neq 2\lambda_1$, то локально равномерно по z при $n\to\infty$

$$\tilde{A}_n^1(z)\rightrightarrows e^{(x_2-\lambda_1)z}, \qquad (2.13)$$

а при $\lambda_2=2\lambda_1$ и $n\to\infty$ локально равномерно по z

$$\tilde{A}_{2n+1}^1(z)\rightrightarrows\frac{1}{2}\left(e^{(x_2-\lambda_1)z}+e^{(x_1-\lambda_1)z}\right), \qquad (2.14)$$

$$\tilde{A}_{2n}^1(z)\rightrightarrows\frac{1}{x_2-x_1}\left(e^{(x_2-\lambda_1)z}-e^{(x_1-\lambda_1)z}\right). \qquad (2.15)$$

Доказательство. Поточечная сходимость в (2.12)–(2.15) доказана в теореме 2.1. Остаётся доказать, что нормированные многочлены $\tilde{A}_n^0(z)$, $\tilde{A}_n^2(z)$, $\tilde{A}_n^1(z)$, $\tilde{A}_{2n+1}^1(z)$ и $\tilde{A}_{2n}^1(z)$ равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к соответствующим функциям. Докажем это, например, для $\tilde{A}_n^0(z)$.

Если предположить, что $|z|\le\rho$ и $\xi\in R$, то модуль $e^{\xi z}$ ограничен $M=e^{4\rho\max\{a',\lambda_2\}}$. Учитывая равенство (2.4), в этом случае получим, что

$$\left|A_n^0(z)\right|\le\frac{M}{2\pi}\int_\alpha^\beta e^{nReS(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt$$

при условии, что контур интегрирования R прежний и параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\beta]$. Для нахождения асимптотики интеграла в правой части предыдущего неравенства применим метод Лапласа (утверждение 1.1). В результате получим, что при $n\to\infty$

$$\int_\alpha^\beta e^{nReS(\zeta(t))}\left|\zeta'(t)\right|dt=$$
$$=\sqrt{\frac{-2\pi}{n\left[ReS(\zeta(t))\right]''_{t=t_0}}}e^{nReS(x_1)}\left|\zeta'(t_0)\right|\left(1+O(1/n)\right), \qquad (2.16)$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0)=x_1$. Из того, что t_0 является точкой максимума функции $ReS(\zeta(t))$, следует

$$\left[ReS(\zeta(t))\right]''_{t=t_0}=S''(x_1)\left[\zeta'(t_0)\right]^2<0.$$

Отсюда, учитывая (2.10), (2.16), при $n\ge n_0$ получаем неравенство $\left|A_n^0(z)\right|\le 2M$, из которого следует, что последовательность $\left\{A_n^0(z)\right\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z:|z|\le\rho\}$. Тогда по теореме Витали [20, с. 371] эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{x_1 z}$ на любом компакте из круга $\{z:|z|\le\rho\}$. Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 2.2. Теорема 2.2 доказана.

Для сравнения переформулируем, с учётом принятых обозначений, аналогичный результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита-Паде II рода [18].

Теорема 2.3. *Пусть $\pi_{2n,2n}^j(z;e^{\lambda_j\xi})$, $j=1,2$ – аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора $\left\{e^{\lambda_1 z},e^{\lambda_2 z}\right\}$, где λ_1, λ_2 – различные действительные числа. Тогда локально равномерно по z при $n\to\infty$*

$$e^{\lambda_1 z}-\pi_{2n,2n}^1(z;e^{\lambda_1\xi})=$$
$$=\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}e^{(\lambda_1+\lambda_2)z/3}\sqrt{\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{-nS(x_1)}e^{(\lambda_1-x_1)z}\left(1+O(1/n)\right),$$

$$e^{\lambda_2 z}-\pi_{2n,2n}^1(z;e^{\lambda_2\xi})=$$
$$=\frac{z^{3n+1}}{(3n)!}e^{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)z}{3}}\left\{\sqrt{\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{-nS(x_1)}e^{(\lambda_2-x_1)z}\left(1+O(1/n)\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\sqrt{\frac{2\pi}{nS''(x_2)}}e^{-nS(x_2)}e^{(\lambda_2-x_2)z}\left(1+O(1/n)\right)\right\}.$$

3 Сравнение двух типов аппроксимаций. Примеры

Проиллюстрируем теорему 2.1, рассмотрев конкретные примеры. Кроме этого, сравним полученные результаты с аналогичными утверждениями для аппроксимаций Эрмита – Паде II типа.

Напомним, что две бесконечно большие или две бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ называют эквивалентными ($\alpha_n\sim\beta_n$) при $n\to\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1$.

Пусть $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Тогда

$$\varphi(\xi)=\xi(\xi-1)(\xi-2),$$
$$x_1=1-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_2=1+\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$S(x_1)=\ln(3\sqrt{3}/2),$$
$$S(x_2)=\ln(3\sqrt{3}/2)+i\pi,$$
$$S''(x_1)=S''(x_2)=9.$$

Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

***Следствие* 3.1.** *При* $n \to \infty$

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z}, \qquad (3.1)$$

$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n \left\{ e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1} e^{-z/\sqrt{3}} \right\},$$

$$A_n^2(z) \sim (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

Асимптотические равенства (3.1) согласуются с соответствующими утверждениями из работ [14] и [15]. Их полезно сравнить со следующим следствием теоремы 2.3.

