*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2007. Том 48, № 3*

*УДК 512.54*

# КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $C$–КВАЗИНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

**А. Н. Скиба, О. В. Титов**

**Аннотация:** Пусть $G$ — конечная группа, $H$ — подгруппа группы $G$. Будем говорить, что $H$ *c-квазинормальна в* $G$, если $G$ имеет квазинормальную подгруппу $T$ такую, что $HT = G$ и $T \cap H$ квазинормальна в $G$. В каждой нециклической силовской подгруппе $P$ из $G$ фиксируется некоторая ее подгруппа $D$ такая, что $1 < |D| < |P|$, и изучается строение группы $G$ при условии, что все подгруппы $H$ из $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, не имеющие сверхразрешимого добавления в $G$, $c$-квазинормальны в $G$.

**Ключевые слова:** силовская подгруппа, добавление к подгруппе, сверхразрешимая группа, квазинормальная подгруппа, насыщенная формация.

## § 1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. В работе [1] Оре рассмотрел два обобщения нормальности, которые вызывают неослабевающий интерес у исследователей и в наши дни. Прежде всего отметим, что в работе [1] впервые введены в математическую практику квазинормальные подгруппы: следуя [1], мы говорим, что подгруппа $H$ группы $G$ *квазинормальна в* $G$, если $H$ перестановочна с любой подгруппой из $G$ (т. е. $HT = TH$ для всех подгрупп $T$ из $G$). Оказалось, что квазинормальные подгруппы обладают рядом интересных свойств [1–7] и что фактически они мало отличаются от нормальных подгрупп. Отметим, в частности, что согласно [6] для любой квазинормальной подгруппы $H$ имеет место $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$, а ввиду [8, теорема 2.1.3] квазинормальные подгруппы — это в точности те субнормальные подгруппы группы $G$, которые являются модулярными элементами в решетке всех подгрупп группы $G$.

Понятно, что если подгруппа $H$ группы $G$ нормальна в $G$, то в $G$ всегда найдется такая подгруппа $T$, что выполнено следующее условие:

$$G = HT \text{ и обе подгруппы } T \text{ и } T \cap H \text{ нормальны в } G. \qquad (*)$$

Таким образом, условие $(*)$ является еще одним обобщением нормальности. Такая идея впервые рассмотрена в работе [1], где, в частности, доказано, что *группа* $G$ *является разрешимой тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы удовлетворяют условию* $(*)$ (в связи с этим см. также работу Бэра [9]). В дальнейшем, в работе [10] подгруппы, удовлетворяющие условию $(*)$, названы *c-нормальными*. В этой же работе построена красивая теория $c$-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации групп с заданными системами подгрупп.

В данной работе мы анализируем следующее понятие, которое одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие $c$-нормальности для подгрупп.

Определение 1.1. Подгруппа $H$ группы $G$ называется *$c$-квазинормальной в $G$ подгруппой*, если существует такая подгруппа $T$ группы $G$, что $HT = G$ и $T \cap H$, $T$ — квазинормальные в $G$ подгруппы.

Следующий простой пример показывает, что в общем случае $c$-квазинормальная подгруппа не является ни квазинормальной, ни $c$-нормальной.

Пример 1.2. Пусть $P = M_m(2) = \langle x, y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, x^y = x^{1+2^{m-2}} \rangle$, где $m > 3$, и пусть $A = \langle x \rangle$, $B = \langle y \rangle$. Тогда $P = [A]B$ и $|B| = 2$. Так как $Z(P)$ — циклическая группа порядка $2^{m-2}$, то $B$ — нормальная подгруппа в $Z(P)B$. Пусть $Z_3$ — группа простого порядка 3 и $G = Z_3 \wr P = [K]P$, где $K$ — база регулярного сплетения $G$. Поскольку $G = (KB)A$, $A \cap KB = 1$ и $P$ — модулярная группа, то $KB$ квазинормальна в $G$ и поэтому подгруппа $A$ $c$-квазинормальна в $G$. Значит, подгруппа $A$ является $c$-квазинормальной в $G$, но не квазинормальной и не $c$-нормальной в $G$.

Главной целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.3.** *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathscr{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа $P$ группы $F^*(E)$ содержит такую подгруппу $D$, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, и порядка $2|D|$ (если $P$ — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) $c$-квазинормальны в $G$. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

В этой теореме $F^*(E)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга [11, с. 126].

Теорема 1.3 будет доказана в § 4. Но прежде в § 3 мы докажем следующий факт, который является одним из главных этапов в доказательстве теоремы 1.3.

**Теорема 1.4.** *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathscr{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа $P$ группы $E$ содержит такую подгруппу $D$, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, и порядка $2|D|$ (если $P$ не абелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие сверхразрешимого добавления в $G$, $c$-квазинормальны в $G$. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

Отметим, что различные частные случаи теорем 1.3, 1.4 могут быть найдены в работах [10, 12–24].

## § 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп. Напомним, что *$\mathscr{U}$-гиперцентром группы $G$* называется произведение нормальных подгрупп из $G$, $G$-главные факторы которых имеют простой порядок. Мы используем запись $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$ для обозначения $\mathscr{U}$-гиперцентра группы $G$.

**Лемма 2.1** (см. [25, теорема 9.15]). $G/C_G\big(Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)\big) \in \mathscr{U}$.

**Лемма 2.2.** *Пусть $G$ — группа и $P = P_1 \times \dots \times P_t$ — $p$-подгруппа из $G$, где $t > 1$ и $P_1, \dots, P_t$ — минимальные нормальные подгруппы группы $G$. Допустим, что $P$ имеет подгруппу $D$ такую, что $1 < |D| < |P|$, и каждая подгруппа $H$ из $P$*

*порядка, равного порядку подгруппы $D$, нормальна в $G$. Тогда порядок каждой подгруппы $P_i$ — простое число.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Тогда для некоторого $i$ ввиду минимальности подгруппы $P_i$ имеем, что $|P_i| > p$ и $|D| > p$. Если существует $j$ такое, что $|P_j| = p$, то условие леммы выполняется для $G/P_j$ (относительно $P/P_j$) и поэтому все главные факторы, которые находятся между $P_j$ и $P$, имеют простой порядок. Но тогда все подгруппы $P_1, \dots, P_t$ простые; противоречие. Значит, $|P_k| > p$ для всех $k = 1, \dots, t$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $D = P_1 \dots P_k$ для некоторого $k < t$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа в $P_1$ и $H = MP_2 \dots P_k Z$, где $|Z| = p$ и $Z \le P_{k+1}$. Тогда $|H| = |D|$ и поэтому по условию $H$ нормальна в $G$. Таким образом, $D \cap H = MP_2 \dots P_k(D \cap Z) = MP_2 \dots P_k$ нормальна в $G$, следовательно, $M = P_1 \cap MP_2 \dots P_k$ нормальна в $G$, что противоречит минимальности подгруппы $P_1$.

