УДК 512.542

Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба

Строение групп Шмидта и групп Белоногова, в которых любые две 3-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными

Все рассматриваемые группы конечны. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы и далее.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. Например, в работе [1] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [2–3] получены характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. Еще один подход к изучению групп с заданными 2-максимальными подгруппами разрабатывался в работах [4–5], где было доказано, что группа G является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы G-перестановочны в G (напомним, что подгруппа H группы G называется X-перестановочной в G [4], где X – непустое подмножество группы G, если для любой подгруппы T из G найдется такой элемент x из X, что $HT^x=T^xH$). Отметим также, что в работах [6–7] было получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 2-максимальными подгруппами, а также групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами. В связи с последними двумя результатами вполне естественной является задача описания групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны (см. Вопрос 3.10 в обзоре [8]). Эта задача в классе ненильпотентных групп была решена в работе [9].

Целью данной работы является изучение X-перестановочности n-максимальных подгрупп, где X – подгруппа Фиттинга основной группы, для $n = 2, 3$.

Следуя [10], будем обозначать пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы G через $\Phi^2(G)$. Через $M_3(p)$ обозначается p-группа, равная группе $\langle a, b \mid a^{p^2}=b^p=1,\ a^b=a^{1+p} \rangle$ (см. [11, стр. 190]). В дальнейшем p, q и r – попарно различные простые числа. В следующих теоремах P, Q и R обозначают некоторые силовские p-подгруппу, q-подгруппу и r-подгруппу в G соответственно.

Сформулируем в виде лемм необходимые в дальнейшем результаты работы [9].

Лемма 1 [9, лемма 2.3]. *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(2) *любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны.*

Лемма 2 [9, теорема 3.1]. *Пусть G – группа Шмидта. Тогда любые две* 3-*максимальные подгруппы группы G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*;

(2) *$G = [P]Q$, где P изоморфна либо $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка* 8;

(3) *$G = [P]Q$, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$ и $\Phi(P) = \Phi^2(P)$.*

Теорема 1. *В том и только в том случае в группе Шмидта G любые ее две* 2-*максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными, когда G – группа с абелевыми силовскими подгруппами*.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, в которой любые две 2-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны. Предположим, что P – неабелева группа. Тогда G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы PQ_1 и $P'Q$ (где Q_1 максимальна в Q). Следовательно, группа G имеет точно четыре класса 2-максимальных подгрупп, представителями которых являются группы PQ_2, P_1Q_1, $P'Q_1$ и TQ (где Q_2 максимальна в Q_1, T – некоторая максимальная подгруппа в P' и P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P). По условию, существует такой элемент f из $F(G)$, что $(P_1Q_1)(TQ)^f = (TQ)^f(P_1Q_1)$. Так как $Q_1 \leq Z(G)$, $T\leq Z(P)$ и TQ нильпотентна, то подгруппы Q_1 и T нормальны в G и поэтому $P_1Q^f = Q^fP_1$. Это означает, что P_1Q^f – подгруппа в группе G. Так как подгруппа $P'Q^f$ максимальна в G, $P_1Q^f \neq G$ и $P'\leq P_1$, то $P' = P_1$. Следовательно, $\Phi(P) = P' = Z(P)$ – максимальная подгруппа в P и поэтому P является циклической группой порядка p, что противоречит нашему допущению о группе P. Следовательно, G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Достаточность. Напрямую следует из леммы 1. Теорема доказана.

Теорема 2. В том и только в том случае в группе Шмидта G любые ее две 3-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными, когда G – группа одного из следующих типов:

(1) G – группа с абелевыми силовскими подгруппами;

(2) $G = [P]Q$, где P изоморфна либо $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8;

(3) $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$ и $\Phi(P) = \Phi^2(P)$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, в которой любые две 3-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны.

Если P абелева, то G является группой типа (1). Предположим теперь, что P – неабелева группа. Тогда $\Phi(P) = P' = Z(P)$.

