Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 512.54

G–НАКРЫВАЮЩИЕ СИСТЕМЫ ПОДГРУПП ДЛЯ КЛАССОВ p–СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ И p–НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Го Веньбинь, К. П. Шам, А. Н. Скиба

Аннотация: Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп. Сопоставим всякой группе G некоторое множество ее подгрупп $\Sigma = \Sigma(G)$. Будем говорить, что Σ — G-накрывающая система подгрупп для класса $\mathscr{F}$ (или, иначе, $\mathscr{F}$-накрывающая система подгрупп группы G), если $G \in \mathscr{F}$ всякий раз, когда либо $\Sigma = \varnothing$, либо $\Sigma \neq \varnothing$ и каждая подгруппа из Σ принадлежит $\mathscr{F}$. В классе конечных разрешимых групп G найдены такие системы подгрупп, которые одновременно являются G-накрывающими системами подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных групп.

Ключевые слова: силовская подгруппа, добавление к подгруппе, максимальная подгруппа, p-нильпотентная группа, p-сверхразрешимая группа, накрывающая система подгрупп.

1. Введение

Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп. Сопоставим всякой группе G некоторое множество ее подгрупп $\Sigma = \Sigma(G)$. Будем говорить, что Σ — *G-накрывающая система подгрупп для класса $\mathscr{F}$* (или, иначе, *$\mathscr{F}$-накрывающая система подгрупп группы G*), если $G \in \mathscr{F}$ всякий раз, когда либо $\Sigma = \varnothing$, либо $\Sigma \neq \varnothing$ и каждая подгруппа из Σ принадлежит $\mathscr{F}$.

Ясно, что множество всех конечно порожденных подгрупп группы G является G-накрывающей системой подгрупп для класса всех абелевых групп. Согласно локальной теореме Мальцева [1] (см. также [2, разд. 2]) мы знаем, что множество всех конечно порожденных подгрупп группы G является G-накрывающей системой подгрупп и для многих других важных классов групп. Однако в теории конечных групп мы знаем значительно меньше примеров такого рода и большинство из этих примеров связаны с классами нильпотентных и p-нильпотентных групп. Напомним, например, что если P — силовская p-подгруппа конечной группы G, где p нечетно, то из известной J-теоремы Томпсона следует, что множество $\{N_G(J(P)), C_G(Z(P))\}$ — G-накрывающая система подгрупп для класса p-нильпотентных групп. Согласно [3] множество всех нормализаторов всех силовских подгрупп конечной группы G является ее $\mathscr{N}$-накрывающей системой. Отметим попутно, что согласно [4] такое множество в общем случае не является G-накрывающей системой подгрупп для класса $\mathscr{U}$ всех сверхразрешимых групп. Приведем другой пример. Пусть Σ — множество всех бипримарных подгрупп конечной группы G. Тогда Σ — G-накрывающая

Исследования третьего из авторов поддержаны Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф 03–110).

система подгрупп для класса p-нильпотентных групп. Действительно, хорошо известно, что каждая конечная минимальная не p-нильпотентная группа является бипримарной. Следовательно, группа G p-нильпотентна, если каждая подгруппа из Σ p-нильпотентна. Заметим, что система Σ в общем случае не является G-накрывающей системой для классов сверхразрешимых и p-сверхразрешимых групп (это вытекает из хорошо известной теоремы Хупперта о конечных минимальных не сверхразрешимых группах [5]).

В работе [6] (см. также [7]) нами найдены системы подгрупп конечной группы G, которые одновременно являются G-накрывающими системами для классов нильпотентных и сверхразрешимых групп. Главной целью данной работы является нахождение локальных аналогов результатов работ [6, 7]. Одним из основных итогов данной работы служит следующее наблюдение (следствие 4.9). *Пусть G — p-разрешимая группа, Σ — множество ее подгрупп, которому принадлежит по крайней мере одно добавление к каждой максимальной подгруппе каждой силовской подгруппы группы G. Тогда Σ одновременно является G-накрывающей системой для классов p-нильпотентных и p-сверхразрешимых групп.*

Все рассматриваемые ниже группы конечны.

2. Предварительные сведения

Для удобства чтения приведем в виде лемм некоторые наиболее часто используемые в основном тексте известные свойства разрешимых и сверхразрешимых групп.

Лемма 2.1 (см. [8, 1.8.1; 9, I, лемма 4.4]). *Пусть N — нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа $N/N \cap \Phi(G)$ нильпотентна. Тогда N также нильпотентна.*

Лемма 2.2 (см. [10, VI, 9.3]). *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M из G с $p \mid |G : M|$ имеет место $|G : M| = p$.*

Лемма 2.3 (см. [11, B, (9.8)]). *Пусть H/K — главный фактор группы G. Тогда $|H/K|$ является простым числом p в том и только в том случае, если $G/C_G(H/K)$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$.*

Лемма 2.4 (см. [11, A, (10.6)]). *Пусть G — разрешимая группа. Тогда $F(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$.*

Лемма 2.5 (см. [11, A, (10.6)]). *Пусть H/K — главный фактор группы G. Тогда $F(G) \subseteq C_G(H/K)$.*

Лемма 2.6 (см. [11, A, (10.6)]). *Пусть G — разрешимая группа. Тогда $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.*

Лемма 2.7 (см. [12, 3.13]). *Пусть $N \le K \le \mathrm{Soc}(G)$, где $N, K \trianglelefteq G$. Тогда существует нормальная подгруппа T в G такая, что $K = N \times T$.*

Группу G называют *примитивной группой*, если она имеет максимальную подгруппу M с $M_G = 1$.