**Лемма 2.3** (см. [25, следствие 7.7.2]). *Пусть $G$ — группа и $A \le G$. Тогда*

(1) *Если $A$ — субнормальная холлова подгруппа группы $G$, то $A$ нормальна в $G$.*

(2) *Если $A$ субнормальна в $G$ и $A$ — $\pi$-подгруппа группы $G$, то $A \le O_\pi(G)$.*

(3) *Если $A$ — субнормальная разрешимая подгруппа группы $G$, то $A$ содержится в некоторой разрешимой нормальной в $G$ подгруппе.*

**Лемма 2.4** [1]. *Пусть $G$ — группа и $H \le G$. Если $H$ квазинормальна в $G$, то $H$ субнормальна в $G$.*

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [7, лемма A]).

**Лемма 2.5.** *Если $H$ квазинормальна в $G$ и $H$ — $p$-группа для некоторого простого $p$, то $O^p(G) \le N_G(H)$.*

Отметим несколько свойств $c$-квазинормальных подгрупп.

**Лемма 2.6.** *Пусть $G$ — группа и $H \le K \le G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $H$ — квазинормальная в $G$ подгруппа, то $H$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа.*

(2) *Пусть $H$ — нормальная в $G$ подгруппа. Тогда $K/H$ — $c$-квазинормальная подгруппа в группе $G/H$ тогда и только тогда, когда $K$ — $c$-квазинормальная подгруппа в группе $G$.*

(3) *Если $H$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа, то $H$ — $c$-квазинормальная в $K$ подгруппа.*

(4) *Пусть $H$ — нормальная в $G$ подгруппа. Тогда для всех $c$-квазинормальных в $G$ подгрупп $E$ таких, что $(|H|, |E|) = 1$, $HE/H$ — $c$-квазинормальная подгруппа в группе $G/H$.*

(5) *Пусть $H$ — $p$-группа для некоторого простого числа $p$ и $H$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа, которая не квазинормальна в $G$. Тогда в группе $G$ существует такая нормальная подгруппа $M$, что $|G : M| = p$ и $G = HM$.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно.

(2) Пусть $K/H$ — $c$-квазинормальная в $G/H$ подгруппа и $T/H$ — квазинормальная в $G/H$ подгруппа такая, что $(K/H)(T/H) = G/H$ и $(T/H) \cap (K/H)$ квазинормальна в $G/H$. Тогда $KT = G$, $T$ и $T \cap K$ — квазинормальные в $G$ подгруппы. Значит, $K$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа.

Пусть теперь для некоторой квазинормальной в $G$ подгруппы $T$ имеем $KT = G$ и $T \cap K$ — квазинормальная в $G$ подгруппа. Ясно, что $(HT/H)(K/H) = G/H$. Поскольку $(HT/H) \cap (K/H) = (HT \cap K)/H = H(T \cap K)/H$, то $H(T \cap K)/H$ и $HT/H$ — квазинормальные в $G/H$ подгруппы. Следовательно, $K/H$ — $c$-квазинормальная в $G/H$ подгруппа.

(3) Пусть $T$ — подгруппа группы $G$ такая, что $HT = G$ и $T \cap H$ и $T$ — квазинормальные в $G$ подгруппы. Тогда $K = K \cap HT = H(K \cap T)$ и поэтому $K \cap T$ и $(K \cap T) \cap H$ — квазинормальные в $K$ подгруппы. Значит, $H$ $c$-квазинормальна в $K$.

(4) Пусть $E$ — $c$-квазинормальная подгруппа в группе $G$ и $T$ — квазинормальная в $G$ подгруппа такая, что $ET = G$ и $T \cap E$ квазинормальна в $G$. Ясно, что $H \leq T$ и $T \cap HE = H(T \cap E)$ — квазинормальная в $G$ подгруппа. Значит, $HE$ $c$-квазинормальна в $G$, и ввиду (2) $HE/H$ — $c$-квазинормальная в $G/H$ подгруппа.

(5) Поскольку согласно условию в группе $G$ существует подгруппа $T$ такая, что $HT = G$ и $T \cap H$, $T$ — квазинормальные в $G$ подгруппы, то $T$ субнормальна в $G$ и поэтому $T \leq K$, где $K$ — собственная нормальная в $G$ подгруппа. Значит, $G/K$ — $p$-группа, и в $G$ существует нормальная максимальная подгруппа $M$ такая, что $HM = G$.

**Лемма 2.7.** *Пусть $N$ — элементарная абелева нормальная $p$-подгруппа группы $G$. Предположим, что в группе $N$ существует такая подгруппа $D$, что $1 < |D| < |N|$ и каждая подгруппа $H$ группы $N$, порядок которой равен порядку подгруппы $D$, $c$-квазинормальна в $G$. Тогда некоторая максимальная подгруппа из $N$ нормальна в $G$.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть $H$ — подгруппа группы $N$ такая, что $|H| = |D|$ и $H$ не квазинормальна в $G$. Поскольку по условию $H$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа, то согласно лемме 2.6(5) в группе $G$ существует нормальная подгруппа $T$ такая, что индекс $|G : T|$ равен простому числу и $HT = G$. Так как $NT = G$, то $T \cap N$ — максимальная подгруппа группы $N$ и $T \cap N$ нормальна в $G$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, каждая подгруппа $H$ группы $N$ такая, что $|H| = |D|$, квазинормальна в $G$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $N$. Поскольку $M$ является произведением некоторых квазинормальных в $G$ подгрупп группы $N$, то $M$ квазинормальна в $G$. Ввиду леммы 2.5 $O^p(G) \leq N_G(M)$, и поэтому $|G : N_G(M)| = p^a$ для некоторого $a \in \mathbb{N}$. Если $M_1, \ldots, M_t$ — множество всех максимальных подгрупп группы $N$, то $p$ делит $t$, что противоречит [26, гл. III, лемма 8.5(d)].

**Лемма 2.8.** *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и пусть $G$ — группа с разрешимым $\mathscr{F}$-корадикалом $P = G^{\mathscr{F}}$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы $G$, не содержащая $P$, принадлежит $\mathscr{F}$. Тогда $P = G^{\mathscr{F}}$ — $p$-группа для некоторого простого числа $p$ и если каждая циклическая подгруппа группы $P$ простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и $P$ неабелева группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в $G$, $c$-квазинормальна в $G$, то $|P/\Phi(P)| = p$.*

Доказательство. Согласно [25, теорема 24.2] $P = G^{\mathscr{F}}$ — $p$-группа для некоторого простого числа $p$ и справедливы следующие утверждения:

(1) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы $G$;

(2) $P$ имеет экспоненту $p$ или экспоненту 4 (если $p = 2$ и $P$ не абелева группа).

Предположим, что каждая циклическая подгруппа группы $P$ простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и $P$ неабелева группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в $G$, $c$-квазинормальна в $G$.

Пусть $\Phi = \Phi(P)$ и $X/\Phi$ — подгруппа группы простого порядка в $P/\Phi$, $x \in X \diagdown \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$ и либо $L$ имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$, либо подгруппа $L$ $c$-квазинормальна в $G$. Пусть имеет место первый случай. Мы можем предположить, что $T \neq G$. Поскольку $\Phi \leq \Phi(G)$, то $T\Phi \neq G$. Так как $LT = G$, то $(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi$. Значит, $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$, и поскольку $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$, то $|P/\Phi(P)| = p$.