Покажем, что в группе P любые две 2-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны. Пусть P_1 и P_2 – произвольные 2-максимальные подгруппы группы P и Q_1 – максимальная подгруппа в Q. Так как Q_1 нормальна в G, то P_1Q_1 и P_1Q_1 являются 3-максимальными подгруппами в G. По условию, существует такой элемент f из $F(G)$, что $(P_1Q_1)(P_2Q_1)^f = (P_2Q_1)^f(P_1Q_1)$ и поэтому $L = Q_1P_1(P_2)^f$ является подгруппой в G. Согласно [12, VI, лемма 4.7], в группе L существует силовская p-подгруппа L_p такая, что $L_p = P_1(P_2)^f$. Это влечет $F(G)$-перестановочность подгрупп P_1 и P_2.

Допустим вначале, что $|\Phi(P)| = p$. Предположим, что существует такая 2-максимальная подгруппа T в группе P, что $\Phi(P)$ не содержится в T. Так как $P/\Phi(P)$ абелева и $T\Phi(P)/\Phi(P) \leq P/\Phi(P)$, то $T \approx T\Phi(P)/\Phi(P)$ также является абелевой группой и поэтому $T\times\Phi(P)$ – абелева максимальная подгруппа в P.

Тогда, по [13, теорема 5.1.9], $|P| = p^3$. В этом случае, по [11, V, теорема 5.1], P изоморфна одной из следующих групп: $M_3(p)$, $M(p)$, D или Q, где D – диэдральная группа, Q – группа кватернионов порядка 8, и

$M(p) = < x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1, [x,z] = [y,z] = 1, [x,y] = z >$ (см. [11, стр. 203]).

Если P изоморфна $M(p)$, то $P = \Omega_1(P) = \{ g \in G \mid g^p = 1\}$. Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Так как в группе P любые две 2-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны и в группе P существует два класса неинвариантных несопряженных 2-максимальных подгрупп, то P – абелева группа, противоречие. Если P изоморфна D, то, по [11, V, теорема 4.3], $P = \Omega_1(P)$, что невозможно, как показано выше. Следовательно, подгруппа P изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8. Таким образом, G является группой типа (2).

Теперь допустим, что $\Phi(P)$ содержится в каждой 2-максимальной подгруппе группы P. Это влечет $\Phi(P) = \Phi^2(P)$. Если при этом $|P| = p^3$, то G снова является группой типа (2). Если же $|P| > p^3$, то G – группа типа (3).

Теперь допустим, что $|\Phi(P)| > p$. Пусть Q_1 – максимальная подгруппа в Q, K – некоторая 2-максимальная подгруппа в $\Phi(P)$ и P_2 – такая 2-максимальная подгруппа в P, что $\Phi(P) \leq P_2$. Тогда подгруппы P_2Q_1 и KQ являются 3-максимальными подгруппами в G. По условию, существует такой элемент f из $F(G)$, что $(P_2Q_1)(KQ)^f = (KQ)^f(P_2Q_1)$. Так как $Q_1 \leq Z(G)$, $K \leq Z(P)$ и KQ нильпотентна, то подгруппы Q_1 и K нормальны в G и поэтому $P_2Q^f = Q^fP_2$. Это означает, что P_2Q^f – подгруппа в группе G. Так как подгруппа $\Phi(P)Q^f$ максимальна в G, $P_2Q^f \neq G$ и $\Phi(P) \leq P_2$, то $\Phi(P) = Z(P) = P' = P_2$. Следовательно, $|P : Z(P)| = p^2$. Это означает, что P является группой Миллера–Морено. Но тогда $|P'| = |\Phi(P)| = p$ (см. [14]), что противоречит рассматриваемому случаю.