Лемма 2.8 (см. [11, A, (15.2)]). *Если G — примитивная группа и G имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу R, то $R = \mathrm{Soc}(G)$.*

Лемма 2.9 (см. [11, A, (13.6)]). *Пусть H/K — главный фактор группы G. Если H/K — p-группа, то $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$.*

Лемма 2.10 (см. [10, VI, 9.1]). *Пусть G — сверхразрешимая группа. Если p и q — наибольший и наименьший простые делители $|G|$ соответственно, то силовская p-подгруппа G нормальна в G и G q-нильпотентна.*

Лемма 2.11 (см. [10, VI, 1.10]). *Группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа из G дополняема в G.*

Лемма 2.12 (см. [11, A, (13.8)]). *Пусть G — группа и p — простое число. Тогда $O_{p',p}(G) = \bigcap C_G(H/K)$, где H/K пробегает все такие главные факторы группы G, что $p \mid |H/K|$.*

Лемма 2.13 (см. [11, I, (2.3)]). *Пусть G — разрешимая группа и p, q — простые делители ее порядка $|G|$. Тогда в G найдутся такие силовская p-подгруппа P и силовская q-подгруппа Q, что $PQ = QP$.*

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.14. *Если в группе G силовские подгруппы цикличны, то G сверхразрешима.*

Лемма 2.15 (см. [12, 3.29]). *Пусть H/K — абелев главный фактор группы G и M — ее максимальная подгруппа такая, что $K \subseteq M$, $H \not\subseteq M$. Тогда*

$$G/M_G \simeq [H/K](G/C_G(H/K)).$$

3. Базисные теоремы

Лемма 3.1. *Пусть N и L — нормальные подгруппы группы G такие, что P/L является силовской p-подгруппой в NL/L, и M/L — максимальная подгруппа в P/L. Если P_p — силовская p-подгруппа в $P \cap N$, то P_p — силовская p-подгруппа в N такая, что $D = M \cap N \cap P_p$ является максимальной подгруппой P_p и $M = LD$.*

Доказательство. Так как $P \leq NL$ и $L \leq P$, то $P = P \cap NL = L(P \cap N)$. Из этого следует, что

$$P/L = L(P \cap N)/L \simeq (P \cap N)/(L \cap N \cap P) = (P \cap N)/(L \cap N) \leq N/(L \cap N).$$

Ясно, что $|NL/L| = |N/L \cap N|$, $|P/L| = |(P \cap N)/(L \cap N)|$, и так как P/L — силовская p-подгруппа NL/L, мы видим, что $|N/(L \cap N) : (P \cap N)/(L \cap N)|$ не делится на p. Это показывает, что $(P \cap N)/(L \cap N)$ — силовская p-подгруппа в $N/(L \cap N)$. Аналогично ввиду того, что $M/L = (M \cap N)L/L \simeq (M \cap N)/(L \cap N)$, имеем $|NL/L : M/L| = |N/(L \cap N) : (M \cap N)/(L \cap N)|$. Но $(M \cap N)/(L \cap N) \leq (P \cap N)/(L \cap N)$, это показывает, что $(M \cap N)/(L \cap N)$ — максимальная подгруппа в $(P \cap N)/(L \cap N)$. Пусть P_p — силовская p-подгруппа в $P \cap N$. Тогда

$$P_p(L \cap N)/(L \cap N) = (P \cap N)/(L \cap N).$$

Так как p не делит $|N/(L \cap N) : (P \cap N)/((L \cap N)|$, то P_p — силовская p-подгруппа группы N. Поскольку

$$M \cap N = M \cap N \cap P_p(L \cap N) = (L \cap N)(M \cap N \cap P_p),$$

имеем

$$p = |(P \cap N)/(L \cap N) : (M \cap N)/(L \cap N)| = |(P \cap N) : (M \cap N)|$$
$$= |P_p(L \cap N) : (L \cap N)(M \cap N \cap P_p)| = \frac{|P_p(L \cap N)|}{|(L \cap N)(M \cap N \cap P_p)|}$$
$$= \frac{|P_p||L \cap N||L \cap N \cap M \cap N \cap P_p|}{|L \cap N||M \cap N \cap P_p||P_p \cap L \cap N|} = \frac{|P_p|}{|M \cap N \cap P_p|}.$$

Это показывает, что $D = M \cap N \cap P_p$ — максимальная подгруппа в P_p. Из сказанного выше мы также видим, что $M \cap N = (L \cap N)D$, и поэтому

$$M = M \cap LN = L(M \cap L) = L(L \cap N)D = LD.$$

Лемма доказана.

Подгруппы H и T группы G называются *перестановочными* (*условно перестановочными* [13]), если $HT = TH$ (соответственно $HT^x = T^xH$ для некоторого $x \in G$). Подгруппа H называется *условно перестановочной*, если она условно перестановочна со всеми подгруппами из G.

В качестве тривиального примера заметим, что в группе S_3 силовская 2-подгруппа условно перестановочна, но не является перестановочной подгруппой в S_3.

Отметим очевидные свойства (условно) перестановочных подгрупп.

Лемма 3.2. *Пусть G — группа, $K \trianglelefteq G$ и $H \leq G$. Тогда*

(1) *если $K \leq T \leq G$ и H (условно) перестановочна с T, то KH/K (условно) перестановочна с T/K в G/K;*

(2) *если $K \leq H$, $T \leq G$ и H/K (условно) перестановочна с KT/K в G/K, то H (условно) перестановочна с T.*

Лемма 3.3. *Пусть G — p-сверхразрешимая группа. Если $O_{p'}(G) = 1$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если H/K является главным фактором в G и $|H/K| \neq p$, то $|H/K|$ — простое число. Пусть $\{H_i/K_i \mid i \in I\}$, множество всех главных факторов из G такое, что $|H_i/K_i| = p$. Пусть $C_i = C_G(H_i/K_i)$. Тогда по лемме 2.12 $O_{p',p}(G) = \bigcap_{i \in I} C_i$. Поскольку $O_{p'}(G) = 1$, то $O_p(G) = \bigcap_{i \in I} C_i$. Следовательно, по лемме 2.2 $G/O_p(G)$ — абелева группа. Это означает, что группа G сверхразрешима. Лемма доказана.

