Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 1993. Том 34, № 5

УДК 519.44

О ФОРМАЦИЯХ ВИДА $\mathfrak{S}\mathfrak{H}$

А. Н. Скиба

Пусть f — функция, сопоставляющая каждой группе некоторую формацию и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(1) = \mathfrak{G}$ — класс всех групп;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\varphi}) \cap f(\operatorname{Ker}\varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G.

Такая функция f называется ***экраном*** [1]. Говорят, что некоторая группа операторов A действует ***f-стабильно*** на G (или является ***f-стабильной группой операторов***), если в G имеется такая субнормальная цепь A-допустимых подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_t = G,$$

что

$$A/C_A(G_{i-1}/G_i) \in f(G_{i-1}/G_i)$$

для любого $i = 1, \ldots, t$. Класс групп, действующих f-стабильно на самих себе, составляет ***формацию*** $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$.

Согласно теореме Л. А. Шеметкова [2] всякая f-стабильная группа автоморфизмов произвольной конечной группы принадлежит $\langle f \rangle$, если f — внутренний примарно постоянный экран, т. е. $f(H) \subseteq \langle f \rangle$ для любой группы $H \neq 1$ и функция f постоянна на всех неединичных p-группах для любого фиксированного простого p. Последнее требование минимально возможное, если учесть, что теория формаций развивается по модулю p-групп.

Классические результаты о подгруппе Фраттини подсказывают, что если группа A действует f-стабильно не на всей группе G, а на ее секции

$$\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = \operatorname{Soc}(G/\Phi(G)),$$

то можно надеяться, что A действует f-стабильно и на $\Phi(G)$. В «Коуровской тетради» (1990 г., вып. 11) под номером 6.52 помещен следующий вопрос Л. А. Шеметкова: пусть f — локальный экран формации, содержащий все нильпотентные группы, $A \subseteq \operatorname{Aut} G$. Пусть A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$. Доказать, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$.

Здесь мы покажем, что в общем случае эта задача решается отрицательно, а все те локальные формации, для которых она имеет положительное решение, исчерпываются формациями вида $\mathfrak{S}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп, а $\mathfrak{H}$ — произвольная непустая формация. Это вытекает из следующей, доказываемой ниже, теоремы.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{S}_\pi$ — формация всех разрешимых π-групп, а $\mathfrak{H}$ — произвольная непустая формация с $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$;*

2) *$\mathfrak{F}$ имеет локальный или внутренний однородный экран f, такой что для любой группы автоморфизмов A произвольной группы G с $\pi(\widetilde{F}(G)) \subseteq \pi$ из того, что A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$.*

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы будем использовать терминологию из [1, 3]. Напомним лишь, что примарно постоянный экран f называется *однородным* (*локальным*), если $f(G) \subseteq \bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ (соответственно $f(G) = \bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$) для любой неединичной группы G. Понятно, что каждый локальный экран однороден.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть f_1 — произвольный локальный экран формации $\mathfrak{F}$ и f — такой ее локальный экран, что для всех простых p имеет место $f(p) = \mathfrak{N}_p f_1(p)$. Пусть A — группа автоморфизмов некоторой группы G. Тогда из того, что A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$, в том и только в том случае, если утверждение справедливо относительно экрана f_1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть из того, что A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, вытекает, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Предположим, что A действует f_1-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$. Тогда согласно определению существует такой субнормальный A-допустимый ряд

$$\Phi(G)/\Phi(G) = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_t = \widetilde{F}(G)/\Phi(G),$$

каждый фактор которого f_1-централен в A, т. е.

$$A/C_A(H_i/H_{i-1}) \in f_1(H_i/H_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, t.$$