Достаточность. Напрямую следует из леммы 2. Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть $P = [H]C_p$, где H – элементарная p-группа, $|C_p| = p$ и любые две 2-максимальные подгруппы из P являются H-перестановочными. Тогда P – абелева группа.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна и пусть P – контрпример минимального порядка. Предположим, что $Z(P)$ не содержится в H. Тогда $P = HZ(P)$ и поэтому P – абелева группа. Следовательно, $Z(P) \leq H$. Тогда $Z(P) = Z_1 \times Z_2 \ldots \times Z_t$, где $|Z_1| = \ldots = |Z_2| = p$. Несложно показать, что для группы P/Z_1 выполняются условия леммы. Значит, по индукции, факторгруппа P/Z_1 является абелевой. Следовательно, мы можем считать, что $Z_1 = Z(P)$. В этом случае, по [13, теорема 5.1.9], $|P| = p^3$. Так как $P = [H]C_p$ и подгруппы H и C_p порождаются элементами порядка p, то $P = \Omega_1(P)$. Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Так как в группе P любые две 2-максимальные подгруппы H-перестановочны и в P существует два класса неинвариантных несопряженных 2-максимальных подгрупп, то P абелева, противоречие. Лемма доказана.

Определение 1. Будем называть конечную ненильпотентную разрешимую группу, не являющуюся группой Шмидта, но содержащую исключительно нильпотентные 2-максимальные подгруппы, группой Белоногова.

Теорема 3. *Пусть G – примитивная группа Белоногова и M – ее максимальная подгруппа с $M_G = 1$. Тогда в том и только в том случае любые две 3-максимальные подгруппы из G являются $F(G)$-перестановочными, когда G – группа одного из типов*:

(1) *$G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G и M – нильпотентная подгруппа одного из порядков qr, q^2 или q*;

(2) *$G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G, $M = [Q]R$, $|Q| = q$, $|R| = r$ и PR – группа Шмидта*;

(3) $G = [P]M$, *где* P *– минимальная нормальная* p*-подгруппа в* G, $M = [Q]C_p$, $|Q| = q$, $|C_p| = p$ *и* PC_p *– абелева группа*.

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Необходимость.* Пусть G – примитивная группа Белоногова, в которой любые две 3-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными. Поскольку G – ненильпотентная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является нильпотентной, то каждая собственная подгруппа из G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, причем каждая подгруппа Шмидта максимальна в G. Так как G является примитивной разрешимой группой, то, по [15, A, теорема 15.6], $G = [P]M$, где $P = C_G(P) = F(G) = O_p(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Предположим вначале, что группа $G/P \approx M$ нильпотентна. Допустим, что каждая максимальная подгруппа группы G, строго содержащая P, нильпотентна. Тогда, ввиду нильпотентности M, мы имеем $M_G \neq 1$, противоречие. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из G, строго содержащая P, является группой Шмидта. Так как M нильпотентна и, по [15, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$, то p не делит $|M|$. Это влечет, что группа M содержит не более двух силовских подгрупп и $|M|$ делится не более, чем на два необязательно различных простых числа. Следовательно, либо $|M| = qr$, либо $|M| = q^2$, либо $|M| = q$. Таким образом, G является группой типа (1).

Теперь предположим, что группа $G/P \approx M$ не является нильпотентной. Так как M максимальна в G, то она является группой Шмидта. В этом случае группа $G/P \approx M$ удовлетворяет условиям леммы 2 и поэтому M является группой одного из типов (1)–(3), описанных в этой лемме.

Допустим, что M является группой типа (1) в лемме 2 и p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Понятно, что M имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы R и QR_1, где R_1 – максимальная подгруппа в R. Тогда группа G имеет точно три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $[Q]R$, PR и PQR_1. Если предположить, что подгруппа PR нильпотентна, то $R \leq C_G(P) = P$, что невозможно. Следовательно, PR – группа Шмидта. Легко видеть, что тогда $R_1 = 1$ и поэтому $|R| = r$. Таким образом, подгруппа PQ максимальна в G. Если предположить, что подгруппа PQ нильпотентна, то $Q \leq C_G(P) = P$, что также невозможно. Следовательно, PQ – группа Шмидта с $|Q| = q$. В этом случае G является группой типа (2).