Теорема 3.4. *Пусть N — неединичная p-разрешимая нормальная подгруппа группы G с p-сверхразрешимой фактор-группой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N, не являющаяся перестановочной в G, имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

1. *N не является минимальной нормальной подгруппой в G.*

Предположим, что N — минимальная нормальная подгруппа в G. Группа N по условию p-разрешима. Значит, N либо p'-группа, либо p-группа. Но в первом случае G p-сверхразрешима, поскольку по условию p-сверхразрешима фактор-группа G/N, что противоречит выбору группы G. Поэтому N — p-группа. Пусть E — максимальная в N подгруппа. Ввиду леммы 2.2 $N \not\subseteq \Phi(G)$. Пусть D — максимальная в G подгруппа такая, что $G = ND$. Ясно, что $|G : D| = |N|$. Предположим, что E перестановочна в G. Тогда $ED = DE$, что влечет $|G : D| = |E| < |R|$. Полученное противоречие показывает, что подгруппа E не является перестановочной в G. Значит, по условию в G имеется p-сверхразрешимое добавление T к E. Но $TE = G$ p-сверхразрешимой группой не является. Тем самым $T \neq G$ и, как выше, имеем $|G : T| = |R| = |E|$; противоречие. Доказательство этапа 1 закончено.

2. *Для любой минимальной нормальной в G подгруппы R фактор-группа G/R p-сверхразрешима.*

В силу случая 1 $R \neq N$ и поэтому RN/R — неединичная нормальная p-разрешимая подгруппа в G/R такая, что фактор-группа

$$(G/R)/(RN/R) \simeq G/RN \simeq (G/N)/(RN/N)$$

является p-сверхразрешимой.

Пусть P/R — силовская q-подгруппа в RN/R и M/R — максимальная подгруппа в P/R. Если P_q — силовская q-подгруппа в $P \cap N$, то по лемме 3.1 P_q — силовская q-подгруппа в N, $L = M \cap N \cap P_q$ — максимальная подгруппа в P_q и $M = RL$. Таким образом, по условию L либо является перестановочной подгруппой в G, либо имеет p-сверхразрешимое добавление T в G. В первом случае по лемме 3.2 подгруппа $M/R = LR/R$ перестановочна в G/R. Во втором случае $TR/R \simeq T/R \cap T$ является p-сверхразрешимым добавлением к M/R в G/R. Это показывает, что условие теоремы выполняется и для фактор-группы G/R. Следовательно, по выбору группы G мы заключаем, что G/R — p-сверхразрешимая группа.

3. *Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $R = C_G(R) = O_p(G)$, и $G = [R]M$, где M — p-сверхразрешимая максимальная в G подгруппа такая, что $p \mid |M|$ и $O_p(M) = 1$.*

Так как класс всех p-сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию (см. [9, с. 31]), то R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G такая, что $R \not\leq \Phi(G)$ и R является p-группой. Понятно также, что $|R| \neq |p|$. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $R \not\leq M$. Пусть $C = C_G(R)$. Ясно, что $C \cap M \trianglelefteq G$. Поскольку $R = \mathrm{Soc}(G)$, мы видим, что $M_G = 1$. Это показывает, что $C \cap M = 1$ и, следовательно, $C = C \cap RM = R(C \cap M) = R$. Используя лемму 2.11, видим, что $O_p(G/C_G(R)) = O_p(G/R) = 1$. Ясно, что $G = [R]M$ и поэтому M — p-сверхразрешимая группа такая, что $O_p(M) = 1$. Покажем, что p делит $|M|$. Понятно, что $R \subseteq N$. Следовательно, если p не делит $|M|$, то N/R — p'-группа, т. е. R — силовская p-подгруппа в N. Тогда если D — максимальная подгруппа в R, то D либо перестановочна в G, либо имеет p-сверхразрешимое добавление в G, что невозможно в силу 1. Итак, p делит $|M|$.

4. $N = G$.

Допустим, что $N \neq G$. Рассмотрим подгруппу $N \cap M$. Поскольку $R \neq N = N \cap RM = R(N \cap M)$, то $N \cap M \neq 1$. Так как $|N| < |G|$, то N — p-сверхразрешимая группа в силу выбора группы G. Поскольку $C_G(R) = R$, то $O_{p'}(N) = 1$. По лемме 3.3 N — сверхразрешимая группа. Предположим, что p делит порядок группы $N \cap M$. Тогда поскольку по лемме 2.10 силовская p-подгруппа P группы $N \cap M$ нормальна, а значит, и характеристична в $N \cap M$, то $1 \neq P \subseteq O_p(M) = 1$. Полученное противоречие показывает, что $N \cap M$ —

p'-группа. Тем самым R — силовская p-подгруппа в N. Поэтому если D — максимальная подгруппа группы R, то либо D — перестановочная подгруппа в G, либо $G = DT$ для некоторой p-сверхразрешимой подгруппы T в G. Но, как мы уже знаем, оба этих случая невозможны. Следовательно, $N = G$.

5. *Если Q — силовская r-подгруппа в G, где $r \neq p$, и F — максимальная в Q подгруппа, то либо $F = 1$, либо $G = TF$ для некоторой сверхразрешимой подгруппы T.*

Согласно условию либо подгруппа F перестановочна в G, либо в группе G имеется такая подгруппа T, что $FT = G$ и T является p-сверхразрешимой группой. Предположим, что $F \neq 1$. Допустим, что подгруппа F перестановочна в G. Понятно, что подгруппа F не является нормальной в G. Пусть $x \in G \backslash N_G(F)$. Согласно нашему допущению $FF^x = F^xF$. Понятно, что FF^x — силовская r-подгруппа в G и эта подгруппа является перестановочной в G. Значит, $FF^x \trianglelefteq G$. Следовательно, $FF^x \subseteq C(R) = R$; противоречие. Таким образом, подгруппа F не является перестановочной в G. Тем самым мы имеем второй случай. Ясно, что $|G : T| = r^\alpha$ для некоторого натурального числа α и потому $R \leq T$. Поскольку $C_G(R) = R$, мы видим, что $O_{p'}(T) = 1$. Следовательно, по лемме 3.3 T — сверхразрешимая группа.