Предположим теперь, что $L$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа. Допустим, что $L$ не квазинормальна в $G$. Тогда ввиду леммы 2.6(5) $G$ имеет нормальную подгруппу $T$ такую, что $LT = G$ и $|G : T| = p$. Значит, $L \nsubseteq T$. Но поскольку $G/T$ — $p$-группа, согласно определению подгруппы $P$ имеем $L \leq P \leq T$. Это противоречие показывает, что подгруппа $L$ квазинормальна в $G$ и поэтому $L\Phi(P)/\Phi(P) = X/\Phi(P)$ квазинормальна в $G/\Phi(P)$. Теперь в силу леммы 2.7 мы можем заключить, что $|P/\Phi(P)| = p$.

**Лемма 2.9** [25, лемма 7.9]. *Пусть $P$ — нильпотентная нормальная неединичная подгруппа группы $G$. Если $P \cap \Phi(G) = 1$, то $P$ есть прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгрупп группы $G$.*

**Лемма 2.10** (см. [26, гл. III, теорема 3.5]). *Пусть $A, B$ — нормальные подгруппы группы $G$ и $A \leq \Phi(G)$. Предположим, что $A \leq B$ и $B/A$ нильпотентна. Тогда $B$ нильпотентна.*

Пусть $p$ — простое число. Группа $G$ называется *$p$-замкнутой*, если силовская $p$-подгруппа группы $G$ нормальна.

**Лемма 2.11** (см. [25, с. 34]). *Пусть $p$ — простое число. Тогда класс всех $p$-замкнутых групп образует насыщенную формацию.*

**Лемма 2.12.** *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, и $G$ — группа с нормальной подгруппой $E$ такой, что $G/E \in \mathscr{F}$. Если $E$ — циклическая подгруппа, то $G \in \mathscr{F}$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда $E$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$. Ясно, что $E \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ такая, что $G = [E]M$, и пусть $C = C_G(E)$. Тогда $M_G = C \cap M$ и поэтому $G/M_G = [EM_G/M_G](M/M_G)$ сверхразрешима, поскольку $M/M_G \simeq G/C$ — абелева группа. Следовательно, $G \simeq G/E \cap M_G \in \mathscr{F}$.

Напомним, что произведение всех нормальных квазинильпотентных подгрупп из $G$ называется *обобщенной подгруппой Фиттинга $F^*(G)$ группы $G$*.

Для удобства чтения приведем в виде леммы некоторые известные факты о таких подгруппах (см. [11, гл. X]).

**Лемма 2.13.** *Пусть $G$ — группа. Тогда*

(1) *если $N$ — нормальная подгруппа из $G$, то $F^*(N) \leq F^*(G)$;*

(2) *если $N$ нормальная подгруппа из $G$ и $N \leq F^*(G)$, то $F^*(G)/N \leq F^*(G/N)$;*

(3) *$F(G) \leq F^*(G) = F^*(F^*(G))$; если $F^*(G)$ разрешима, то $F^*(G) = F(G)$;*

(4) *$F^*(G) = F(G)E(G)$, где $E(G)$ — слой группы $G$ (см. [11, с. 128]);*

(5) $C_G(F^*(G)) \leq F(G)$.

**Лемма 2.14** (см. [16, лемма 2.3(6)]). *Пусть $P$ — нормальная подгруппа группы $G$. Тогда $F^*(G/\Phi(P)) = F^*(G)/\Phi(P)$.*

**Лемма 2.15** (см. [27, теорема 1]). *Пусть $A$ — $p'$-группа автоморфизмов $p$-группы $P$. Допустим, что для некоторого натурального числа $n$ выполняется $|P| > p^n$. Предположим, что каждая подгруппа $H$ из $P$ такая, что $|H| = p^n$, $A$-инвариантна и при $n = 1$ и $p = 2$ группа $P$ абелева. Тогда $A$ — циклическая группа.*

**Лемма 2.16.** *Пусть $G = AB$, где $A$, $B$ — нормальные подгруппы из $G$. Предположим, что $A$ $p$-группа для некоторого простого $p$ и $O_{p'}(G) = 1$. Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация и $B \in \mathscr{F}$. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F} = LF(F)$, где $F$ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathscr{F}$ (см. [25, с. 31]). Так как $B \in \mathscr{F}$, то $B/O_{p',p}(B) \in F(p)$. Поскольку $O_{p'}(B)$ — характеристическая подгруппа группы $B$, то $O_{p'}(B) \leq O_{p'}(G) = 1$ и поэтому $B/O_{p',p}(B) = B/O_p(B) \in F(p)$. Но $O_p(G) = O_p(G) \cap AB = A(O_p(G) \cap B) = AO_p(B)$ и тем самым $G/O_p(G) = AB/AO_p(B) \simeq B/B \cap AO_p(B) \in F(p)$. Отсюда следует, что $G \in \mathscr{F}$.

**Лемма 2.17.** *Пусть $G$ — группа, $p, q$ — различные простые делители порядка $|G|$, $P$ — нециклическая силовская $p$-подгруппа группы $G$ и $Q$ — силовская $q$-подгруппа группы $G$. Если все максимальные подгруппы группы $P$ (кроме, быть может, одной) имеют $q$-замкнутое добавление в $G$, то $Q$ нормальна в $G$.*

Доказательство см. в [19, с. 134].

## § 3. Доказательство теоремы 1.4

Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример, для которого $|G||E|$ минимально. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Условия теоремы справедливы для любой холловой подгруппы $X$ группы $E$ (относительно $X$) и для каждой фактор-группы $G/X$ (относительно $E/X$), где $X$ — нормальная в $G$ холлова подгруппа группы $E$.*

Пусть $X$ — холлова подгруппа группы $E$ и $P$ — нециклическая силовская подгруппа группы $X$. По условию $P$ содержит такую подгруппу $D$, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, и порядка $2|D|$ (если $P$ неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) либо имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$, либо $c$-квазинормальна в $G$. Пусть имеет место первый случай. Так как $X = X \cap HT = H(X \cap T)$, то $X \cap T$ — сверхразрешимое добавление для $H$ в $X$. Во втором случае ввиду леммы 2.6(3) $H$ — $c$-квазинормальная в $X$ подгруппа. Следовательно, условия теоремы справедливы для $X$ (относительно $X$).

Допустим, что $X$ — нормальная в $G$ подгруппа. Тогда $(G/X)/(E/X) \simeq G/E \in \mathscr{F}$. Пусть $P^*/X$ — нециклическая силовская $p$-подгруппа группы $E/X$, где $p \mid |E/X|$ и $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $P^*$ такая, что $P^* = PX$. Тогда $P$ — нециклическая силовская подгруппа группы $E$ и поэтому по условию $P$ содержит такую подгруппу $D$, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, и порядка $2|D|$ (если $P$ не абелева 2-группа и $|P : D| > 2$) либо имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$, либо $c$-квазинормальна в $G$. Пусть $H^*/X$ — подгруппа группы $P^*/X$ порядка $|H^*/X| = |D|$. Тогда $H^* = [X]H$, где $H$ — силовская $p$-подгруппа группы $H^*$.

