

И. Е. Вересовая, А. В. Лубочкин
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)
СТАБИЛИЗАЦИЯ МАЯТНИКА С ВРАЩЕНИЕМ
ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ
КУСОЧНО-ЛИНЕЙНО-НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧ

Рассматривается задача стабилизации (с вращением) неустойчивых положений равновесия нелинейной модели математического маятника:

$$\ddot{x} + \sin x = u, \quad z(0) = (x(0), \dot{x}(0)) = z_0 = (x_{10}, x_{20}). \quad (1)$$

Как известно, неустойчивыми состояниями равновесия системы (1) при $u = u(t) \equiv 0, t \geq 0$, на фазовой плоскости $z = (x, \dot{x})$ являются точки

$$z^k = (x = (2k+1)\pi, \dot{x} = 0), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Традиционно при малых начальных отклонениях $|x_{10} - \pi| + |x_{20}|$ для стабилизации неустойчивого верхнего состояния $(\pi, 0)$ используют линейное уравнение $\ddot{x} - x = u$. Если же начальное состояние значительно удалено от состояния равновесия $(\pi, 0)$, то состояния равновесия (2) при $|k| > 0$, связанные с вращениями маятника, совершенно выпадают из рассмотрения. Здесь для исследования поведения нелинейной системы вводится кусочно-линейная ее аппроксимация,

что позволяет решать задачу стабилизации при любых начальных возмущениях и любых движениях маятника.

Обратную связь $u = u(z) = u(x, \dot{x})$, $z \in R^2$, назовем ограниченной дискретной (с периодом квантования $\nu > 0$) стабилизирующей в области $G \subset R^2$ для состояния равновесия (2), если: 1) $u(z^k) = 0$; 2) $|u(z)| \leq L$, $z \in G$; 3) траектория замкнутой системы (1): $\ddot{x} + \sin x = u(z)$, $z(0) = z_0 \in G$, представляет собой непрерывное решение уравнения (1) с управлением $u(t) = u(k\nu)$, $t \in [k\nu, (k+1)\nu]$, $k = 0, 1, \dots$; 4) решение $x(t) = (2k+1)\pi$, $t \geq 0$, замкнутой системы асимптотически устойчиво, и G – область притяжения состояния равновесия $x = (2k+1)\pi$.

Для построения указанной обратной связи используется реализация в режиме реального времени позиционного решения следующей задачи

$$B_\theta(z) = \min \int_0^\theta |u(t)| dt, \quad \ddot{x} + f(x) = u, \quad (x(0), \dot{x}(0)) = z, \quad (3)$$

$$(x(\theta), \dot{x}(\theta)) = z^k, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in [0, \theta],$$

где $f(x) = x - 2k\pi$, $x \in [-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$;

$$f(x) = -x + (2k+1)\pi, \quad x \in [\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом минимум в задаче (3) берется не только по u , но и по моментам переключения функции кусочно-линейной аппроксимации с одного линейного участка на другой.

Построенные стабилизаторы программно реализованы, просчитаны тестовые примеры.