Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 512.542

ОБ УСЛОВИЯХ ЦИКЛИЧНОСТИ G–ГЛАВНЫХ ФАКТОРОВ НОРМАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ G

А. Н. Скиба

Аннотация. Найдены условия, при которых каждый G-главный фактор нормальной подгруппы E конечной группы G является циклическим.

Ключевые слова: слабо S-квазинормальная подгруппа, силовская подгруппа, обобщенная подгруппа Фиттинга, циклический главный фактор.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Подгруппа A группы G называется *S-квазинормальной*, *S-перестановочной* или *$\pi(G)$-перестановочной в* G [1], если $AP = PA$ для любой силовской подгруппы P группы G. Пусть символ H_{sG} обозначает подгруппу, порожденную всеми такими подгруппами из $H \leq G$, которые S-квазинормальны в G. Тогда подгруппа H называется *слабо S-квазинормальной в* G [2], если в G имеется такая субнормальная подгруппа T, что $T \cap H \leq H_{sG}$ и $HT = G$.

В данной заметке мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть $X \leq E$ — нормальные подгруппы группы G. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P из X имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$ и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P является неабелевой группой) слабо S-квазинормальны в G. Если $X = E$ или $X = F^*(E)$, то каждый G-главный фактор из E является циклическим.*

В этой теореме $F^*(E)$ обозначает обобщенную подгруппу Фиттинга группы E, которая совпадает с произведением всех нормальных квазинильпотентных подгрупп группы E [3, гл. X].

Данная теорема является развитием работы [4], в которой доказано, что при тех же условиях, что и в данной теореме, все нефраттиниевы G-главные факторы из E цикличны.

Вся используемая терминология стандартна. При необходимости читатель может обратиться к книгам [5–7]. Здесь лишь напомним, что символ $Z_{\mathscr{U}}(G)$ обозначает наибольшую нормальную подгруппу группы G, все главные факторы которой цикличны. Формация $\mathscr{F}$ — это такой гомоморф, что в каждой группе G имеется наименьшая нормальная подгруппа, обозначаемая через $G^{\mathscr{F}}$, со свойством $G/G^{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$. Символом $\mathscr{A}(p-1)$ обозначают формацию всех абелевых групп с экспонентой, делящей $p-1$ [8].

2. Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы, первые три из которых доказаны в работе [9].

Лемма 1 [9, лемма 2.2]. *Пусть E — нормальная p-подгруппа группы G. Если $E \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$, то $(G/C_G(E))^{\mathscr{A}(p-1)} \leq O_p(G/C_G(E))$.*

Лемма 2 [9, теорема C]. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Если каждый G-главный фактор из $F^*(E)$ циклический, то и каждый G-главный фактор из E цикличен.*

Лемма 3 [9, лемма 2.8]. *Пусть A, B и E — нормальные подгруппы группы G. Предположим, что $G = AB$. Если $E \leq Z_{\mathscr{U}}(A) \cap Z_{\mathscr{U}}(B)$ и $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то $E \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$.*

Лемма 4 [10, лемма 4]. *Пусть P — p-подгруппа группы G, где $p > 2$. Предположим, что все подгруппы порядка p, содержащиеся в P, являются S-квазинормальными в G. Если a — p'-элемент из $N_G(P) \setminus C_G(P)$, то $C_P(a) = 1$.*

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема неверна, и пусть (G, E) — контрпример с минимальным $|G||E|$. Прежде рассмотрим случай, когда $X = E$. Пусть P — силовская p-подгруппа группы E, где p — наименьший простой делитель порядка группы E и $C = C_G(P)$. В дальнейшем если P не является неабелевой 2-группой, то Ω обозначает подгруппу $\Omega_1(P)$. В противном случае полагаем $\Omega = \Omega_2(P)$.

(1) *Если X — холлова подгруппа из E, то условие теоремы выполняется для (X, X). Если, кроме того, X нормальна в G, то условие теоремы выполняется для (G, X) и для $(G/X, E/X)$.*

Утверждение непосредственно следует из леммы 2.10 работы [2].

(2) *Если X — неединичная нормальная холлова подгруппа группы E, то $X = E$.*

Так как X является характеристической подгруппой группы E, то X нормальна в G и ввиду (1) условие теоремы выполняется для $(G/X, E/X)$ и для (G, X). Предположим, что $1 \neq X \neq E$. Тогда $E/X \leq Z_{\mathscr{U}}(G/X)$ и $X \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$ по выбору (G, E). Следовательно, $E \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$. Полученное противоречие показывает, что $X = E$.

(3) *$E \neq G$.*

В силу выбора группы G это утверждение следует из [4, теорема 1.4].