Но при всех простых p имеет место включение $f_1(p) \subseteq f(p)$. Значит, $f_1(H_i/H_{i-1}) \subseteq f(H_i/H_{i-1})$. Таким образом, A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, и поэтому согласно нашему предположению A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Пусть

$$1 = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_a = \Phi(G) \tag{1}$$

— такой субнормальный A-допустимый ряд группы $\Phi(G)$, что для всякого $i \in \{1, \ldots, a\}$

$$A/C_A(L_i/L_{i-1}) \in f(L_i/L_{i-1}). \tag{2}$$

Поскольку отношение принадлежности (2) сохраняется и для ряда, полученного из ряда (1) путем его уплотнения и последующего отбрасывания повторяющихся членов, не теряя общности, можно считать, что ряд (1) A-композиционный. Последнее, в частности, означает, что факторы ряда (1) абелевы и элементарны. Значит, если $p \in \pi(L_i/L_{i-1})$, то L_i/L_{i-1} — p-группа и, кроме того,

$$A/C_A(L_i/L_{i-1}) \in f(p) = \mathfrak{N}_p f_1(p).$$

С учетом леммы 3.9 из [1] $O_p(A/C_A(L_i/L_{i-1})) = 1$. Следовательно, имеем $A/C_A(L_i/L_{i-1}) \in f_1(p)$. Таким образом, A действует f_1-стабильно на $\Phi(G)$.

Аналогично покажем, что если f_1-стабильность действия группы A на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ влечет f_1-стабильность действия ее на $\Phi(G)$, то подобное утверждение справедливо и относительно экрана f. Лемма доказана.

Так же докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть f_1 — произвольный однородный экран формации $\mathfrak{F}$ и f — такой ее однородный экран, что для всех простых p имеет место равенство $f(p) = \mathfrak{N}_p f_1(p)$. Пусть A — группа автоморфизмов некоторой группы G. Тогда из того, что A действует f-стабильно на $F(G)/\Phi(G)$, следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$ в том и только в том случае, если утверждение справедливо относительно экрана f_1.*

Лемма 3. *Для любых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ справедлива формула*

$$\mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{M}\mathfrak{H} = (\mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{M})(\mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{H}). \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда $A/A^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{H}$. Но $A^{\mathfrak{H}} \subseteq A^{\mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{H}}$. Значит, $A^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{H}\cap\mathfrak{G}_\pi} \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_\pi$, т. е. $A \in (\mathfrak{M}\cap\mathfrak{G}_\pi)(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{G}_\pi)$.

Обратно, пусть $A \in (\mathfrak{M}\cap\mathfrak{G}_\pi)(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{G}_\pi)$. Отсюда $A \in \mathfrak{G}_\pi$. Значит, $A^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{H}\cap\mathfrak{G}_\pi}$, и поэтому $A^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Лемма доказана.

В дальнейшем мы часто будем использовать следующую очевидную лемму.

Лемма 4. *Пусть группа G монолитична и $O_p(G) = 1$. Тогда существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль.*

Лемма 5. *Формация $\mathfrak{F}$ обладает таким локальным экраном f, что для всех p, $q \in \pi = \pi(\mathfrak{F})$ имеют место равенства $f(p) = f(q)$ и $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$ для некоторой формации $\mathfrak{H}$ с $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Хорошо известно, что формация $\mathfrak{F}$ допускает представление в виде

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)\right). \tag{4}$$

В силу леммы 3 правая часть равенства (4) допускает такую запись:

$$\mathfrak{G}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)\right) = \bigcap_{p\in\pi} \left(\mathfrak{G}_{\pi\setminus\{p\}}\mathfrak{N}_p\big(f(p)\cap\mathfrak{G}_\pi\big)\right). \tag{5}$$

Поскольку для любого множества формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ и всякой формации $\mathfrak{H}$ имеет место равенство

$$\left(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{M}_i\right)\mathfrak{H} = \bigcap_{i\in I}(\mathfrak{M}_i\mathfrak{H})$$

и, кроме того, $f(p) = f(q)$ для всех p, $q \in \pi$, имеем

$$\bigcap_{p\in\pi}\left(\mathfrak{G}_{\pi\setminus\{p\}}\mathfrak{N}_p\big(f(p)\cap\mathfrak{G}_\pi\big)\right) = \bigcap_{p\in\pi}\left(\mathfrak{G}_{\pi\setminus\{p\}}\mathfrak{N}_p\big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big)\right),$$

где $r \in \pi$. Очевидно, что $\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{G}_{\pi\setminus\{p\}}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_\pi$ — формация нильпотентных π-групп. Таким образом, учитывая (4) и (5), получаем $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi\big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big)$.