Ясно, что $|H| = |D|$ и поэтому либо $H^*/X = HX/X$ имеет сверхразрешимое добавление $TX/X \simeq T/T \cap X$ в $G/X$, либо ввиду леммы 2.6(4) $H^*/X = HX/X$ $c$-квазинормальна в $G/X$. Следовательно, условия теоремы справедливы для $G/X$ (относительно $E/X$).

(2) *Если $X$ — неединичная нормальная холлова подгруппа группы $E$, то $X = E$.*

Так как $X$ — характеристическая подгруппа группы $E$, то она нормальна в $G$ и поэтому ввиду (1) условия теоремы справедливы для $G/X$. Значит, по выбору группы $G$ имеем $G/X \in \mathscr{F}$. Следовательно, условия теоремы справедливы для $G$ (относительно $X$), и поэтому по выбору групп $G$ и $E$ будет $X = E$.

(3) *Для наименьшего простого делителя $p$ порядка $|E|$ силовская $p$-подгруппа $P$ группы $E$ нециклическая.*

Действительно, если $P$ — циклическая подгруппа, то ввиду [26, гл. IV, теорема 2.8] $E$ — $p$-нильпотентная подгруппа, что противоречит (2).

Зафиксируем некоторую силовскую $p$-подгруппу $P$ группы $E$. Тогда ввиду (3) $P$ — нециклическая подгруппа и поэтому по условию $P$ содержит такую подгруппу $D$, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, и порядка $2|D|$ (если $P$ неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, $c$-квазинормальна в $G$.

(4) *Если $E = G$ или $E = P$, то $|D| > p$.*

Предположим, что $|D| = p$.

Прежде предположим, что $E = G$. Ввиду (2) $G$ не $p$-нильпотентна, и поэтому согласно [26, гл. IV, теорема 5.4] $G$ содержит $p$-замкнутую подгруппу Шмидта $H = [H_p]H_q$. В силу леммы 2.8 $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, но это невозможно, поскольку $p$ — наименьший простой делитель порядка группы $H$.

Пусть теперь $E = P$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$, не содержащая $E$. Тогда $G/E \simeq M/M \cap E \in \mathscr{F}$. Допустим, что $|D| = p$. Пусть $L = G^{\mathscr{F}}$ и $\Phi = \Phi(L)$. Тогда $L \leq E$ и поэтому ввиду леммы 2.8 $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 2.12 $G/\Phi \in \mathscr{F}$. Но тогда $L \leq \Phi$ и поэтому $L = \Phi$; противоречие. Следовательно, $|D| > p$.

(5) *Если $|P : D| > p$, то каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, квазинормальна в $G$. Если $P$ — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$, то каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка $|H| = 2|D|$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, квазинормальна в $G$.*

Пусть $H$ — подгруппа группы $P$ такая, что $|H| = |D|$ и $H$ не имеет сверхразрешимого добавления в $G$. Допустим, что $H$ не является квазинормальной в $G$ подгруппой. Тогда ввиду леммы 2.6(5) $G$ содержит такую нормальную подгруппу $M$, что $HM = G$ и $|G : M| = p$. Поскольку класс $\mathscr{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений, то $G/E \cap M \in \mathscr{F}$. Так как $|P : D| > p$, то в силу леммы 2.6 условия теоремы выполняются для $G$ (относительно $E \cap M$). Но $|G||E \cap M| < |G||E|$, что противоречит выбору группы $G$ и нормальной подгруппы $E$. Следовательно, каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, которая не имеет сверхразрешимого добавления, квазинормальна в $G$. Аналогично можно доказать, что если $P$ — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$, то каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка $|H| = 2|D|$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, квазинормальна в $G$.

(6) *Для каждой абелевой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы*

*$G$, содержащейся в $P$, будет $|N| \leq |D|$.*

Предположим, что $|D| < |N|$. Если некоторая подгруппа $H$ группы $N$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$, то $TN = G$ и $T \neq G$ по выбору группы $G$. Так как $N = N \cap HT = H(N \cap T)$, то $N \cap T$ — собственная неединичная подгруппа группы $N$. Но тогда $N \cap T$ — нормальная подгруппа в $G$, что противоречит минимальности $N$. Значит, каждая подгруппа $H$ группы $N$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, $c$-квазинормальна в $G$ и поэтому ввиду леммы 2.7 некоторая максимальная подгруппа группы $N$ нормальна в $G$; противоречие. Следовательно, полученное противоречие доказывает (6).

(7) *Если $E = G$ или $E = P$ и $N$ — абелева минимальная нормальная подгруппа группы $G$, которая содержится в $P$, то условия теоремы справедливы для $G/N \in \mathscr{F}$ (относительно $E/N$).*

Пусть $E = P$. Пусть $p > 2$ или $|P : D| = p$, или $|N| < |D|$. Так как $(G/N)/(E/N) \simeq G/E$, ясно, что условия теоремы справедливы для $G/N$ (относительно $E/N$). Поскольку согласно (6) имеем $|N| \leq |D|$, осталось рассмотреть только случай, когда $P$ — 2-группа, $|P : N| > 2$ и $|N| = |D|$. Ввиду (5) каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, квазинормальна в $G$. Согласно (4) $N$ нециклична и поэтому каждая подгруппа группы $G$, содержащая $N$, нециклична. Пусть $N \leq K \leq P$, где $|K : N| = 2$. Поскольку $K$ — нециклическая группа, она имеет максимальную подгруппу $L \neq N$. Если подгруппа $N$ или подгруппа $L$ имеют сверхразрешимое добавление в $G$, то $K$ имеет сверхразрешимое добавление в $G$. Если подгруппы $N$ и $L$ квазинормальны в $G$, то $K = LN$ квазинормальна в $G$. Если $P/N$ абелева, то условия теоремы справедливы для $G/N$. Предположим теперь, что $P/N$ неабелева. Тогда $P$ неабелева и поэтому ввиду (5) каждая подгруппа группы $P$ порядка $2|D|$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, квазинормальна в $G$. Рассуждая, как выше, можно показать, что каждая подгруппа $X$ группы $P$, которая содержит $N$ и для которой $|X : N| = 4$, либо имеет сверхразрешимое добавление в $G$, либо нормальна в $G$. Значит, условия теоремы справедливы для $G/N$ (относительно $E/N$). Аналогично можно показать, что это утверждение справедливо, если $G = E$.

(8) *Если $E = G$, то по крайней мере одна из максимальных подгруппы группы $P$ не имеет сверхразрешимого добавления в $G$* (это вытекает непосредственно из (2) и леммы 2.17).

(9) *$E$ — разрешимая группа.*

Согласно (1) и выбору группы $G$ если $E \neq G$, то утверждение (9) выполнено. Пусть $E = G$. Ввиду (7) нам только нужно показать, что $P_G \neq 1$.