6. *Если Q — силовская r-подгруппа в G, где $|Q| \neq r \neq p$ и G_p — силовская p-подгруппа в G, то $r \nmid |G : N_G(G_p)|$.*

Так как $|Q| \neq r$, ввиду 5 каждая максимальная в Q подгруппа имеет сверхразрешимое добавление в G. Пусть $\{Q_1, \dots, Q_t\}$ — набор всех максимальных в Q подгрупп. Пусть T_i — сверхразрешимая подгруппа группы G такая, что $Q_iT_i = G$, $i = 1, \dots, t$. Пусть P — силовская p-подгруппа в T_1. Понятно, что P является силовской p-подгруппой в G. Ввиду леммы 2.10 $P \trianglelefteq T_1$. Так как Q действует транзитивно на множестве силовских p-подгрупп группы G, то для каждого $i \in \{1, \dots, t\}$ в Q найдется такой элемент x_i, что P^{x_i} — силовская p-подгруппа в T_i. Каждому $i \in \{1, \dots, t\}$ сопоставим некоторый полный набор $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ представителей левых смежных классов по подгруппе Q_i в Q, все элементы которого принадлежат T_i. Пусть S — объединение всех таких наборов.

Заметим, что, поскольку $P^{x_i} \trianglelefteq T_i$, каждый элемент из $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ имеет вид g^{x_i}, где $g \in N_G(P)$. Ясно, что подгруппа Q порождается множеством S. Так как при этом $g^{-1}g^{x_i} \in Q' \subseteq \Phi(Q)$, то в действительности Q порождается некоторым набором элементов из $N_G(P)$. Этим доказан случай 6.

7. *Порядок группы G делится по крайней мере на три простых числа.*

Действительно, допустим, что G — $\{p, q\}$-группа. Пусть Q — силовская q-подгруппа в M и P_2 — некоторая ее силовская p-подгруппа. Пусть $P = RP_2$. Тогда P — силовская p-подгруппа в G. Ввиду 3 подгруппа P не является нормальной в G. Значит, согласно 6 $|Q| = q$. Так как $O_p(M) = 1$, то $F(M) = O_q(M) = Q = C_M(Q)$. Это показывает в силу леммы 2.3, что если P_2 — силовская p-подгруппа в M, то $P_2 \simeq M/C_M(Q) = M/Q$ — циклическая группа. Это, в частности, означает ввиду леммы 2.14, что подгруппа M сверхразрешима.

Пусть P_1 — максимальная подгруппа в P такая, что $P_2 \leq P_1$. Тогда $P_1 = P_1 \cap RP_2 = P_2(P_1 \cap R)$. Ясно, что $R \nsubseteq P_1$. Используя рассуждения, приведенные выше, легко убедится, что P_1 не является перестановочной подгруппой в G, и поэтому в соответствии с условием в группе G имеется такая p-сверхразрешимая подгруппа T, что $G = P_1T$. Теперь покажем, что силовская q-подгруппа T_q нормальна в T. Действительно, если $O_{p'}(T) \neq 1$, то, поскольку $\pi(G) = \{p, q\}$

и $|Q| = q$, имеем $O_{p'}(T) = T_q \trianglelefteq T$. Предположим, что $O_{p'}(T) = 1$. Тогда группа T сверхразрешима по лемме 3.3. Так как подгруппа M сверхразрешима и $O_p(M) = 1$, согласно лемме 2.10 $q > p$, а значит, $T_q \leq O_{p'}(T)$, что приводит к противоречию. Следовательно, этот случай невозможен. Таким образом, $T_q \trianglelefteq T$. Так как T_q — силовская q-подгруппа в G, видим, что $T_q = Q^g$ для некоторого $g \in G$. Понятно, что $M = N_G(Q)$, откуда $M^g = N_G(T_q)$. Используя сказанное выше, находим, что $T \subseteq N_G(T_q) = M^g$.

Пусть $T \neq M^g$. Поскольку $G = P_1T$, имеем $M^g = M^g \cap P_1T = T(M^g \cap P_1)$ и, значит, найдутся силовская p-подгруппа M_p в M^g и силовская подгруппа T_p в T такие, что $M_p = T_p(M^g \cap P_1)$. Как мы уже знаем, M_p — циклическая группа. Следовательно, либо $M^g \cap P_1 = M_p$, либо $T_p = M_p$. Пусть имеет место первый случай. Пусть P_3 — силовская p-подгруппа в T такая, что $P_3 \leq M_p$. Тогда $P_3 \leq P_1$. Но $T = P_3Q_1$ для некоторой силовской q-подгруппы Q_1 из T и поэтому $G = P_1T = P_1P_3Q_1 = P_1Q_1$, что влечет $|G : Q_1| \leq |P_1|$. Однако $|G : Q_1| = |P| > |P_1|$. Это противоречие показывает, что $M^g \cap P_1 \neq M_p$. Следовательно, $T_p = M_p$, и $T = M^g$.

Наконец, поскольку $G = MR$, то для любого $g \in G$ справедливо $g = mr$, где $m \in M$ и $r \in R$. Следовательно, $M^g = M^{mr} = M^r = P_2^rQ^r$. Так как P_1 — максимальная подгруппа в P, то $P_1 \trianglelefteq P$. Поскольку $P_2 \leq P_1$, имеем $P_2^r \leq P_1$. Значит, $G = P_1T = P_1M^g = P_1P_2^rQ^r = P_1Q^r$, и поэтому $|G| = |P_1|q < |P|q$. Это противоречие заканчивает доказательство случая 7.