Покажем, что

$$\mathfrak{C}_\pi\big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big) = f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi.$$

Включение $f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi \subseteq \mathfrak{C}_\pi\big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big)$ очевидно. Предположим, что обратное включение неверно, и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{C}_\pi\big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big) \setminus \big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big)$. Тогда группа A монолитична и ее монолит R совпадает с $A^{f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi} \in \mathfrak{C}_\pi$. Значит, R — p-группа для некоторого $p \in \pi$. Согласно условию $f(p) = f(r) = \mathfrak{N}_r f(r)$. Следовательно, $A \in \mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_r f(r) = f(p) = f(r)$. Кроме того, очевидно, $A \in \mathfrak{G}_\pi$, так что $A \in f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{C}_\pi\big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big) = f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi$, и поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi\big(f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi\big) = f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = f(r)\cap\mathfrak{G}_\pi$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{H}$ — формация с $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$. Если $|\pi| = 1$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ для некоторого простого числа p и искомый локальный экран f таков, что $f(p) = \mathfrak{N}_p$ и $f(q) = \varnothing$ при всех простых $q \neq p$. Пусть $|\pi| > 1$. В этом случае для доказательства достаточности установим, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi$, где f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Пусть $f(p) \neq \mathfrak{F}$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \backslash f(p)$. Тогда группа A монолитична и если R — ее монолит, то ввиду условия $|\pi| > 1$ найдется такое $q \in \pi$, что R не является q-группой. Согласно лемме 4 существует точный неприводимый $F_q[A]$-модуль Q. Пусть $B = Q \leftthreetimes A$. Тогда если $r \in \pi \setminus \{q\}$, то существует точный неприводимый $F_r[B]$-модуль R. Пусть $D = R \leftthreetimes B$. Так как

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{C}_\pi(\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}) = (\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{C}_\pi)\mathfrak{H} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{F}$$

и $A \in \mathfrak{F}$, имеем $D \in \mathfrak{F}$. Как нетрудно заметить, $F_r(D) = R$ и $F_q(D) = RQ$, и поэтому

$$B \simeq D/R \in f(r), \quad A \simeq D/F_q(D) \in f(q).$$

В качестве одного из чисел q, r мы можем взять p, следовательно, $A \in f(p)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Если V — некоторый неприводимый $F_p[G]$-модуль, то через P_V обозначают такой (главный) неразложимый проективный $F_p[G]$-модуль, что $P_V/P_VJ \simeq V$, где J — радикал Джекобсона групповой алгебры $F_p[G]$. Пусть V — неприводимый тривиальный $F_p[G]$-модуль. Тогда, следуя [4], через $A_{F_p}(G)$ обозначим ядро проективного накрытия $P \to P_VJ$. В дальнейшем нам потребуются два результата о модуле $A_{F_p}(G)$, которые мы сформулируем в виде следующих двух лемм.

Лемма 6 [4]. *Пусть простое число p делит $|G|$. Тогда централизатор в G цоколя модуля $A_{F_p}(G)$ совпадает с $F_p(G)$.*

Групповое расширение $A \rightarrowtail G_1 \twoheadrightarrow G$ называют ***фраттиниевым расширением группы*** G, если $A \subseteq \Phi(G_1)$.