(4) *$E = P$ не является минимальной нормальной подгруппой группы G.*

Предположим, что $E \neq P$. Ввиду (1) условие теоремы выполняется для (E, E). Следовательно, E является сверхразрешимой группой в силу (3) и выбора группы G. Значит, холловская p'-подгруппа V группы E нормальна в E, и $V \neq E$, что противоречит (2). Следовательно, $E = P$ и $|P| > p$. Итак, P не является минимальной нормальной подгруппой группы G по лемме 2.11 из [2].

(5) *$|N| \leq |D|$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в P.*

Это вытекает из леммы 2.11 работы [2].

(6) *Если $|P : D| > p$, то в G не существует такой нормальной максимальной подгруппы M, что $|G : M| = p$ и $MP = G$.*

В противном случае условие теоремы выполняется для $(G, E \cap M)$. Следовательно, теорема верна для $(G, E \cap M)$ ввиду выбора (G, E). С другой стороны, из G-изоморфизма $G/M \simeq E/M \cap E$ заключаем, что $E/M \cap E$ является циклическим главным фактором группы G. Следовательно, $E \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$, что противоречит выбору (G, E).

(7) *Если для каждой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в P, имеет место $P/N \leq Z_{\mathscr{U}}(G/N)$, то $\Phi(P) \neq 1$.*

Действительно, допустим, что $\Phi(P) = 1$. Тогда P является элементарной абелевой p-группой. Пусть $R \neq N$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Тогда $P/R \leq Z_{\mathscr{U}}(G/R)$. Таким образом, из G-изоморфизма $N \simeq NR/R$ заключаем, что $N \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$, значит, $P \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$. Полученное противоречие показывает, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G, содержащейся в P.

Пусть N_1 — произвольная максимальная подгруппа в N. Покажем, что N_1 S-квазинормальна в G. Пусть S — дополнение к N в P, B — подгруппа группы S такая, что $|N_1||B| = |D|$. Тогда по условию теоремы подгруппа $V = N_1B$ является слабо S-квазинормальной в G. Пусть T — субнормальная подгруппа группы G такая, что $G = TV$ и $T \cap V \leq V_{sG}$. Если $T = G$, то $V = V_{sG}$ S-квазинормальна в G и поэтому $V \cap N = V_{sG} \cap N = N_1B \cap N = N_1(B \cap N) = N_1$ S-квазинормальна в G по теореме 2 из [1]. Пусть $T \neq G$. Тогда $1 \neq T \cap P < P$. Так как $G = PT$ и P — абелева группа, то $T \cap P$ нормальна в G и, следовательно, $N \leq T \cap P$. Но тогда $N_1 \leq T$, что влечет $N_1 \leq V \cap T \leq V_{sG}$. Так как $N \cap V = N_1$, то $N \cap V_{sG} = N_1$ S-квазинормальна в G по теореме 2 работы [1]. Таким образом, каждая максимальная подгруппа из N S-квазинормальна в G. По лемме 2.11 из [2] это означает, что некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G. Но тогда $|N| = p$, что вместе с $P/N \leq Z_{\mathscr{U}}(G/N)$ влечет $P \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$. Полученное противоречие показывает, что $\Phi(P) \neq 1$.

(8) *$C_G(P/\Phi(P))/C$ является p-группой.*

Допустим, что данное утверждение неверно. Пусть $a \notin C$ — p'-элемент в $C_G(P/\Phi(P))$. Пусть $G_0 = [P](G/C)$. Тогда aC — неединичный p'-элемент в G/C и $aC \in C_{G_0}(P/\Phi(P))$, что противоречит теореме 1.4 из [11, глава 5]. Значит, $C_G(P/\Phi(P))/C$ — p-группа.

(9) *$P/\Phi(P) \nleq Z_{\mathscr{U}}(G/\Phi(P))$.*

Предположим, что $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathscr{U}}(G/\Phi(P))$. Тогда согласно лемме 1 группа $(G/C_G(P/\Phi(P)))^{\mathscr{A}(p-1)}$ является p-группой. Значит, ввиду (8) $(G/C)^{\mathscr{A}(p-1)}$ является p-группой. Пусть H/K — произвольный главный фактор группы G ниже $\Phi(P)$. Тогда $G/C_G(H/K) \in \mathscr{A}(p-1)$, так как $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$ по лемме 3.9 из [5, гл. 1]. Следовательно, $|H/K| = p$ по лемме 4.1 из [5, гл. 1]. Таким образом, $P \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$. Полученное противоречие завершает доказательство (9).

(10) $|P : D| > p$.