Допустим, что $|P : D| = p$. Ввиду (8) по крайней мере одна из максимальных подгрупп группы $P$ не имеет сверхразрешимого добавления в $G$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа из $P$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$. Тогда по условию $M$ имеет добавление $T$ в $G$, которое является квазинормальной в $G$ подгруппой. Предположим, что $M \cap T = 1$. Тогда порядок силовской $p$-подгруппы группы $T$ равен $p$ и поэтому по лемме 2.6 условия теоремы справедливы для $T$ (относительно $T$). Следовательно, $T$ сверхразрешима. Согласно лемме 2.3 для некоторой нормальной разрешимой подгруппы $R$ группы $G$ имеем $T \leq R$. Так как $G/R$ — $p$-группа, то $G$ разрешима. Значит, $M \cap T \neq 1$. Следовательно, ввиду лемм 2.4 и 2.3 $M \cap T \leq O_p(G)$, и поэтому

$P_G \neq 1$.

Пусть теперь $|P : D| > p$. Согласно (5) каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, квазинормальна в $G$. Ввиду леммы 2.4 мы можем предположить, что каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, имеет сверхразрешимое добавление в $G$ и поэтому каждая максимальная подгруппа группы $P$ имеет сверхразрешимое добавление в $G$, что противоречит (8). Полученное противоречие доказывает (9).

(10) *$E$ — $q$-замкнутая группа, где $q$ — наибольший простой делитель порядка $|E|$.*

Если $E \neq G$, то согласно (1) утверждение (10) выполнено. Пусть теперь $E = G$. Так как ввиду (9) $E$ разрешима и в силу (1) условия теоремы справедливы для каждой холловой подгруппы $H$ группы $G$ (относительно $H$), то мы можем предположить, что $|G| = p^a q^b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{N}$. Допустим, что $G$ не $q$-замкнутая группа. Ввиду (7) и выбора группы $G$ для каждой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$, содержащейся в $P$, фактор-группа $G/N$ сверхразрешима. Следовательно, согласно лемме 2.11 $N \not\subseteq \Phi(G)$ и $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $P$. Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно, пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ такая, что $G = [N]M$. Тогда $O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M)$. Поскольку $O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$, то $O_p(G) \cap M$ нормальна в $G$ и поэтому $O_p(G) \cap M = 1$. Значит, $N = O_p(G)$.

Допустим, что $|P : D| = p$. Так как для каждой максимальной подгруппы $A$ группы $P$, которая содержит $N$, мы имеем $AM = G$, то $M \simeq G/N$ — сверхразрешимое добавление для $A$ в $G$. Значит, ввиду (8) некоторая максимальная подгруппа $V$ группы $P$, не содержащая $N$, не имеет сверхразрешимого добавления в $G$. Следовательно, по условию $V$ $c$-квазинормальна в $G$. Пусть $T$ — подгруппа группы $G$ такая, что $VT = G$ и $T \cap V$, $T$ — квазинормальные в $G$ подгруппы. Допустим, что $T \cap V = 1$. Тогда $|T| = pq^b$ и по лемме 2.6 условия теоремы справедливы для $T$ (относительно $T$) и поэтому $T$ сверхразрешима, что противоречит выбору подгруппы $V$. Следовательно, $T \cap V \neq 1$. Согласно леммам 2.3, 2.4 $T \cap V \leq O_p(G) = N$ и тем самым $T \cap V \leq N \cap V$.

Допустим, что $N \leq T$. Тогда $T \cap V \leq N \cap V \leq T \cap V$ и поэтому $T \cap V = N \cap V$. Ясно, что $N \cap V$ — нормальная в $P$ подгруппа. С другой стороны, $N \cap V$ квазинормальна в $G$ и поэтому для некоторой силовской $q$-подгруппы $Q$ группы $G$ имеем $Q \leq N_G(T \cap V)$. Это означает, что $T \cap V$ — неединичная нормальная в $G$ подгруппа группы $P$. Тем самым $N \leq T \cap V \leq V$; противоречие. Следовательно, $N \not\leq T$. Так как $T$ субнормальна в $G$, все силовские $q$-подгруппы группы $G$ содержатся в $T$. Поэтому $G/T_G$ — $p$-группа. Следовательно, $G \simeq G/N \cap T_G$ — $q$-замкнутая группа; противоречие.

Значит, $|P : D| > p$. Тогда ввиду (5) каждая подгруппа $H$ группы $P$, для которой $|H| = |D|$ и которая не имеет сверхразрешимого добавления в $G$, квазинормальна в $G$. Так как каждая квазинормальная подгруппа группы $G$ содержится в $O_p(G) = N$, то любая отличная от $N$ подгруппа $H$ группы $P$ такая, что $|H| = |D|$, имеет сверхразрешимое добавление в $G$. Следовательно, каждая максимальная подгруппа группы $P$ имеет сверхразрешимое добавление в $G$, что противоречит (8). Полученное противоречие доказывает (10).

(11) $E = P$.

Действительно, пусть $q$ — наибольший простой делитель порядка $|E|$ и $Q$ —

силовская $q$-подгруппа группы $E$. Тогда ввиду (10) $Q$ нормальна в $E$ и поэтому согласно (2) $Q = E = P$

*Заключительное противоречие.*

Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $P$. Тогда ввиду (7) и (11) $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, которая содержится в $P$, поэтому $N = O_p(G) = P$, что невозможно в силу (6). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

## § 4. Доказательство теоремы 1.3

Предположим, что эта теорема не верна, и рассмотрим контрпример, для которого $|G||E|$ минимально.

Пусть $F = F(E)$ и $F^* = F^*(E)$. Пусть $p$ — простой делитель порядка $|F|$. Если $E$ разрешима, то предположим, что $p$ — наименьший простой делитель порядка $|F|$. Если $E$ неразрешима, то предположим, что $p$ — наибольший простой делитель $|F|$. Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа из $F$, $P_0 = \Omega_1(P)$ и $C = C_G(P_0)$. Очевидно, что $C$ нормальна в $G$.

(1) *$F^* = F \neq E$ и $C_G(F) = C_G(F^*) \leq F$.*

Ввиду леммы 2.6(3) условие теоремы выполняется для $F^*$ (относительно $F^*$), поэтому по теореме 1.4 $F^*$ сверхразрешима. Значит, ввиду леммы 2.13(3) $F^* = F$. Если $F = E$, то по теореме 1.4 $G \in \mathscr{F}$, что противоречит выбору группы $G$. Следовательно, $F^* = F \neq E$. В силу леммы 2.13(5) $C_G(F) = C_G(F^*) \leq F$.

(2) *Каждая собственная нормальная подгруппа $X$ из $G$ такая, что $F \leq X \leq E$, сверхразрешима.*

Ввиду леммы 2.13(1) $F^*(X) \leq F^* = F \leq X$ и поэтому $F^*(X) = F^*$. Значит, условия теоремы выполняются для $X$ (относительно $X$), и тем самым по выбору группы $G$ группа $X$ сверхразрешима.

(3) *Если $E \neq G$, то $E$ сверхразрешима* (это следует из (2)).

