Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2008. Том 16. № 1. С. 13–17

УДК 512.542

О p-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н. В. Гуцко, А. Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины
e-mail: skiba@gsu.unibel.by
Поступила 03.01.2008

Посвящается семидесятилетию со дня рождения Л.А. Шеметкова

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Напомним, что подгруппа H группы G называется s-перестановочной в G, если $HP = PH$ для всех силовских подгрупп P из G. Подгруппа H группы G называется слабо s-перестановочной в G [1], если G имеет такую субнормальную подгруппу T, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_{sG}$, где H_{sG} — подгруппа, порожденная всеми s-перестановочными в G подгруппами из H.

Группа G называется p-сверхразрешимой, если каждый ее главный фактор является либо p'-группой, либо группой порядка p. Группа называется сверхразрешимой, если все ее главные факторы имеют простые порядки. Для сверхразрешимых и p-нильпотентных групп получено большое число их описаний, значительная часть из которых приведена в книге [2] (см. также работы [1, 3–5]). В то же время p-сверхразрешимые группы остаются мало изученными и в настоящее время. Нами доказаны две теоремы в данном направлении.

Теорема 1. *Пусть N — нормальная разрешимая подгруппа группы G с p-сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N, не являющаяся слабо s-перестановочной в G, имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то G p-сверхразрешима.*

Теорема 2. *Пусть N — p-разрешимая нормальная подгруппа группы G с p-сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N, не являющаяся s-перестановочной в G, имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то G p-сверхразрешима.*

Следствие 1. *p-Разрешимая группа G является p-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G имеет p-сверхразрешимое добаление в G.*

Следствие 2. *p-Разрешимая группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G имеет p-нильпотентное добавление в G.*

Доказательство теоремы 1. Предположим, что теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *p делит $|N|$ и каждая силовская p-подгруппа группы N не является минимальной нормальной подгруппой в G.*

Если N — p'-группа, то из p-сверхразрешимости факторгруппы G/N, следует p-сверхразрешимость группы G, что противоречит выбору G. Значит, p делит $|N|$. Пусть P —

некоторая силовская p-подгруппа в N. Предположим, что P — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда P — элементарная группа. Прежде предположим, что каждая максимальная в P подгруппа является слабо s-перестановочной в G. Понятно, что $|P| > p$. Следовательно, если E — максимальная в P подгруппа, то $N_G(E) \neq G$. Пусть T — такая субнормальная в G подгруппа, что $ET = G$ и $T \cap E \leq E_{sG}$. Если $T \neq G$, то из $PT = G$ получаем $G = [P]T$. Следовательно, $|P| = |G : T| \leq |E| < |P|$. Полученное противоречие показывает, что $T = G$ и поэтому $E = T \cap E \leq E_{sG} = E$. Следовательно, каждая максимальная подгруппа E из P является s-перестановочной в G. Но тогда $O^p(G) \leq N_G(E) \neq G$. Следовательно, число всех максимальных подгрупп группы P делится на p, что противоречит [7, III, теорема 8.5 (d)]. Полученное противоречие показывает, что некоторая максимальная подгруппа E группы P не является слабо s-перестановочной в G. Значит, по условию в G имеется p-сверхразрешимое добавление T к E. Но $TE = G$ p-сверхразрешимой группой не является. Значит, $T \neq G$ и поэтому как выше имеем $|G : T| = |R| = |E|$, противоречие. Этим доказано утверждение (1).

(2) *Для любой минимальной нормальной в G подгруппы R, содержащейся в N, факторгруппа G/R p-сверхразрешима.*

Ввиду (1) и разрешимости группы N имеем $R \neq N$ и поэтому RN/R — неединичная нормальная разрешимая подгруппа в G/R такая, что факторгруппа $(G/R)/(RN/R) \simeq G/RN \simeq$ $\simeq (G/N)/(RN/N)$ является p-сверхразрешимой.