Лемма 7 [5]. *Пусть простое число p делит $|G|$. Тогда существует такое фраттиниево расширение $A \rightarrowtail G_1 \twoheadrightarrow G$ группы G, что элементарная абелева p-группа A, рассматриваемая как $F_p[G]$-модуль, изоморфна $A_{F_p}(G)$ и всякое фраттиниево расширение $A_1 \rightarrowtail G_2 \twoheadrightarrow G$, где A_1 — элементарная абелева p-группа, является гомоморфным образом группы G_1.*

Лемма 8. *Пусть π — произвольное непустое множество простых чисел, f — локальный (однородный) экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть для произвольной группы автоморфизмов A произвольной группы G с $\pi(\widetilde{F}(G)) \subseteq \pi$ из того, что A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Тогда для любых таких p, $q \in \pi$, что $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ и $\mathfrak{N}_q f(q) = f(q)$, имеет место равенство $f(p) = f(q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(p) \not\subseteq f(q)$. Тогда $f(p) \neq \varnothing$, и поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq f(p)$. Пусть A_1 при $f(q) = \varnothing$ есть группа порядка p, а при $f(q) \neq \varnothing$ — группа минимального порядка из $f(p) \setminus f(q)$. Так как $\mathfrak{N}_q f(q) = f(q)$, в любом из случаев $O_q(A_1) = 1$. Кроме того, группа A_1 монолитична. Таким образом, согласно лемме 4 существует точный неприводимый $F_q[A_1]$-модуль L. Пусть $B = L \leftthreetimes A_1$. Группа B также монолитична, и уже $O_p(B) = 1$. Следовательно, существует точный неприводимый $F_p[B]$-модуль P. Обозначим через D_1 группу $P \leftthreetimes B$.

В силу леммы 7 существует такое фраттиниево расширение $Q \rightarrowtail D \twoheadrightarrow D_1$ группы D_1, что Q — элементарная абелева q-группа, причем Q, рассматриваемая как $F_q[D_1]$-модуль, изоморфна $A_{F_q}(D_1)$. Пусть

$L = L_1 \times \ldots \times L_t$ — цоколь $F_q[D_1]$-модуля Q, где L_i — неприводимый $F_q[D_1]$-подмодуль $F_q[D_1]$-модуля Q. Тогда согласно лемме 6 имеем $C_{D_1}(L) = F_q(D_1) = PL$. Пусть $C_i = C_{D_1}(L_i)$. Понятно, что $C_{D_1}(L) = C_1 \cap \ldots \cap C_t$.

Обозначим через R монолит группы A_1. Предположим, что $C_i \cap A_1 \neq 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, t\}$. Тогда поскольку $C_i \cap A_1$ — нормальная в A_1 подгруппа, имеем $R \subseteq C_D(L)$, что невозможно. Следовательно, найдется такое $a \in \{1, \ldots, t\}$, что $C_{A_1}(L_a) = 1$.

Пусть N — наибольшая по включению нормальная подгруппа группы D, входящая в Q, содержащая $L_1 \times \ldots \times L_{a-1} \times L_{a+1} \times \ldots \times L_t$, но не содержащая L_a. Обозначим через G факторгруппу D/N. Ввиду D-изоморфизма $L_aN/N \simeq L_a/N \cap L_a = L_a/1$ получим следующее равенство: $C_D(L_aN/N) = C_D(L_a)$.

Покажем, что в G нет минимальных нормальных q-подгрупп, отличных от L_aN/N. Предположим противное, и пусть M/N — произвольная минимальная нормальная q-подгруппа из G, отличная от L_aN/N. Пусть $M \not\subseteq Q$. Тогда поскольку $N \subseteq Q \cap M$ и имеет место D-изоморфизм $MQ/Q \simeq M/Q \cap M$, в $D_1 \simeq D/Q$ есть неединичная нормальная q-подгруппа MQ/Q, что противоречит строению группы D_1. Итак, $M \subseteq Q$. Так как $M/N \neq L_aN/N$, будет $L_a \not\subseteq M$. Кроме того, $M \neq N$ и

$$L_1 \times \ldots \times L_{a-1} \times L_{a+1} \times \ldots \times L_t \subseteq N \subseteq M.$$

Последнее противоречит определению группы N. Таким образом, L_aN/N — единственная минимальная нормальная q-подгруппа в группе G.