8. *В множестве $\pi(G)\diagdown\{p\}$ найдется такое число q, что силовская q-подгруппа группы G не является циклической.*

Действительно, предположив противное, видим, что M — сверхразрешимая группа. Пусть q — наибольшее число в $\pi(G) = \pi(M)$. Так как $O_p(M) = 1$, то $p \neq q$. По лемме 2.12 имеем $PQ = QP$ для некоторых силовских p-подгруппы P и q-подгруппы Q из G. Легко видеть, что условие теоремы выполняется в группе PQ. Но согласно случаю 7 $|PQ| < |G|$, и тем самым PQ — p-сверхразрешимая группа. Поскольку $R \subseteq PQ$, то $O_{p'}(PQ) = 1$. Таким образом, PQ — сверхразрешимая группа, и поэтому $Q \subseteq O_{p'}(PQ) = 1$. Полученное противоречие доказывает случай 8.

9. *Заключительное противоречие.*

Покажем, что силовская p-подгруппа группы G нормальна в G. Согласно п. 8 для некоторого $q \in \pi(G)\diagdown\{p\}$ силовская q-подгруппа Q группы G не является циклической. Пусть Q_1 — максимальная в Q подгруппа. Тогда в силу п. 5 $G = Q_1T$ для некоторой сверхразрешимой подгруппы T. Так как, очевидно, $R \subseteq T$, то p — наибольшее число в $\pi(G)$. Пусть T_p — силовская p-подгруппа в T. Ясно, что T_p — силовская p-подгруппа в G. По лемме 2.10 $T_p \trianglelefteq T$. Кроме того, согласно п. 6 $q \nmid |G : N(T_p)|$, что влечет $T_p \trianglelefteq G$. Но это невозможно в силу п. 3.

Теорема доказана.

Лемма 3.5. *Пусть N — неединичная нормальная подгруппа группы G. Если $\Phi(G) \cap N = 1$, то $F(N)$ — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G.*

Доказательство. Согласно лемме 2.4 $F(N) = \mathrm{Soc}(N)$ — абелева группа. Ясно, что $F(N) \neq 1$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $F(N)$. Тогда поскольку $\Phi(G) \cap N = 1$, имеем $G = RM$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Так как $F(N) = F(N) \cap RM = R(F(N) \cap M)$ и $F(N)$ — абелева группа, то $F(N) \cap M \trianglelefteq G$. Понятно, что

$|F(N) \cap M| < |F(N)|$ и поэтому по индукции $F(N) \cap M$ — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G. Очевидно, $F(N) = R \times (F(N) \cap M)$. Лемма доказана.

Теорема 3.6. *Пусть N — неединичная разрешимая нормальная подгруппа группы G с p-сверхразрешимой фактор-группой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N)$, не являющаяся условно перестановочной в G, имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что эта теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка.

Сначала покажем, что условие теоремы выполняется для фактор-группы G/Φ, где $\Phi = \Phi(G)$ — подгруппа Фраттини в G. Рассмотрим $T/\Phi = F(N\Phi/\Phi)$. Тогда $T = T \cap N\Phi = \Phi(T \cap N)$. Так как T/Φ — нильпотентная нормальная подгруппа в G/Φ, по лемме 2.1 T — нильпотентная нормальная подгруппа в G. Следовательно, $T \cap N \leq F(N)$. С другой стороны, поскольку

$$F(N)/F(N) \cap \Phi \simeq F(N)\Phi/\Phi \leq F(N\Phi/\Phi),$$

имеем $F(N) \subseteq T$. Значит, $T \cap N = F(N)$. Таким образом,

$$F(N\Phi/\Phi) = T/\Phi = (T \cap N)\Phi/\Phi = F(N)\Phi/\Phi.$$

Теперь пусть P/Φ — силовская p-подгруппа группы T/Φ, и пусть M/Φ — максимальная подгруппа в P/Φ и P_p — силовская p-подгруппа в $P \cap F(N)$. Тогда по лемме 3.1 P_p — силовская p-подгруппа в $F(N)$ и $L = M \cap F(N) \cap P_p$ — максимальная подгруппа в P_p. По условию подгруппа L либо условно перестановочна в G, либо имеет p-сверхразрешимое добавление T в G. По лемме 3.1 имеем $M = \Phi L$. Если L — условно перестановочная подгруппа в G, то по лемме 3.2 подгруппа $M/\Phi = L\Phi/\Phi$ условно перестановочна в G/Φ. Если же L имеет p-сверхразрешимое добавление T в G, то подгруппа $T\Phi/\Phi \simeq T/T \cap \Phi$ является p-сверхразрешимым добавлением к $L\Phi/\Phi$ в G/Φ. Таким образом, группа G/Φ имеет нормальную подгруппу $N\Phi/\Phi$ такую, что каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N\Phi/\Phi) = F(N)\Phi/\Phi$ либо имеет p-сверхразрешимое добавление в G/Φ, либо условно перестановочна в G/Φ. Поскольку $(G/\Phi)/(N\Phi/\Phi) \simeq G/N\Phi \simeq (G/N)/(N\Phi/N)$ — p-сверхразрешимая группа, видим, что условия теоремы все еще выполняются в G/Φ.