Пусть P/R — силовская q-подгруппа в N/R, q делит $|N/R|$, и P_1/R — произвольная максимальная в P/R подгруппа. Если P_0 — силовская q-подгруппа в P, то $P = RP_0$ и P_0 является силовской q-подгруппой в N. Покажем, что $P_1 \cap P_0$ — максимальная в P_0 подгруппа. Прежде заметим, что $P_1 \cap P_0 \neq P_0$. Действительно, в противном случае $P_0 \leq P_1$, а значит, $P_1/R = RP_0/R = P/R$, что противоречит выбору подгруппы P_1/R. Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что $P_1 \cap P_0 < T < P_0$. Тогда $P_1 = R(P_1 \cap P_0) \leq TR \leq RP_0 = P$. Но P_1 — максимальная в P подгруппа и поэтому либо $P_1 = TR$, либо $TR = RP_0$. Если $P_1 = TR$, то $T \leq P_1 \cap P_0 < T$, что невозможно. Итак, $TR = RP_0$ и поэтому $P_0 = P_0 \cap TR = T(P_0 \cap R) \leq T(P_1 \cap P_0) = T$. Вновь полученное противоречие показывает, что $P_1 \cap P_0$ — максимальная в P_0 подгруппа. Согласно условию, либо подгруппа $P_1 \cap P_0$ является слабо s-перестановочной подгруппой в G, либо $P_1 \cap P_0$ имеет p-сверхразрешимое добавление T в G. В первом случае, подгруппа $P_1/R = (P_1 \cap P_0)R/R$ является слабо s-перестановочной в G/R по лемме 2.10 (2, 4) из [1]. Во втором случае, $TR/R \simeq T/R \cap T$ является p-сверхразрешимым добавлением к P_1/R в G/R. Это показывает, что условие теоремы выполняется и для факторгруппы G/R. Следовательно, по выбору группы G мы заключаем, что G/R — p-сверхразрешимая группа.

(3) *Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $R = C_N(R) =$ $= O_p(N)$, содержащуюся в N, и $G = [R]M$, где M — такая p-сверхразрешимая максимальная в G подгруппа, что $p||M|$ и $O_p(M/M \cap C_G(R)) = 1$.*

Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G и $R \leq N$. Тогда, согласно (2), факторгруппа G/R является p-сверхразрешимой. Так как класс всех p-сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию [7, с. 35], то R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G такая, что $R \leq N$. Кроме того, $R \nleq \Phi(G)$ и R является p-группой. Понятно также, что $|R| \neq |p|$. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $R \nleq M$. Тогда $G = [R]M$ и $C = C_G(R) = [R](C \cap M)$. Ясно, что $C \cap M \trianglelefteq G$ и поэтому $C_N(R) = N \cap [R](C \cap M) = [R](N \cap C \cap M)$, где $N \cap C \cap M$ — нормальная в G подгруппа. Но тогда $N \cap C \cap M = 1$, т.е. $R = C_N(R)$. А поскольку, согласно [6, I, теорема 4.1], мы имеем $F(N) \leq C_N(R)$, то $R = C_N(R) = O_p(N)$. Ясно, M — p-сверхразрешимая группа. Кроме того, согласно [6, I, лемма 3.9], мы имеем $O_p(G/C_G(R)) = 1$ и $O_p(M/M \cap C) = 1$. Заметим, наконец, что p делит $|M|$. Действительно, если p не делит $|M|$, то N/R — p'-группа, т.е. R — силовская p-подгруппа в N, что невозможно в силу (1). Итак, p делит $|M|$.

(4) $N = G$.

Согласно лемме 2.10 (3) из [1], условие теоремы верно для N. Допустим, что $N \neq G$. Тогда, поскольку $|N| < |G|$, то в силу выбора группы G, N — p-сверхразрешимая группа. Поскольку, согласно (3), мы имеем $R = C_N(R) = O_p(N)$, то $O_{p'}(N) = 1$. Значит, N — сверхразрешимая группа и, следовательно, R — нормальная силовская в N подгруппа, что противоречит (1). Следовательно, $N = G$.