***Следствие* 3.2.** *Пусть* $\pi_{2n,2n}^j(z; e^{j\xi})$, $j = 1, 2$ *– аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора* $\left\{ e^z, e^{2z} \right\}$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\xi}) \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n e^{z/\sqrt{3}},$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\lambda_2 \xi}) \sim$$

$$\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n \left\{ e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}} \right\}.$$

Пусть теперь $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$. Будем считать, что $0 < \varepsilon < 1$ Случай $\varepsilon = 1$ рассмотрен в следствиях 2.1 и 3.1. Тогда

$$p = \sqrt{1 + \varepsilon + \varepsilon^2} \to 1, \quad h = 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 \to 1$$

при $\varepsilon \to 0$, и

$$\varphi(\xi) = \xi(\xi - 1)(\xi - 1 - \varepsilon),$$

$$x_1 = \frac{2 + \varepsilon - p}{3}, \quad x_2 = \frac{2 + \varepsilon + p}{3},$$

$$S(x_1) = \ln \frac{27}{2p^3 + (2+\varepsilon)h},$$

$$S(x_2) = \ln \frac{27}{2p^3 - (2+\varepsilon)h} + i\pi,$$

$$S''(x_1) = \frac{54p}{2p^3 + (2+\varepsilon)h}, \quad S''(x_2) = \frac{54p}{2p^3 - (2+\varepsilon)h}.$$

В этом случае из теоремы 2.1 вытекает

***Следствие* 3.3.** *При* $n \to \infty$

$$\tilde{A}_n^0(z) \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2p^3 + (2+\varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 + (2+\varepsilon)h} \right)^n e^{\frac{(2+\varepsilon-p)z}{3}},$$

$$\tilde{A}_n^1(z) \sim \qquad (3.2)$$

$$\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2+\varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2+\varepsilon)h} \right)^n e^{\frac{(-1+\varepsilon+p)z}{3}},$$

$$\tilde{A}_n^2(z) \sim$$

$$\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2+\varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2+\varepsilon)h} \right)^n e^{\frac{(-1-2\varepsilon+p)z}{3}}.$$

Соответственно, теорема 2.3 в этом случае выглядит следующим образом.

***Следствие* 3.4.** *Пусть*

$$\pi_{2n,2n}^1(z; e^{\xi}), \ \pi_{2n,2n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi})$$

– аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора $\left\{ e^z, e^{(1+\varepsilon)z} \right\}$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\xi}) \sim$$

$$\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2+\varepsilon)h)}{27pn}} \left(\frac{2p^3 + (2+\varepsilon)h}{27} \right)^n e^{\frac{(3+p)z}{3}},$$

$$e^{(1+\varepsilon)z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{(1+\varepsilon)\xi}) \sim$$

$$\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2+\varepsilon)h)}{27pn}} \times$$

$$\times \left(\frac{2p^3 + (2+\varepsilon)h}{27} \right)^n e^{\frac{(3+3\varepsilon+p)z}{3}}.$$

Сравним как ведут себя асимптотики соответствующих аппроксимаций для набора функций $\{e^z, e^{(1+\varepsilon)z}\}$ при $\varepsilon \to 0$. Из равенств (3.2) следует, что главные члены асимптотик полиномов $\tilde{A}_n^1(z)$ и $\tilde{A}_n^2(z)$ отличаются на множитель $e^{\varepsilon z}$, который локально равномерно стремится к единице. Следствие 3.4 позволяет утверждать, что при малых значениях ε асимптотики соответствующих уклонений аппроксимаций Эрмита – Паде II рода отличаются несущественно и с убыванием ε к нулю стремятся к общему значению. При этом зависящий от ε множитель $(2p^3 + (2+\varepsilon)h)/27)^n$, определяющий поведение главного члена асимптотики, стремится к $(2/(3\sqrt{3}))^{2n}$. Это несколько неожиданно, если принять во внимание первое утвеждение следствия 3.2, так как наблюдается эффект существенного роста (почти в $(2/(3\sqrt{3}))^n$ раз) скорости приближения функции e^z аппроксимациями Эрмита – Паде из следствия 3.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mahler*, *K*. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – V. 19. – P. 95–166.

2. *Hermite*, *C*. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

3. *Клейн*, *Ф*. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1 / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1933.

4. *Hermite*, *C*. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.

5. *Mahler*, *K*. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.

6. *Pade*, *H*. Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16. № 3. – P. 394–426.

7. *Aptekarev*, *A.I.* Asymptotics of Hermite-Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) – P. 127–167 / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York / Berlin : Springer-Verlag, 1992.

8. *Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены* / А.И. Аптекарев [и др.] // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

9. *Mahler*, *K*. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 1668. – P. 200–227.

10. *Chudnovsky*, *G.V.* Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π, in “Lecture Notes in Math” / G.V. Chudnovsky. – New York / Berlin : Springer-Verlag. – 1982. – Vol. 925. – P. 299–322.

11. *Аптекарев*, *А.И.* Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения / А.И. Аптекарев // Сборник статей. Совр. пробл. матем / А.И. Аптекарев (ред.). – М. : МИАН. – 1988. – Т. 9. – С. 1–71.

12. *Калягин*, *В.А*. Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.

13. *Суетин*, *С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.

14. *Borwein*, *P.B.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.

15. *Wielonsky*, *F.* Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.

16. *Аптекарев*, *А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

17. *Старовойтов*, *А.П.* Асимптотика эрмитовой аппроксимации экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. – 2012. – № 5 (74). – С. 163–171.

18. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.

19. *Сидоров*, *Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.

20. *Маркушевич*, *А.И.* Теория аналитических функций. Том 1 / А.И. Маркушевич. – М. : Наука, 1967.

Поступила в редакцию 29.01.14.