Если $\Phi \neq 1$, то $|G/\Phi| < |G|$ и поэтому G/Φ p-сверхразрешима по выбору группы G. Следовательно, G p-сверхразрешима по лемме 2.2. Это противоречит нашему предположению о группе G. Отсюда $\Phi(G) = 1$. Так как $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$, это влечет $\Phi(N) = 1$ и поэтому ввиду лемм 2.4, 3.5 $F(N) = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_t$, где $R_1, R_2, \ldots, R_t$ — минимальные нормальные подгруппы группы G. Пусть M_i — максимальная подгруппа R_i, $i = 1, 2, \ldots, t$. Предположим, что $|M_i| \neq 1$ для некоторого индекса i. Пусть теперь R_i — q-группа и R — силовская q-подгруппа в $F(N)$. Так как $N \trianglelefteq G$ и $F(N) \operatorname{char} N$, видим, что $F(N)$ нормальна в G. Следовательно, $R \trianglelefteq G$, поскольку $R \operatorname{char} F(N)$. Пусть E — максимальная подгруппа группы G такая, что $G = ER_i$. Тогда $G = RE$, что влечет $D = E \cap R \trianglelefteq G$. Поскольку $E \cap R_i = 1$, то $R = R_i \times D$. Пусть $M = M_iD$. Так как $|R : M| = |R_i : M_i| = q$, то M — максимальная подгруппа в R. Если M является условно перестановочной в G, то G имеет такой элемент x, что $M_iDE^x = M_iE^x = E^xM$. Это влечет $|G : E| = |M_i| = |R_i|$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что M не является условно перестановочной в G и, таким образом, имеет p-сверхразрешимое добавление T в G.

Итак, $T/T \cap R \simeq TR/R = TM/R = G/R$ — p-сверхразрешимая группа. Если $q \neq p$, то R — p'-группа, и поэтому G p-сверхразрешима. Это противоречит выбору группы G. Следовательно, R — силовская p-подгруппа в $F(N)$. Без потери общности можем предположить, что $i = 1$ и $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, где $D = R_2 \times \cdots \times R_n$.

Теперь докажем, что $n \geq 3$. Действительно, предположим, что $R = R_1 \times R_2$. Если $R_1 \leq T$, то $TM = TR_2$, и $G/R_2 = TR_2/R_2 \simeq T/T \cap R_2$ — p-сверхразрешимая группа. Это означает, что $R_1 \simeq R_1R_2/R_2$ — группа простого порядка, что противоречит нашему выбору подгруппы R_1. Следовательно, $R_1 \not\leq T$. Если $R_2 \leq T$, то $TM = TM_1 = G$ и тем самым $|G:T| \leq |M_1| < |R_1|$. Но $R_1T = G$ и $|G:T| = |R_1|$. Это противоречие показывает что $R_2 \not\leq T$. С другой стороны, если $R_1R_2 \cap T = 1$, то $G = TM_1R_2 = TR_1R_2$ и мы имеем $|G:T| = |R_1||R_2|$. Но из того, что $TM_1R_2 = G$, получаем, что $|G:T| \leq |M_1||R_2| < |R_1||R_2|$; противоречие. Следовательно, $\Delta = R_1R_2 \cap T \neq 1$. Поскольку R_1R_2 — абелева группа, то $\Delta = R_1R_2 \cap T$ — нормальная подгруппа в G. Пусть R_j — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в Δ. Поскольку $R_1 \not\leq T$, $R_2 \not\leq T$ и $R_j \leq T$, видим, что $R_j \neq R_1$ и $R_j \neq R_2$. Следовательно, $P = R_1R_2 = R_jR_2$, и $P/R_2 \simeq R_1 \simeq R_j$. Аналогично мы можем доказать, что $R_1 \simeq R_2$. Заметим также, что

$$\Delta = \Delta \cap R_1R_2 = \Delta \cap R_1R_j = R_j(\Delta \cap R_1) = R_j.$$

Значит,

$$|G| = \frac{|T||R_1R_2|}{|T \cap R_1R_2|} = \frac{|T||R_1||R_2|}{|R_j|} = |T||R_1|,$$

и $|G:T| = |R_1|$. Пусть $E = R_1T$. Понятно, что $E = G = R_1T$. Пусть $L = R_2 \cap T$. Тогда $L \trianglelefteq T$ и $L \trianglelefteq R_1R_2$. Но $G = TMR_2$ и $L \trianglelefteq G$. Учитывая, что $R_2 \not\leq T$, имеем $L \neq R_2$. Следовательно, $L = 1$, и $G/R_1 \simeq T/R_1 \cap T \simeq T$ — p-сверхразрешимая группа. Но R_2R_1/R_1 — минимальная нормальная p-подгруппа в G/R_1 и $|R_2| = |R_1| = p$. Это противоречие показывает, что $n \geq 3$.

Рассуждая, как выше, находим, что $R_1 \not\leq T$ и $T/T \cap R_2 \ldots R_n$ — p-сверхразрешимая группа. Предположим, что $\Delta \not\leq T$ для каждой минимальной нормальной подгруппы Δ из G, содержащейся в $R_2 \ldots R_n$. Тогда, очевидно, $T \cap R_2 \ldots R_n = 1$ и, следовательно, $|G : TR_2 \ldots R_n| \leq |M_1|$. Ясно, что $TR_2 \ldots R_n \neq G$. Но так как $R_1TR_2 \ldots R_n = G$, имеем $|G : TR_2 \ldots T_n| = |R_1|$; противоречие. Следовательно, найдется такая минимальная нормальная подгруппа Δ_1 в G, что $\Delta_1 \leq T \cap R_2 \ldots R_n$. Заметим, что, поскольку

$$\bigcap_{i=2}^{n} R_2 \ldots R_{i-1}R_{i+1} \ldots R_n = 1,$$

найдется индекс j такой, что

$$R_2 \ldots R_{j-1}R_jR_{j+1} \ldots R_n = R_2 \ldots R_{j-1}\Delta_1R_{j+1} \ldots R_n.$$