(5) *Если Q — силовская r-подгруппа в G, где $r \neq p$ и F — максимальная в Q подгруппа, то либо $F = 1$, либо $G = DF$ для некоторой сверхразрешимой подгруппы D.*

Согласно условию, подгруппа F либо слабо s-перестановочна в G, либо имеет p-сверхразрешимое добавление в G. Предположим, что $F \neq 1$. Допустим, что подгруппа F слабо s-перестановочна в G и пусть T — такая субнормальная подгруппа в G, что $FT = G$ и $F \cap T \leq F_{sG}$. Ввиду лемм 2.6 (3) и 2.8 (1) из [1] подгруппа F_{sG} субнормальна в G и поэтому, согласно [6, II, следствие 7.7.2], имеет место $F_{sG} \leq O_r(G) \leq C_G(R)$, что в силу (4) и (3) влечет $F_{sG} = 1$. Значит, $T \cap F = 1$ и поэтому для силовской r-подгруппы T_r из T мы имеем $|T_r| = r$. В силу леммы 2.10 (3) из [1] это означает, что условие теоремы верно для T. Так как $F \neq 1$ и $T \cap F = 1$, то $T \neq G$ и поэтому согласно выбору группы G, T — p-сверхразрешимая группа. Ясно, что $|G : T| = r^{\alpha}$ для некоторого натурального числа α и потому $R \leq T$. Поскольку $C_G(R) = R$, мы видим, что $O_{p'}(T) = 1$. Следовательно, T — сверхразрешимая группа и R — нормальная силовская подгруппа в T. Так как T — субнормальная в G подгруппа и R характеристична в T, то R нормальна в G, что противоречит (1).

Таким образом, F не является слабо s-перестановочной в G и поэтому для некоторой p-сверхразрешимой подгруппы D мы имеем $FD = G$, что и как в предыдущем абзаце позволяет заключить, что D — сверхразрешимая группа.

(6) *Если Q — силовская r-подгруппа в G, где $|Q| \neq r < p$ и G_p — силовская p-подгруппа в G, то $r \nmid |G : N(G_p)|$.*

Так как $|Q| \neq r$, то ввиду (5) каждая максимальная в Q подгруппа имеет сверхразрешимое добавление в G. Пусть $\{Q_1, \ldots, Q_t\}$ — набор всех максимальных в Q подгрупп. И пусть T_i — такая сверхразрешимая подгруппа группы G, что $Q_iT_i = G$, $i = 1, \ldots, t$. Пусть P — силовская p-подгруппа в T_1. Понятно, что P является силовской p-подгруппой в G. Значит, $P \trianglelefteq T_1$. Так как Q действует транзитивно на множестве силовских p-подгрупп группы G, то для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$ в Q найдется такой элемент x_i, что P^{x_i} — силовская p-подгруппа в T_i. С каждым $i \in \{1, \ldots, t\}$ сопоставим некоторый полный набор $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ представителей левых смежных классов по подгруппе Q_i в Q такой, все элементы которого принадлежат T_i. И пусть S — объединение всех таких наборов.

Заметим, что поскольку $P^{x_i} \trianglelefteq T_i$, то каждый элемент из $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ имеет вид g^{x_i}, где $g \in N_G(P)$. Ясно, что подгруппа Q порождается множеством S. Так как при этом $g^{-1}g^{x_i} \in Q' \subseteq \Phi(Q)$, то в действительности Q порождается некоторым набором элементов из $N_G(P)$. Этим доказано утверждение (6).

(7) *Порядок группы G делится по крайней мере на три простых числа.*

Допустим, что G — $\{p, q\}$-группа и пусть Q — некоторая силовская q-подгруппа группы G, содержащаяся в M. Так как, согласно (3) и (4), имеет место $O_p(M) = 1$, то $F(M) = O_q(M)$.

Прежде предположим, что $|Q| = q$ и пусть P_2 — силовская p-подгруппа в M. Тогда $P_2 \simeq M/C_M(Q) = M/Q$ — циклическая группа. Это, в частности, означает, что подгруппа M сверхразрешима и поэтому $q > p$. Пусть $P = RP_2$. Тогда P — силовская p-подгруппа в G.

Если P_1 — максимальная подгруппа в P такая, что $P_2 \le P_1$, то $P_1 = P_1 \cap RP_2 = P_2(P_1 \cap R)$. Ясно, что $R \not\subseteq P_1$.