Предположим, что каждая максимальная подгруппа из P слабо S-квазинормальна в G. Тогда для каждой минимальной нормальной подгруппы группы G, содержащейся в P, условие теоремы выполняется для $(G/N, P/N)$. Следовательно, $P/N \leq Z_{\mathscr{U}}(G/N)$ по выбору (G, P). Отсюда ввиду (7) имеем $\Phi(P) \neq 1$. Тогда $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathscr{U}}(G/\Phi(P))$, что противоречит (9).

(11) *Каждая подгруппа H группы P с порядком $|H| = |D|$ и каждая циклическая подгруппа группы P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P — неабелева группа) S-квазинормальна в G.*

Данное утверждение следует из (6), (10) и леммы 2.10(5) из [2].

(12) $|D| > p$.

Допустим, что $|D| = p$.

(a) *В G имеется такая нормальная подгруппа $1 \neq R \leq P$, что P/R является нециклическим главным фактором группы G, $R \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$ и $V \leq R$ для любой нормальной подгруппы $V \neq P$ группы G, содержащейся в P.*

Пусть P/R — главный фактор группы G. Тогда условие теоремы выполняется для (G, R) и согласно (4) $R \neq 1$. Следовательно, $R \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$ по выбору (G, P). Пусть $V \neq P$ — произвольная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Тогда $V \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$. Если $V \nleq R$, то из G-изоморфизма $P/R = VR/R \simeq V/V \cap R$ заключаем, что $P \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$; противоречие с выбором (G, P). Таким образом, $V \leq R$.

(b) *$C_G(\Omega)/C$ — p-группа.*

Пусть $G_0 = [P](G/C)$. Если a — p'-элемент из $C_G(\Omega)$ такой, что $a \notin C$, то aC — неединичный p'-элемент в G/C и $aC \in C_{G_0}(\Omega)$, что противоречит теореме 2.4 из [12]. Таким образом, $C_G(\Omega)/C$ — p-группа.

(c) $\Omega \nleq Z_{\mathscr{U}}(G)$.

Допустим, что $\Omega \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$. Тогда по лемме 1 $(G/C_G(\Omega))^{\mathscr{A}(p-1)}$ является p-группой. Следовательно, ввиду (b) $(G/C)^{\mathscr{A}(p-1)}$ является p-группой. Таким образом, $G/C_G(P/R) \in \mathscr{A}(p-1)$, что влечет $|P/R| = p$. Полученное противоречие доказывает (c).

(d) $P \leq O^p(G)$.

Предположим, что $P \nleq O^p(G)$. Тогда в силу G-изоморфизма $O^p(G)P/O^p(G) \simeq P/O^p(G) \cap P$ группа G имеет циклический главный фактор вида P/V, где $O^p(G) \cap P \leq V$, что противоречит (a).

(e) $\Omega = P$.

Действительно, если $\Omega < P$, то ввиду (a) $\Omega \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$, что противоречит (c).

(f) *Найдется такое простое число $q \neq p$, которое делит $|G : C|$.*

В противном случае каждый G_p-главный фактор группы P, где G_p — силовская p-подгруппа из G, является G-главным фактором, что влечет $P \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$.

Заключительное противоречие для (12). В силу (e) имеет место

$$P/R = (V_1R/R)(V_2R/R)\ldots(V_tR/R),$$

где V_i — циклическая группа порядка p или 4 и V_iR/R — циклическая группа порядка p. Ввиду (11) V_i S-квазинормальна в G. Следовательно, если Q — силовская q-подгруппа группы G, где $q \neq p$, то для любого $i \leq t$ имеем $V_iQ = QV_i$ и V_i субнормальна в V_iQ [1, теорема 1]. Предположим, что $p = 2$. Тогда V_iQ нильпотентна, что влечет $Q \leq C_G(V_i)$. Следовательно, $O^p(G) \leq C_G(P/R)$, поэтому $C_G(P/R) = G$, что противоречит утверждению (a). Стало быть, $p > 2$. Заметим также, что $O^p(G) \neq G$. Действительно, если $O^p(G) = G$, то по лемме A из [13] V_iR/R — нормальная в G/R подгруппа. Тем самым $V_iR/R = P/R$ — циклическая группа, что противоречит (a).

Итак, $O^p(G) \neq G$. Покажем теперь, что для некоторого простого числа $q \neq p$ имеет место $O^q(G) \neq G$. Действительно, предположим, что для всех простых чисел $q \neq p$ имеет место $O^q(G) = G$. Тогда для любого G-главного фактора H/K порядка p имеет место $C_G(H/K) = G$. В частности, для минимальной подгруппы L из G, содержащейся в R, будет $L \leq Z(G)$. Следовательно, для любого p'-элемента из $G \setminus C$ имеет место $C_P(a) \neq 1$. Но тогда ввиду (11) и леммы 4 $O^p(G) \leq C$, что невозможно в силу (f). Таким образом, $P \leq O^q(G) \neq G$ для некоторого простого числа $q \neq p$. Поскольку $P \leq O^p(G) \neq G$, по лемме 3 $P \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$; противоречие.

