Д. Ю. Синиченко
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

В работе рассматривается оператор вида

$$(Ax)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+s) - x(s)}{|t|^{\alpha}} k(t)dt .$$

Определение. Функция

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(t)}{|t|^{\alpha}} (e^{i\lambda t} - 1)dt ,$$

если интеграл существует, называется символом интегрального оператора $A(\lambda \in R)$.

Введём в рассмотрение следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $\dfrac{k(t)}{|t|^{\alpha}}$ интегрируема на **R** и существует символ интегрального оператора A, $a(\lambda) \neq 0$ и $\alpha > 0$.

Тогда для любой функции f из $L^1(R)$ уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+s)-x(s)}{|t|^{\alpha}} k(t)dt = f(s)$$

имеет в пространстве $L^1(R)$ единственное решение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda t} d\lambda .$$

Теорема 2. Пусть функции $\dfrac{k(t)}{|t|^{\alpha}}$ интегрируема на **R** и существует символ интегрального оператора A, $a(\lambda) \neq -1$ и $\alpha > 0$.

Тогда для любой функции f из $L^1(R)$ уравнение

$$x(s) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+s)-x(s)}{|t|^{\alpha}} k(t)dt = f(s)$$

имеет и притом единственное решение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\lambda)}{1+a(\lambda)} e^{i\lambda t} d\lambda .$$

Теорема 3. Если $k \in L^1(R)$, а $0 < \alpha \le 1$, то оператор A ограничен в пространстве Гёльдера $Lip_{\alpha}(R)$, и его норма удовлетворяет неравенству

$$\|A\| \le C\|x\|,$$

где $C = \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k(t)|}{|t|^{\alpha}} dt$.