Теперь допустим, что M является группой типа (1) в лемме 2 и p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M соответственно. По [15, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, причем $|P_1| = p$. В этом случае PQ является максимальной подгруппой в G. Легко видеть, что $[P]Q$ – подгруппа Шмидта группы G и поэтому $|Q| = q$. Это влечет, по условию, что любые две 2-максимальные подгруппы из PP_1 являются $F(G)$-перестановочными. Так как $P = F(G)$, то, по лемме 3, PP_1 – абелева группа. Таким образом, G – группа типа (3).

Пусть теперь M является группой типа (2) в лемме 2 и p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$ – такая группа Шмидта, в которой подгруппа Q изоморфна либо группе $M_3(q)$, либо группе кватернионов порядка 8. В каждом из этих случаев $|\Phi(Q)| = q \neq 1$ и поэтому $P\Phi(Q)R$ – максимальная подгруппа группы G. Понятно, что эта подгруппа является нильпотентной и поэтому $\Phi(Q) \leq C_G(P) = P$, что невозможно.

Теперь предположим, что M является группой типа (2) в лемме 2 и p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$ – группа Шмидта, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M соответственно. По [15, A, теорема 15.6],

$O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, где Q изоморфна либо группе $M_3(q)$, либо группе кватернионов порядка 8. Легко заметить, что $|P_1| = p$. Но тогда PQ является максимальной подгруппой в G. Понятно, что PQ ненильпотентна и поэтому PQ – подгруппа Шмидта в G с $|Q| = q$. Это означает, что подгруппа M не удовлетворяет условию (2) леммы 2, противоречие.

Допустим теперь, что M является группой типа (3) в лемме 2. Рассуждая аналогично, как и выше, можно показать, что данный случай не имеет место.

Достаточность. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в случае, когда G является группой одного из типов (1)–(3), любые две 3-максимальные подгруппы группы G являются $F(G)$-перестановочными. Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. ***Guo, X.Y.*** Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2003. – Vol. 181. – P. 297–308.
2. ***Guo, W.*** *X*-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
3. ***Li, B.*** New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China. Serias A: Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 827–841.
4. ***Skiba, A.N.*** *H*-permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2003. – Vol. 4(19). – P. 37–39.
5. ***Guo, W.*** Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull Math. – 2005. – Vol. 29, № 2. – P. 792–810.
6. ***Guo, W.*** On finite groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. – 17 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 10).
7. ***Guo, W.*** The structure of finite non-nilpotent groups in which every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba. – Гомель, 2008. – 17 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 11).
8. ***Skiba, A.N.*** Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – Т. 36, № 3. – С. 12–31.
9. ***Го, В.*** О конечных ненильпотентных группах, в которых любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны или любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны / В. Го, Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба. – Гомель, 2008. – 26 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 20).
10. ***Белоногов, В.А.*** Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
11. ***Gorenstein, D.*** Finite groups, 2nd edn. / D. Gorenstein. – Chelsea–N. Y., 1980.
12. ***Huppert, B.*** Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer, 1967.
13. ***Kurzweil, H.*** The theory of finite groups: an introduction / H. Kurzweil, B. Stellmacher. – N. Y.–Berlin–Heidelberg: Springer-Verdag, 2004.
14. ***Miller, G.A.*** Monabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H. Moreno // Trans. Am. Soc. – 1903. – № 4. – P. 398–404.
15. ***Doerk, K.*** Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

S U M M A R Y

The paper is devoted to the description of the structure of finite Shcmidt groups in which every two 2-maximal subgroups are F(G)-permutable or every two 3-maximal subgroups are F(G)-permutable. Also finite primitive Belonogov groups in which every two 3-maximal subgroups are F(G)-permutable are described.

Поступила в редакцию 26.02.2009