Пусть при изоморфизме $G/(Q/N) \simeq D/Q \simeq D_1$ подгруппе A_1 из D_1 в $G/(Q/N)$ соответствует подгруппа $(A/N)/(Q/N)$. Покажем, что A/N — группа автоморфизмов группы G. Предположим, что имеет место противное, т. е. в A/N найдется такой элемент a, что для всех $x \in G$ справедливо равенство $a^{-1}xa = x$. Но тогда $Z(G) \neq 1$. Пусть T/N — минимальная нормальная подгруппа из G, входящая в $Z(G)$. Допустим, что $T/N \not\subseteq Q/N$. Тогда в $G/(Q/N) \simeq D_1$ имеется неединичная нормальная подгруппа $((T/N)(Q/N))/(Q/N)$, входящая в центр группы $G/(Q/N)$. Последнее, однако, невозможно, поскольку $D_1 = P \leftthreetimes B$, где $P = C_{D_1}(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в D_1. Итак, $T/N \subseteq Q/N$. Но тогда $T/N = L_aN/N$. Следовательно,

$$C_{D/N}(L_aN/N) = C_D(L_aN/N)/N = D/N.$$

Вспоминая, что $C_D(L_aN/N) = C_D(L_a)$, получаем $C_{A_1}(L_a) = A_1$. Последнее противоречит определению группы L_a. Таким образом, $Z(G) = 1$, и поэтому A/N — группа автоморфизмов группы G.

Покажем, что A/N действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$. Легко видеть, что $\Phi(G) = Q/N$. Но P — единственная минимальная нормальная подгруппа в D_1 и $C_{D_1}(P) = P$, так что

$$\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = F(G)/\Phi(G) = O_p(G/\Phi(G))$$

— единственная минимальная нормальная p-группа в $G/\Phi(G)$. Последнее, в частности, означает, что любой (A/N)-композиционный фактор H/K группы $F(G)/\Phi(G)$ является p-группой и, очевидно, $Q/N \subseteq C_{A/N}(H/K)$. Но $(A/N)/(Q/N) \simeq A_1 \in f(p)$. Значит, $(A/N)/C_{A/N}(H/K) \in f(p)$. Таким образом, A/N действует f-стабильно на $F(G)/\Phi(G)$. Ясно, что $\pi(F(G)) = \{p, q\} \subseteq \pi$. Поэтому согласно условию леммы группа A/N действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Пусть

$$N/N = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_t = Q/N$$

— такой (A/N)-композиционный ряд группы Q/N, все факторы которого f-центральны относительно A, и пусть

$$C_i = C_{A/N}(H_i/H_{i-1}), \quad i = 1, \ldots , t.$$

Обозначим через C пересечение $C_1 \cap \ldots \cap C_t$. Поскольку

$$C_{A/N}(Q/N) = C_{A/N}(L_a N/N) = 1,$$

A/N — группа автоморфизмов для Q/N. Следовательно, C — стабильная группа автоморфизмов группы Q/N. Привлекая лемму 3.11 из [1], видим, что C является q-группой. Кроме того, C — нормальная подгруппа в A/N. Тем самым $C \subseteq O_q(A/N)$. Но $A/N \simeq A_1$ и $O_q(A_1) = 1$. Значит, $C = 1$. Таким образом,

$$A/N \in R_0\{(A/N)/C_i \mid i = 1, \ldots , t\} \subseteq f(q).$$

Последнее означает, что $A_1 \in f(q)$. Полученное противоречие показывает, что $f(p) \subseteq f(q)$. Итак, $f(p) = f(q)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и π_1 — произвольное множество простых чисел, содержащее π. Предположим, что $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что для всякой группы автоморфизмов A произвольной группы G с $\pi(\widetilde{F}(G)) \subseteq \pi_1$ из того, что A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Покажем, что тогда $\pi = \pi_1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$ для некоторой формации $\mathfrak{H}$ с $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$.