(4) *Предположим, что $E$ — разрешимая группа. Пусть $V/P = F(E/P)$ и $Q$ — силовская $q$-подгруппа группы $V$, где $q$ делит $|V/P|$. Тогда $q \neq p$ и либо $Q \leq F$, либо $p > q$ и $C_Q(P) = 1$.*

Так как $V/P$ нильпотентна и $QP/P$ — силовская $q$-подгруппа группы $V/P$, то $QP/P$ — характеристическая подгруппа в $V/P$ и поэтому $QP$ нормальна в $E$. Следовательно, $q \neq p$. Согласно теореме 1.4 $QP$ сверхразрешима. Предположим, что $q > p$. Тогда $Q$ — нормальная подгруппа в $QP$ и поэтому $Q \leq F$. Пусть теперь $p > q$. Тогда $p > 2$ и так как $p$ — наименьший простой делитель порядка $|F|$, то $F$ — $q'$-подгруппа. Пусть $U$ — силовская $r$-подгруппа группы $F$, где $r \neq p$. Тогда $r \neq q$ и поэтому $[U, Q] \leq P$. Предположим, что для некоторого $x \in Q$ имеем $x \in C_E(P)$. Тогда ввиду [28, гл. 5, теорема 3.6] и нильпотентности $V/P$ имеем $[U, \langle x\rangle] = [U, \langle x\rangle, \langle x\rangle] = 1$, поэтому $x \in C_G(F)$. Так как $E$ — разрешимая группа, имеем $C_E(F) \leq F$. Значит, $C_Q(P) = 1$.

(5) *$p > 2$.*

Допустим, что $p = 2$. Предположим, что $E$ разрешима. Ввиду (4) $F/P = F(E/P)$. С другой стороны, с учетом (1) и леммы 2.13(3) $F^*(E/P) = F(E/P) = F^*/P$. Так как $G/E \simeq (G/P)/(E/P) \in \mathscr{F}$, по лемме 2.6 условия теоремы выполняются для $G/P$ (относительно $E/P$). Следовательно, $G/P \in \mathscr{F}$, поэтому по теореме 1.4 $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие с выбором группы $G$ показывает, что $E$ неразрешима. Значит, $p$ — наибольший простой делитель $|F|$, поэтому ввиду (1) $F^* = F$ — 2-группа. Пусть $Q$ — подгруппа простого порядка $q$ группы $E$, где $q \neq 2$, и пусть $X = FQ$. В силу теоремы 1.4 $X$ сверхразрешима и тем самым $Q$ нормальна в $X$. Значит, $Q \leq C_E(F)$. Но ввиду (1) $C_E(F) = C_E(F^*) \leq F$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает (5).

(6) *Каждая подгруппа группы $P$ не имеет сверхразрешимого добавления в $G$.*

Пусть $H$ — подгруппа группы $P$ такая, что $G = HT$ и $T$ сверхразрешима. Тогда $G/P \simeq T/T \cap P$ сверхразрешима и поэтому по теореме 3.1 $G \in \mathscr{F}$; противоречие.

(7) *Некоторая минимальная подгруппа группы $P$ не является квазинормальной в $G$.*

Допустим, что каждая минимальная подгруппа из $P$ квазинормальна в $G$. Предположим, что $E$ разрешима. Пусть $V/P = F(E/P)$ и $Q$ — силовская $q$-подгруппа из $V$, где $q$ делит $|V/P|$. Значит, ввиду (4) либо $Q \leq F$, либо $C_Q(P) = 1$. Во втором случае по лемме 2.15 и (5) $Q$ — циклическая группа. Ввиду леммы 2.6(4) условия теоремы выполняются для $G/P$ и поэтому $G/P \in \mathscr{F}$ по выбору группы $G$. Но тогда по теореме 1.4 $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие показывает, что $E$ неразрешима. Значит, ввиду (3) $E = G$. Покажем, что каждая минимальная подгруппа $L$ из $P$ нормальна в $G$. Докажем сначала, что $O^p(G) = G$. Действительно, предположим, что $O^p(G) \neq G$. Согласно лемме 2.13(1) $F^*(O^p(G)) \leq F^*$. Тогда $F^*(O^p(G)) = F^* \cap O^p(G) = F \cap O^p(G)$ и поэтому ввиду (5) и леммы 2.6 условия теоремы справедливы для $O^p(G)$ (относительно $O^p(G)$). Следовательно, $O^p(G)$ сверхразрешима по выбору группы $G$. Но тогда $G$ разрешима и поэтому $E$ разрешима; противоречие. Значит, $O^p(G) = G$. Так как $L$ квазинормальна в $G$, по лемме 2.5 $G = O^p(G) \leq N_G(L)$. Следовательно, каждая минимальная подгруппа из $P$ нормальна в $G$ и поэтому $P_0 \leq Z(F)$. Покажем теперь, что условия теоремы справедливы для $G/P_0$ (относительно $C_E/P_0$, где $C_E = C \cap E$). Действительно, по лемме 2.1 $G/C$ сверхразрешима. Поскольку $G/E \in \mathscr{F}$, по условию $(G/P_0)/(C_E/P_0) \simeq G/C_E \in \mathscr{F}$. Ясно, что $F^* = F \leq F^*(C_E)$ и поэтому по лемме 2.13(1) $F^*(C_E) \leq F^*$. Тогда $F^*(C_E) = F^*$. Так как $P_0 \leq Z(C_E)$, согласно теореме 13.6 из [11] $F^*(C_E/P_0) = F^*/P_0 = F/P_0$. Ввиду (5), лемм 2.2 и 2.6 видим, что условия теоремы справедливы для $G/P_0$ и тем самым по выбору группы $G$ будет $G/P_0 \in \mathscr{F}$. Но $P_0 \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$ и поэтому по лемме 2.12 $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство (7).

(8) *$P$ — нециклическая подгруппа* (это следует из (6) и (7)).

Ввиду (8) $P$ не является циклической подгруппой и поэтому согласно условию и (6) $P$ содержит такую подгруппу $D$, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа $H$ из $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, $c$-квазинормальна в $G$.

(9) $|D| > p$.

Предположим, что $|D| = p$. Ввиду (7) $P$ содержит подгруппу $H$ такую, что $|H| = p$ и $H$ не квазинормальна в $G$. Согласно (6) и лемме 2.6(5) подгруппа $H$ имеет нормальное добавление $T$ в $G$. Тогда условия теоремы справедливы для $G$ (относительно $V = T \cap E$). Действительно, $G/V \in \mathscr{F}$ и $F(V) \leq F(E)$. Так как $|G : T| = p$, каждая силовская $q$-подгруппа группы $F$, где $q \neq p$, содержится в $T$. Следовательно, ввиду леммы 2.6 условия теоремы справедливы для $G$ (относительно $V$). Но поскольку $T$ — собственная подгруппа группы $G$ и $ET = G$, то $|V| < |E|$, что противоречит выбору группы $G$ и нормальной подгруппы $E$. Полученное противоречие завершает доказательство (9).

(10) *Если $L$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$ и $L \leq P$, то*

$|L| > p$.