Предположим, что P_1 является слабо s-перестановочной в G подгруппой. Пусть $L = P_{1sG}$ и T — такая субнормальная в G подгруппа, что $P_1T = G$ и $T \cap P_1 \le L$. Предположим, что $L = 1$. Тогда, $|T| = pq^b$ и поэтому, согласно лемме 2.10 (3) из [1], условие теоремы остается верным для T. Следовательно, T — p-сверхразрешимая группа. Поскольку $O_q(G) = 1$, то в силу [6, II, следствие 7.7.2] мы имеем $O_q(T) = 1 = O_{p'}(T) = 1$. Значит, T — сверхразрешимая группа. Но тогда в силу $q > p$ мы видим, что силовская q-подгруппа из T является нормальной в T, а значит, она содержится в $O_q(T) = 1$. Это противоречие показывает, что $L \ne 1$. В силу лемм 2.5 (6) и 2.6 (3) из [1], $L \le O_p(G) = R$ и поэтому $L \le R \cap P_1$. Заметим, что $R \le T$. Действительно, так как T субнормальна в G и, очевидно, T содержит некоторую силовскую q-подгруппу Q группы G, то $R \le Q^G \le T_G$. Таким образом, $T \cap P_1 \le R \cap P_1 \le T \cap P_1$, что влечет $T \cap P_1 = R \cap P_1$. Следовательно, в силу $T \cap P_1 \le L \le R \cap P_1$ мы получаем $T \cap P_1 = L$. Понятно, что $R \cap P_1$ является нормальной в P подгруппой. С другой стороны, $L = R \cap P_1$ — s-перестановочная G подгруппа и поэтому для некоторой силовской q-подгруппы Q группы G мы имеем $Q \le N_G(L)$. Значит, L — нетривиальная в P подгруппа, которая является нормальной в G. Следовательно, $R \le L \le P_1$, противоречие.

Таким образом, P_1 не является слабо s-перестановочной подгруппой в G и в соответствии с условием в группе G имеется такая p-сверхразрешимая подгруппа T, что $G = P_1T$. Покажем, что силовская q-подгруппа T_q нормальна в T. Действительно, если $O_{p'}(T) \ne 1$, то поскольку $\pi(G) = \{p, q\}$ и $|Q| = q$, мы имеем $O_{p'}(T) = T_q \trianglelefteq T$. Предположим, что $O_{p'}(T) = 1$. Тогда группа T сверхразрешима. Так как $q > p$, то $T_q \le O_{p'}(T)$, что приводит к противоречию. Следовательно, рассматриваемый нами случай невозможен. Таким образом, $T_q \trianglelefteq T$. Так как T_q — силовская q-подгруппа в G мы видим, что T_q и Q сопряжены, т.е. $T_q = Q^g$ для некоторого $g \in G$. Понятно, что $M = N_G(Q)$, что влечет $M^g = N_G(T_q)$. Теперь, используя сказанное выше мы видим, что $T \subseteq N_G(T_q) = M^q$.

Пусть $T \ne M^g$. Так как $G = P_1T$, мы имеем $M^g = M^g \cap P_1T = T(M^g \cap P_1)$ и, значит, найдутся силовская p-подгруппа M_p в M^g и силовская подгруппа T_p в T такие, что $M_p = T_p(M^g \cap P_1)$. Но, как мы уже знаем, M_p — циклическая группа. Следовательно, либо $M^g \cap P_1 = M_p$, либо $T_p = M_p$. Пусть имеет место последний случай. Пусть P_3 — силовская p-подгруппа в T такая, что $P_3 \le M_p$. Тогда мы имеем $P_3 \le P_1$ и поэтому $|G : Q| \le |P_1|$. Но $T = P_3Q_1$ для некоторой силовской q-подгруппы Q_1 из T и поэтому мы имеем $G = P_1T = P_1P_3Q_1 = P_1Q_1$, что влечет $|G : Q| \le |P_1|$. Однако, тогда $|G : Q_1| = |P| > |P_1|$. Это противоречие показывает, что $M^g \cap P_1 \ne M_p$. Следовательно, $T_p = M_q$, и $T = M^g$.

Наконец, поскольку $G = MR$, то для любого $g \in G$, мы имеем $g = mr$, где $m \in M$ и $r \in R$. Следовательно, $M^g = M^{mr} = M^r = P_2^r(Z_q)^r$. Так как P_1 — максимальная подгруппа в P, то $P_1 \trianglelefteq P$. Однако, поскольку $P_2 \le P_1$, мы имеем $P^r \le P_1$. Следовательно, $G = P_1T = P_1M^g = P_1P_2^r(Z_q)^r = P_1(Z_q)^r$, и поэтому $|G| = |P_1|q < |P|q$. Полученное противоречие показывает, что $|Q| > q$.