Таким образом, мы можем предполагать без потери общности, что найдется индекс $2 \leq i < n$ такой, что $R_2, \ldots, R_{i-1} \leq T$ и для каждой минимальной нормальной подгруппы Δ_2 из G, содержащейся в $R_i \ldots R_n$, имеет место $\Delta_2 \not\leq T$. Это, в частности, означает, что $T \cap R_i \ldots R_n = 1$. Теперь пусть $\Delta_3 = R_1R_i \ldots R_n \cap T$. Предположим, что $\Delta_3 = 1$. Тогда $G = TR_1 \ldots R_n = TR_1R_i \ldots R_n$, откуда $|G : T| = |R_1||R_i| \ldots |R_n|$. С другой стороны, $G = TM_1R_2 \ldots R_n = TM_1R_i \ldots R_n$, что влечет $|G:T| \leq |M_1||R_i|\dots|R_n|$; противоречие. Следовательно, $\Delta_3 \neq 1$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в Δ_3. Поскольку $L \leq T$, то $L \nleq R_i \dots R_n$. Но $L \leq R_1 R_i \dots R_n$ и поэтому $LR_i \dots R_n = R_1 R_i \dots R_n$, так что

$$G = TR_1R_2\dots R_n = R_2 \dots R_i T R_1 R_i \dots R_n$$
$$= R_2 \dots R_i T L R_i \dots R_n = R_2 \dots R_i T R_i \dots R_n = TR_i \dots R_n.$$

Следовательно, $G/R_i \dots R_n \simeq T/(T \cap R_i \dots R_n)$ — p-сверхразрешимая группа. Это означает, что $R_1 \simeq R_1R_i \dots R_n / R_i \dots R_n$ — группа простого порядка; противоречие. Таким образом, для каждого $i = 1, 2, \dots, t$ группа R_i имеет простой порядок.

Пусть теперь D — наименьшая по включению нормальная подгруппа группы G с p-сверхразрешимой фактор-группой G/D. Тогда $D \subseteq N$ и $D \neq 1$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в D. Тогда L — абелева группа, а значит, $L \subseteq F(N)$. Поскольку $\Phi(G) = 1$, в группе G найдется такая максимальная подгруппа M, что $LM = G$. Понятно, что $F(N) \nsubseteq M$, и поэтому $R_i \nsubseteq M$ при некотором $i \in \{1, \dots, t\}$. Согласно лемме 2.15 имеет место изоморфизм $G/M_G \simeq [R_iM_G/M_G](G/C_G(R_iM_G/M_G))$. Поскольку при этом $|R_iM_G/M_G| = |R_i|$, группа G/M_G является метациклической, а значит, сверхразрешимой. Следовательно, $D \subseteq M_G$, что влечет $L \subseteq M$. Но тогда $G = LM = M$. Это противоречие заканчивает доказательство теоремы.

4. Несколько приложений

1. p-Нильпотентные аналоги теорем 3.4, 3.6. Используя теоремы 3.4, 3.6, докажем следующие два утверждения.

Следствие 4.1. *Пусть G — группа, имеющая неединичную p-разрешимую нормальную подгруппу N с p-нильпотентной фактор-группой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N имеет p-нильпотентное добавление в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда группа $N = G$ монолитична и ее единственная минимальная нормальная подгруппа R такова, что $R = C_G(R) = O_p(G)$ (см. доказательство теоремы 3.4). Согласно теореме 3.4 G — p-сверхразрешимая группа. Значит, $|R| = p$, и поэтому G/R — абелева группа. Следовательно, R — силовская p-подгруппа в G, и тем самым согласно условию группа G p-нильпотентна.

Следствие 4.2. *Пусть G — группа, имеющая неединичную разрешимую нормальную подгруппу N с p-нильпотентной фактор-группой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N)$ имеет p-нильпотентное добавление в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно, и пусть G — контрпример минимального порядка. В этом случае имеем $\Phi(N) = \Phi(G) = 1$ и $F(N)$ — прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгрупп группы G (см. доказательство теоремы 3.6). Пусть R — силовская q-подгруппа в $F(N)$ и M — максимальная подгруппа в R. Тогда по условию в группе G найдется p-нильпотентная подгруппа T в G такая, что $MT = G$. Если $q \neq p$, то R — p'-группа и G p-нильпотентна, это противоречит выбору группы G.

Следовательно, $R = F(N) = O_p(N)$. Пусть $F(N) = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — минимальные нормальные подгруппы группы G. Из теоремы 3.6 имеем $|R_i| = p$ для всех $n = 1, 2, \ldots, n$. Тем самым для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ подгруппа $M_i = R_1 \times \cdots \times R_{i-1} \times R_{i+1} \times \cdots \times R_n$ максимальна в R и $M_i \trianglelefteq G$. По условию для каждого i в группе G найдется подгруппа T_i такая, что $T_iM_i = G$ и $T_i/T_i \cap M_i \simeq T_iM_i/M_i = G/M_i$ — p-нильпотентная группа. Пусть $n > 1$. Тогда $D = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i = 1$ и поэтому группа G p-нильпотентна. Если же n =1, то $R = R_1$ — группа порядка p с единичной максимальной подгруппой. Следовательно, G — p-нильпотентная группа согласно условию следствия. Это противоречие заканчивает доказательство данного следствия.

2. p-Сверхразрешимые расширения p-сверхразрешимых групп. Хорошо известно, что расширение p-сверхразрешимой группы при помощи p-сверхразрешимой группы в общем случае p-сверхразрешимой группой не является. Следующие следствия теорем 3.4, 3.6 дают достаточные условия, при которых такое расширение является p-сверхразрешимой группой.

Следствие 4.3. *Пусть G — группа, являющаяся расширением p-сверхразрешимой группы N при помощи p-сверхразрешимой группы. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N перестановочна в G, то G p-сверхразрешима.*

Следствие 4.4. *Пусть G — разрешимая группа, являющаяся расширением p-сверхразрешимой группы N при помощи p-сверхразрешимой группы. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N)$ условно перестановочна в G, то G p-сверхразрешима.*

Отметим еще два следствия теорем 3.4, 3.6.