Пусть f_1 — такой локальный экран формации $\mathfrak{F}$, что $f_1(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех простых p. Ввиду леммы 1 наше предположение сохраняется и относительно экрана f_1. Значит, ввиду леммы 8 для всех $p, q \in \pi_1$ имеет место равенство $f_1(p) = f_1(q)$. Заметим, что если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $f_1(p) \neq \varnothing$. В противном случае $f(p) = \varnothing$. Следовательно, $\pi = \pi_1$. Кроме того, в силу леммы 5 можем заключить, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — формация с $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{H}$ — формация с $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ обладает таким локальным экраном f, что если A — произвольная группа автоморфизмов группы G с $\pi(\widetilde{F}(G)) \subseteq \pi$ и A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, то A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Для этого можно использовать схему доказательства теоремы Л. Ф. Шеметкова [1, теорема 9.18].

Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, $L/\Phi(G)$ — минимальная A-допустимая нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Рассмотрим произвольный A-композиционный фактор H/K группы G, лежащий между $\Phi(G)$ и $\widetilde{F}(G)$. Тогда согласно нашему предположению

$$A/C_A(H/K) \in f(H/K) = \bigcap_{p \in \pi(H/K)} f(p). \tag{6}$$

Из леммы 5 следует, что для всех $p, q \in \pi$ имеет место равенство $f(p) = f(q)$. Как установлено в ходе доказательства этой леммы, $f(p) = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$, если $p \in \pi$. Так как $\pi(H/K) \subseteq \pi(\widetilde{F}(G)) \subseteq \pi$, из (6) вытекает, что

$$A/C_A(H/K) \in f(p) = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Итак, $A^{\mathfrak{F}}$ действует стабильно на $L/\Phi(G)$. Значит, если $p \in \pi(H/K)$, то согласно лемме 9.3 из [1]

$$A^{\mathfrak{F}}/C_{A^{\mathfrak{F}}}(L/\Phi(G)) \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}.$$

Но $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Тогда $A/C_{A^{\mathfrak{F}}}(L/\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$. Значит, $A^{\mathfrak{F}} = C_{A^{\mathfrak{F}}}(L/\Phi(G))$. Таким образом, $A^{\mathfrak{F}}$ действует тождественно на $L/\Phi(G)$. Поскольку $L/\Phi(G)$ была взята произвольно, тем самым доказано, что $A^{\mathfrak{F}}$ действует тождественно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$. Применяя лемму 9.21 из [1], видим, что $A^{\mathfrak{F}}$ — стабильная группа автоморфизмов для G. Снова используя лемму 9.3 из [1] заключаем, что $\pi(A^{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi(F(G)) \subseteq \pi$. Но тогда $A^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{C}_\pi$, и потому $A \in \mathfrak{F}$. Так как $\pi(\Phi(G)) \subseteq \pi$ и для всех $p \in \pi$ имеет место равенство $f(p) = \mathfrak{F}$, из последнего вытекает, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$.

Для завершения доказательства теоремы нам необходимо рассмотреть случай, когда f — внутренний однородный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как всякий локальный экран однороден, в силу уже доказанного достаточно лишь установить, что если выполняется условие 2, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая непустая формация с $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$. Применяя леммы 2 и 8, как и выше, убеждаемся, что $f(p) = f(q)$ для всех $p \in \pi$. Пусть теперь f_1 — такой локальный экран, что $f_1(p) = f(p)$ для всех простых p. Как показано в ходе доказательства теоремы Л. Ф. Шеметкова [1, теорема 3.5], f_1 является экраном формации $\mathfrak{F}$. Экран f_1 удовлетворяет условию 2, значит, справедливо и условие 1. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}\mathfrak{H}$, *где $\mathfrak{H}$ — произвольная непустая формация*;

2) *$\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что для любой группы автоморфизмов A произвольной группы G из того, что A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$, следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формация конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. *Шеметков Л. А.* Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.
3. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
4. *Griess R., Schmid P.* The Frattini module // Arch. Math. 1978. V. 51, N 3. P. 256–266.
5. *Gaschütz W.* Über modulare Darstellungen endlicher gruppen, die von freien Gruppen induziert Werden // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 274–286.

г. Гомель *Статья поступила 25 ноября 1992 г.*