Пусть E — максимальная подгруппа в Q. Предположим, что подгруппа E является слабо s-перестановочной в G и пусть T — такая субнормальная в G подгруппа, что $ET = G$ и $E \cap T \le E_{sG}$. Поскольку $E_{sG} \le O_q(G) = 1$, то T — дополнение к E в G и поэтому условие теоремы верно для T. Следовательно, T — p-сверхразрешимая группа. Но это как и выше приводит к противоречию. Следовательно, подгруппа E не является слабо s-перестановочной в G и поэтому согласно условию для некоторой p-сверхразрешимой подгруппы T группы G мы имеем $ET = G$. Ясно, что $R \le T$. Следовательно $O_{p'}(T) = 1$, что влечет сверхразрешимость группы T. Но тогда $p > q$ и поэтому, согласно (6), подгруппа P нормальна в G, что противоречит (3). Это противоречие заканчивает доказательство (7).

(8) *Во множестве $\pi(G)\diagdown\{p\}$ найдется такое число q, что силовская q-подгруппа группы G не является циклической.*

Действительно, предположив противное видим, что M — сверхразрешимая группа. Пусть q — наибольшее число в $\pi(G) = \pi(M)$. Так как $O_p(M) = 1$, то $p \neq q$. Так как группа G является p-разрешимой, то $PQ = QP$ для некоторых силовских p-подгруппы P и q-подгруппы Q из G. Легко видеть, что условие теоремы выполняется в группе PQ. Но $|PQ| < |G|$ и поэтому PQ — p-сверхразрешимая группа. Так как $R \leq PQ$, то $O_{p'}(PQ) = 1$. Таким образом, PQ — сверхразрешимая группа и поэтому $Q \subseteq O_{p'}(PQ) = 1$. Полученное противоречие доказывает, что верно (8).

Заключительное противоречие.

Покажем, что силовская p-подгруппа группы G нормальна в G. Согласно (8), для некоторого $q \in \pi(G)$, где $q \neq p$, силовская q-подгруппа Q группы G не является циклической. Пусть Q_1 — максимальная в Q подгруппа. Тогда, согласно (5), $G = Q_1T$ для некоторой сверхразрешимой подгруппы T. Так как, очевидно, $R \subseteq T$, то p — наибольшее число в $\pi(G)$. Пусть T_p — силовская p-подгруппа в T. Ясно, что T_p — силовская p-подгруппа в G. Значит, $T_p \trianglelefteq T$. Кроме того, согласно (6), $q \nmid |G : N(T_p)|$, что влечет $T_p \trianglelefteq G$. Но это невозможно в силу (3). Теорема доказана.

Теорема 2 доказывается аналогично.

Доказательство следствия 2. Предположим, что данное утверждение не верно и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда группа G монолитична и ее единственная минимальная нормальная подгруппа R такова, что $R = C_G(R) = O_p(G)$ (см. доказательство теоремы 1). Согласно теореме 2, G — p-сверхразрешимая группа. Значит, $|R| = p$ и поэтому G/R — абелева группа. Значит, R — силовская p-подгруппа в G и поэтому, согласно условию, группа G p-нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство данного следствия.

Литература

1. *Skiba A.N.* On weakly s-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.
2. *Weinstein M., etc.* Between Nilpotent and Solvable. Polygonal Publishing House, Passaic N. J., 1982.
3. *Skiba A.N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. № 3 (36). С. 12–32.
4. *Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.* X-semipermutable Subgroups of Finite Groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.
5. *Guo W., Shum K.P., Skiba A.N.* G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. of Math. 2003. V. 138. P. 125–138.
6. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
7. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.

N. V. Hutsko, A. N. Skiba

On p-supersolvability of a class of finite groups

Summary

Let G be a finite group, H a subgroup of G and H_{sG} be the subgroup of H generated by all those subgroups of H which are s-permutable in G. Then H is said to be weakly s-permutable in G if G has a subnormal subgroup T such that $HT = G$ and $T \cap H \leq H_{sG}$. In the paper the notion of a weakly s-permutable subgroup is applied to the study of p-supersoluble groups.