Следовательно, $|D| > p$.

(13) *Если P — неабелева 2-группа, то $|D| > 4$.*

Здесь используем одно наблюдение из доказательства теоремы 1 из [14].

Так как P — неабелева 2-группа, в P имеется циклическая подгруппа $H = \langle x \rangle$ порядка 4. Предположим, что $|D| = 4$. Тогда ввиду (11) H S-квазинормальна в G и в силу леммы 2.6(2) работы [4] $\langle x^2 \rangle$ S-квазинормальна в G. Заметим, что если в G имеется подгруппа $V = A \times B$ порядка 4, где $|A| = 2$ и A S-квазинормальна в G, то V и B S-квазинормальны в G в силу утверждения (11) и леммы 2.6(1) из [4]. Следовательно, некоторая подгруппа Z из $Z(P)$ с $|Z| = 2$ является S-квазинормальной в G. Таким образом, каждая подгруппа порядка 2 из P S-квазинормальна в G, что противоречит (12).

(14) *Если N является абелевой минимальной нормальной подгруппой группы G, содержащейся в E, то условие теоремы выполняется для* $(G/N, E/N)$.

Если либо $p > 2$ и $|N| < |D|$, либо $p = 2$ и $2|N| < |D|$, то доказательство очевидно. Итак, пусть либо $p > 2$ и $|N| = |D|$, либо $p = 2$ и $|N| \in \{|D|, |D| : 2\}$. Предположим, что $|N| = |D|$. Тогда N не является циклической группой и, следовательно, каждая подгруппа группы G, содержащая N, не является циклической. Пусть $N \leq K \leq P$, где $|K : N| = p$. Так как K — нециклическая группа, в K имеется максимальная подгруппа $L \neq N$. Тогда $K = LN$ S-квазинормальна в G как произведение двух S-квазинормальных в G подгрупп. Следовательно, если либо $p > 2$, либо P/N абелева, то условие теоремы выполняется для $(G/N, E/N)$ по лемме 2.10(2)(4) из [2]. Предположим теперь, что P/N — неабелева 2-группа. Тогда P неабелева и поэтому $|D| > 4$ ввиду (13). Пусть $N \leq K \leq V$, где $|V : N| = 4$ и $|V : K| = 2$. Пусть K_1 — максимальная подгруппа группы V такая, что $V = K_1K$. Допустим, что K_1 — циклическая группа. Тогда $N \nsubseteq K_1$, следовательно, $V = K_1N$, что влечет $|N| = 4$. Тем самым $|D| = 4$, что противоречит (13). Таким образом, K_1 — нециклическая группа, и, как и выше, можно показать, что K_1 S-квазинормальна в G. Следовательно, каждая подгруппа из P/N порядка 2 и порядка 4 S-квазинормальна в G/N.

Допустим теперь, что $|D| = 2|N|$. Если $|N| > 2$, то, как и выше, можно показать, что каждая подгруппа из P/N порядка 2 и порядка 4 (если P/N неабелева) S-квазинормальна в G/N. Предположим, что $|N| = 2$ и P/N неабелева. Тогда P неабелева и $|D| = 4$, что противоречит (13).

Заключительное противоречие. Из (7), (14) и выбора группы G следует, что $\Phi(P) \neq 1$. Отсюда ввиду (14) имеем $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathscr{U}}(G/\Phi(P))$, что противоречит (9).

Итак, если $X = E$, то $E \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$.

Если же $X = F^*(E)$, то по доказанному в случае $X = E$ имеет место $F^*(E) \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$, что по лемме 2 влечет $E \leq Z_{\mathscr{U}}(G)$.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel O.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.

2. *Skiba A. N.* On weakly S-quasinormal subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.
3. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.
4. *Shemetkov L. A., Skiba A. N.* On the $\mathfrak{X}\Phi$-hypercentre of finite groups // J. Algebra. 2009. V. 322. P. 2106–2117.
5. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
6. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
7. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
8. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
9. *Skiba A. N.* A characterization of the hypercyclically embedded subgroups of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2010. (To appear). (available at: doi:10.1016/j.jpaa.2010.04.017).
10. *Asaad M., Csörgő P.* Influence of minimal subgroups on the structure of finite group // Arch. Math. 1999. V. 72. P. 401–404.
11. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea, 1980.
12. *Gagen T. M.* Topics in finite groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976.
13. *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 82. P. 285–293.
14. *Сергиенко В. И.* Критерий p-разрешимости конечных групп // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 4. С. 375–383.

Статья поступила 28 января 2010 г.

Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Франциска Скорины, математический факультет,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com