Предположим, что $|L| = p$. Пусть $C_0 = C_E(L)$. Тогда условия теоремы справедливы для $G/L$ (относительно $C_0/L$). Действительно, $G/C_0 = G/E \cap C_G(L) \in \mathscr{F}$. Поскольку $L \leq Z(C_0)$ и $L \leq Z(F)$, то $F(C_0/L) = F/L$. Если $H/L$ — подгруппа группы $G/L$ такая, что $|H| = |D|$, то ввиду (9) $1 < |H/L| < |P/L|$. Поскольку согласно лемме 2.6 $H/L$ $c$-квазинормальна в $G/L$, то по лемме 2.6(4) и (5) условия теоремы справедливы для $G/L$ и поэтому $G/L \in \mathscr{F}$. Следовательно, в силу леммы 2.12 $G \in \mathscr{F}$, что противоречит выбору группы $G$.

(11) $\Phi(G) \cap P \neq 1$, *и если $L$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, которая содержится в $\Phi(G) \cap P$, то $(E/L) \neq F/L$.*

Допустим, что $\Phi(G) \cap P = 1$. Тогда ввиду леммы 2.9 $P$ — прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгруппы группы $G$. Покажем, что $P$ содержит максимальную подгруппу $M$, которая нормальна в $G$. Действительно, если каждая подгруппа $H$ группы $G$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, квазинормальна в $G$, то это следует из леммы 2.7. Допустим, что некоторая подгруппа $H$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, не является квазинормальной в $G$ подгруппой. Тогда ввиду (6) и леммы 2.6(5) $G$ содержит нормальную максимальную подгруппу $T$ такую, что $PT = G$. Тогда главный фактор $P/P \cap T$ группы $G$ имеет простой порядок и поэтому $P \cap T$ — максимальная в $P$ подгруппа. Ввиду [29, гл. A, теорема 9.13] для некоторой минимальной нормальной подгруппы $L$ группы $G$, которая содержится в $P$, имеем $|P| = p$, что противоречит (10). Следовательно, $\Phi(G) \cap P \neq 1$. Пусть $L \leq \Phi(G) \cap P$, где $L$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Предположим, что $F(E/L) = F/L$. Покажем, что условия теоремы справедливы для $G/L$ (относительно $E/L$). Поскольку согласно лемме 2.7 $|L| \leq |D|$, условия теоремы справедливы для $G/L$ в случае, когда $|P : D| = p$. Если $|L| < |D|$, то ввиду (5) условия теоремы также справедливы для $G/L$. Пусть теперь $|P : D| > p$ и $|L| = |D|$. Согласно (10) $L$ нециклична и поэтому каждая подгруппа группы $G$, содержащая $L$, нециклична. Пусть $L \leq K$, $M \leq K$, где $M \neq L$ и $L, M$ — максимальные подгруппы группы $K$. Покажем, что $K$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа. Это очевидно, если $M$ квазинормальна в $G$. Пусть теперь $M$ не является квазинормальной в $G$ подгруппой. Согласно лемме 2.6(5) $G$ имеет такую нормальную подгруппу $S$, что $MS = G = KS$ и $|G : S| = p$. Так как $L \leq \Phi(G)$, то $L \leq S$ и поэтому $S \cap K = L$. Значит, $K$ — $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа. Следовательно, условия теоремы справедливы для $G/L$ и поэтому $G/L \in \mathscr{F}$ по выбору группы $G$. Но так как $L \leq \Phi(G)$ и по условию $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, то $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие с выбором группы $G$ показывает, что $F(E/L) \neq F/L$.

(12) $E = G$ — *неразрешимая группа.*

Предположим, что $E$ — разрешимая группа. Пусть $L$ — минимальная нормальная подгруппа из $G$, содержащаяся в $\Phi(G) \cap P$. Тогда по лемме 2.10 $F/L = F(E/L)$. С другой стороны, по лемме 2.13(3) $F^*(E/L) = F(E/L)$. Значит, в силу (1) $F^*(E/L) = F(E/L) = F^*/L$, что противоречит (11). Следовательно, $E$ — неразрешимая группа, поэтому ввиду (3) $E = G$.

(13) *$G$ имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $M$, которая содержит $F$, $M$ сверхразрешима и $G/M$ — простая неабелева группа* (это вытекает из (2) и (12)).

(14) *$G/F$ — простая неабелева группа, и если $L$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, которая содержится в $\Phi(G) \cap P$, то $G/L$ — квазинильпо-*

*тентная группа.*

Пусть $L$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $\Phi(G) \cap P$. Тогда ввиду (11) $F^*(E/L) \neq F^*/L$. Следовательно, в силу леммы 2.13(2) $F/L = F^*/L$ — собственная подгруппа из $F^*(G/L)$. Согласно лемме 2.13(4) $F^*(G/L) = F(G/L)E(G/L)$, где $E(G/L)$ — слой группы $G/L$. Ввиду (13) каждый главный ряд группы $G$ имеет только один неабелев фактор. Но $E(G/L)/Z(E(G/L))$ — прямое произведение простых неабелевых групп. Так как ввиду леммы 2.10 $F(G/L) = F/L$, то $F^*(G/L) = G/L$ — квазинильпотентная группа. Ясно, что $F(G/L) = F/L$ и $G/F \simeq (G/L)/(F/L)$ — простая неабелева группа.

(15) $F^* = P$.

Предположим, что $P \neq F$, и пусть $Q$ — силовская $q$-подгруппа группы $F$, где $q \neq p$. Ввиду (14) $Q \leq Z_\infty(G)$. Значит, по теореме 13.6 из [11] $F^*(G/Q) = F^*/Q$, поэтому по лемме 2.6 условия теоремы справедливы для $G/Q$ (относительно $G/Q$) и тем самым по выбору группы $G$ группа $G/Q$ сверхразрешима. Это влечет разрешимость группы $G$, что противоречит (12). Этим доказано (15).

(16) $\Phi(P) = 1$.

Допустим, что $\Phi(P) \neq 1$. Пусть $L$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, которая содержится в $\Phi(P)$. Тогда ввиду (14) $G/L$ квазинильпотентна и поэтому по лемме 2.14 $G$ квазинильпотентна. Но тогда $F = F^* = G$. Полученное противоречие доказывает (16).

(17) *Если $H$ — нормальная подгруппа группы $P$ и $H$ квазинормальна в $G$, то $H$ нормальна в $G$.*

Действительно, ввиду (14) и (15) $PO^p(G) = G$, поэтому по лемме 2.5 $H$ нормальна в $G$.

(18) $|P : D| > p$.