Следствие 4.5. *Пусть G — группа, являющаяся расширением сверхразрешимой группы N при помощи сверхразрешимой группы. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N перестановочна в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.6. *Пусть G — группа, являющаяся расширением сверхразрешимой группы N при помощи сверхразрешимой группы. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N)$ условно перестановочна в G, то G сверхразрешима.*

При $N = G$ теоремы 3.4, 3.6 дают следующие критерии сверхразрешимости групп.

Следствие 4.7. *Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы группы G перестановочна, то G сверхразрешима.*

Доказательство. В силу теоремы 3.4 необходимо лишь установить, что группа G разрешима. Это конечно так, если все ее силовские подгруппы цикличны. В противном случае пусть P — нециклическая силовская подгруппа в G и P_1 — максимальная подгруппа в P. Ясно, что $P_1 \neq 1$. Значит, если $P_1 \trianglelefteq G$, то, применяя лемму 3.2, по индукции видим, что группа G разрешима. Пусть $N_G(P_1) \neq G$ и $x \in G \setminus N_G(P_1)$. Тогда $P_1P_1^x$ — перестановочная силовская подгруппа в G. Значит, $P_1P_1^x \trianglelefteq G$, откуда снова следует, что группа G разрешима.

Следствие 4.8. *Разрешимая группа G является сверхразрешимой, если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(G)$ условно перестановочна в G.*

3. G-Накрывающие системы для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных групп. Дадим теперь локальные версии основных результатов работ [6, 7].

Следствие 4.9. *Пусть G — p-разрешимая группа, Σ — множество ее подгрупп, которому принадлежит по крайней мере одно добавление к каждой максимальной подгруппе каждой силовской подгруппы группы G. Тогда Σ одновременно является G-накрывающей системой для классов p-нильпотентных и p-сверхразрешимых групп.*

Следствие 4.10. *Пусть G — разрешимая группа, Σ — множество ее подгрупп, которому принадлежит по крайней мере одно добавление к каждой максимальной подгруппе каждой силовской подгруппы из $F(G)$. Тогда Σ одновременно является G-накрывающей системой для классов p-нильпотентных и p-сверхразрешимых групп.*

5. Заключительные замечания

1. В книге Л. А. Шеметкова [9] символом $\widetilde{F}(G)$ обозначена подгруппа, которая определяется следующим образом: 1) $\Phi(G) \subseteq \widetilde{F}(G)$; 2) $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$ — цоколь группы $G/\Phi(G)$, т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$. Теорема 3.6 может быть несколько усилена следующим образом.

Пусть G — группа, которая содержит неединичную p-разрешимую нормальную подгруппу N с p-сверхразрешимой фактор-группой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $\widetilde{F}(N)$, не являющаяся условно перестановочной в G, имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то G p-сверхразрешима.

2. Мы не знаем, можно ли в теореме 3.4 условие «не являющаяся перестановочной в G» заменить условием «не являющаяся условно перестановочной в G». Это, в частности, приводит к следующим вопросам.

Верно ли, что группа G разрешима, если все ее максимальные подгруппы всех ее силовских подгрупп условно перестановочны?

Верно ли, что разрешимая группа G сверхразрешима (p-сверхразрешима) если все максимальные подгруппы всех ее силовских подгрупп, не являющиеся условно перестановочными в G, обладают сверхразрешимыми (соответственно обладают p-сверхразрешимыми) добавлениями в G?

3. Условие p-разрешимости (разрешимости) в следствиях 4.9 и 4.10 может быть опущено, если воспользоваться теоремой 5.8 работы [14].

4. Сверхразрешимость групп, у которых все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп нормальны, была доказана в работе [15].

5. Пусть $G = S_3 \times S_3$ и G_3 — силовская 3-подгруппа в G. Понятно, что G — сверхразрешимая группа и $F(G) = G_3$. Пусть P — неинвариантная максимальная в G_3 подгруппа. Тогда P не является условно перестановочной в G. Таким образом, обращения следствий 4.7 и 4.8 не имеют места. Было бы интересно описать группы, у которых все максимальные подгруппы всех ее силовских подгрупп (всех силовских подгрупп из $F(G)$) условно перестановочны в G. Отметим, что группы, у которых все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп нормальны, описаны в [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Модельные соответствия // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 3. С. 313–336.
2. *Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I.* Fundamentals of the theory of groups. 2nd edn. Translated from Russian by Burns R. G. New York: Springer-Verl., 1979.
3. *Bianchi M., Mauri A. G. B., Hauck P.* On finite groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch. Math. 1986. V. 47. P. 193–197.
4. *Fedri V., Serens L.* Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers // Arch. Math. 1988. V. 50. P. 11–18.
5. *Huppert B.* Normalteiler and maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
6. *Guo Wenbin, Shum K. P., Skiba A. N.* *G*-Covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups. Гомель, 2001. (Препринт ГГУ; № 21).
7. *Guo Wenbin, Shum K. P., Skiba A. N.* *G*-Covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. (to appear).
8. *Guo Wenbin.* The theory of groups classes. Beijing: Sci. Press, 1997.
9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
10. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.
11. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
12. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
13. *Guo Wenbin, Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups. Гомель, 2003. (Препринт ГГУ, № 49).
14. *Arad Z., Fisman E.* On finite factorizable groups // J. Algebra. 1984. V. 86. P. 522–548.
15. *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35. P. 210–214.
16. *Wall G.* Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal // Israel J. Math. 1982. V. 43. P. 166–168.

Статья поступила 17 сентября 2003 г.

Guo Wenbin (Го Веньбинь)
Department of Mathematics,
Xuzhou Normal University,
Xuzhou 221116, P. R. China
wbguo@pub.xz.jsinfo.net

Kar-Ping Shum (Кар-Пинг Шам)
Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong,
Shatin, Hong Kong, P. R. China (SAR)
kpshum@math.cuhk.edu.hk

Скиба Александр Николаевич
Гомельский университет им. Ф. Скорины, математический факультет,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
skiba@gsu.unibel.by