Допустим, что $|P : D| = p$. Ввиду (11) $\Phi(G) \cap P \neq 1$. Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа из $G$, которая содержится в $\Phi(G) \cap P$. Согласно (16) для некоторой максимальной подгруппы $V$ из $P$ имеем $P = NV$. Допустим, что $V$ квазинормальна в $G$. Так как $V$ — максимальная в $P$ подгруппа, то ввиду (17) $V$ нормальна в $G$. Но по (10) $|N| > p$ и поэтому $N \neq N \cap V \neq 1$, что противоречит минимальности $N$. Значит, $V$ не является квазинормальной в $G$ подгруппой. Поскольку ввиду (6) и условия теоремы $V$ $c$-квазинормальна в $G$, то $G$ имеет квазинормальную подгруппу $T$ такую, что $T \cap V$ квазинормальна в $G$. Допустим, что $N \leq T$. Ясно, что $N \cap V$ нормальна в $P$. Покажем, что подгруппа $N \cap V$ квазинормальна в $G$. Для этого необходимо установить, что подгруппа $N \cap V$ перестановочна с каждой циклической $q$-подгруппой группы $G$, где $q$ — произвольный простой делитель порядка группы $G$. Пусть $\langle x \rangle$ — произвольная циклическая $q$-подгруппа группы $G$. Если $q = p$, то $\langle x \rangle \leq P$ и поэтому $(N \cap V)\langle x \rangle = \langle x \rangle (N \cap V)$. Пусть теперь $q \neq p$, и пусть $X = (T \cap V)\langle x \rangle$ и $X_p$ — силовская $p$-подгруппа из $X$. Ввиду леммы 2.5 $X_p \leq T \cap V$. Тогда $X = (T \cap V)\langle x \rangle \cap N\langle x \rangle = (N \cap V)\langle x \rangle$ — подгруппа группы $G$. Следовательно, $N \cap V$ — квазинормальная в $G$ подгруппа, и поэтому ввиду (17) $N \cap V$ нормальна в $G$. Но $N \cap V \neq 1$, что противоречит минимальности $N$. Тем самым $N \not\subseteq T$, и поэтому $N \cap T_G = 1$. Так как $G = TV$, то $G/T_G$ — $p$-группа. Согласно (14) $G \simeq G/N \cap T_G$ квазинильпотентна, что противоречит (1). Следовательно, (18) доказано.

(19) $O_{p'}(G) = 1$.

Действительно, допустим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда ввиду (13) $G = O_{p'}(G)P = O_{p'}(G) \times P = F^* = F$; противоречие.

(20) $O^p(G) = G$.

Допустим, что $O^p(G) \neq G$. Тогда $G$ имеет нормальную подгруппу $T$ такую, что $|G : T| = p$. Покажем, что условия теоремы справедливы для $T$. Ясно, что $F \cap T \leq F^*(T)$. Ввиду (14) $T/F \cap T$ — простая неабелева группа. Следовательно, если $F \cap T \neq F^*(T)$, то $F^*(T) = T$ и поэтому $G = TF = F^* = F$ нильпотентна; противоречие. Значит, $F \cap T = F^*(T)$, и в силу (18) условия теоремы справедливы для $T$. Отсюда $T \in \mathscr{F}$. Значит, по лемме 2.16 и ввиду (19) $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие доказывает (20).

(21) *Каждая подгруппа $H$ из $P$, порядка, равного порядку подгруппы $D$, нормальна в $G$.*

Покажем, что каждая подгруппа $H$ группы $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, квазинормальна в $G$. Допустим, что некоторая подгруппа $H$ из $P$ порядка, равного порядку подгруппы $D$, не является квазинормальной в $G$. Тогда по лемме 2.6(5) $G$ имеет нормальную подгруппу $T$ такую, что $TH = G$ и $|G : T| = p$. Но тогда $O^p(G) \neq G$, что противоречит (2). Следовательно, каждая подгруппа $H$ из $P$ такая, что $|H| = |D|$, квазинормальна в $G$. Ввиду (20) и леммы 2.5 имеем (21).

*Заключительное противоречие.*

Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа из $G$ такая, что $N \leq P$. Ввиду (16) для некоторой максимальной подгруппы $M$ из $P$ имеем $P = NM$. Пусть $H$ — подгруппа группы $P$ такая, что $H \leq M$ и $|H| = |D|$. Тогда в силу (21) $H$ нормальна в $G$ и, очевидно, $N \not\subseteq H$. Значит, $N \cap H = 1$, поэтому $G$ имеет минимальную нормальную подгруппу $L \neq N$ такую, что $L \leq P$. Ввиду (14) по крайней мере одна из подгрупп $N$, $L$ имеет простой порядок, что невозможно в силу (10). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания, в частности, за предложенный термин «$c$-квазинормальная подгруппа».

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5, N 2. P. 431–460.
**2.** *Ito N., Szép J.* Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. V. 23. P. 168–170.
**3.** *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Bd 82, N 2. S. 125–132.
**4.** *Thompson J. G.* An example of core-free quasinormal subgroups of $p$-groups // Math. Z. 1967. Bd 96. N 2. S. 226–227.
**5.** *Stonehewer S. E.* Permutable subgroups in infinite groups // Math. Z. 1972. Bd 125, N 1. S. 1–16.
**6.** *Maier R., Schmid P.* The embedding of permutable subgroups in finite groups // Math. Z. 1973. Bd 131, N 3. S. 269–272.
**7.** *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 207, N 1. P. 285–293.
**8.** *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups // De Gruyter expositions in mathematics. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994. V. 14. P. 475.
**9.** *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois Math. J. 1957. V. 1, N 1. P. 115–187.
**10.** *Wang Y.* c-Normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180, N 2. P. 954–965.
**11.** *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.

**12.** *Buckley J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. Bd 116, N 1. S. 15–17.
**13.** *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35, N 3. P. 210–214.
**14.** *Ramadan M.* Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group // Acta Math. Hungar. 1992. V. 59, N 1–2. P. 107–110.
**15.** *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* On minimal subgroups of finite groups // Acta Math. Hungar. 1996. V. 73, N 4. P. 335–342.
**16.** *Li D., Guo X.* The influence of $c$-normality of subgroups on the structure of finite groups. II // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 5. P. 1913–1922.
**17.** *Ballester-Bolinches A., Wang Y.* Finite groups with $c$-normal minimal subgroups // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 153, N 2. P. 121–127.
**18.** *Wei H.* On $c$-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 5. P. 2193–2200.
**19.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* $G$-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. 2003. V. 138, N 1. P. 125–138.
**20.** *Wei H., Wang Y., Li Y.* On $c$-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. II // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 10. P. 4807–8411.
**21.** *Веньбинь Го, Шам К. П., Скиба А. Н.* $G$-накрывающие системы подгрупп для классов $p$-сверхразрешимых и $p$-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 527–539.
**22.** *Alsheik Ahmad A.* Finite groups with given $c$-permutable subgroups // Algebra Discrete Math. 2004. N 2. P. 9–16.
**23.** *Skiba A. N.* A note on $c$-normal subgroups of finite groups // Algebra Discrete Math. 2005. N 3. P. 85–95.
**24.** *Miao L., Guo W.* Finite groups with some primary subgroups $\mathscr{F}$-$s$-supplemented // Comm. Algebra. 2005. V. 33, N 8. P. 2789–2800.
**25.** *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
**26.** *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
**27.** *Сергиенко В. И.* Критерий $p$-разрешимости для конечных групп // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 4. С. 375–383.
**28.** *Gorenstein D.* Finite groups. New York; Evanston; London: Harper and Row, 1968.
**29.** *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

*Статья поступила 22 июня 2006 г., окончательный вариант — 4 февраля 2007 г.*

*Скиба Александр Николаевич*
*Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,*
*Гомель 246019, Беларусь*
Skiba@gsu.unibel.by

*Титов Олег Владимирович*
*Белорусский гос. университет транспорта, электротехнический факультет,*
*Гомель 246653, Беларусь*
O.Titov@tut.by