On the connections of an unbounded Hille-Phillips functional calculus with Bochner-Phillips functional calculus

A. R. Mirotin
amirotin@yandex.ru

The extension of Hille-Phillips functional calculus of semigroup generators which leads to unbounded operators is considered. Connections of this calculus to Bochner-Phillips functional calculus are indicated. In particular, the multiplication rule and the composition rule are proved. Several examples are given.

Key wards: Hille-Phillips functional calculus, Bochner-Phillips functional calculus, fractional powers of operators, subordination.

О СВЯЗЯХ НЕОГРАНИЧЕННОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ХИЛЛЕ-ФИЛЛИПСА С ИСЧИСЛЕНИЕМ БОХНЕРА-ФИЛЛИПСА

А. Р. Миротин

Дается расширение функционального исчисления Хилле-Филлипса генераторов C_0-полугрупп, изложенного в их известной монографии, приводящее к неограниченным операторам. Указаны связи этого исчисления с исчислением Бохнера-Филлипса. В частности, доказано правило произведения и теорема о сложной функции. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: функциональное исчисление Хилле-Филлипса, функциональное исчисление Бохнера-Филлипса, дробные степени операторов, подчиненная полугруппа.

1. Введение. В монографии [1], гл. XV – XVI построено функциональное исчисление генераторов C_0-полугрупп, использующее класс $L\mathcal{M}$ функций, представимых в виде преобразований Лапласа

$$La(s) := \int_0^\infty e^{st} da(t) \ (s < 0)$$

σ-конечных комплексных регулярных борелевских мер a на $\mathbb{R}_+$. Пространство таких мер будет обозначаться $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$. При этом условия, налагаемые в [1] на меру и полугруппу, приводят к тому, что возникающие в результате операторы ограничены. Там же (с. 463) поставлена задача построения расширения этого исчисления, приводящего к неограниченным операторам. В работе развивается подход к такому расширению, анонсированный ранее в [2]. Случай генераторов групп рассматривался в [3]. Подход, основанный на другом классе символов (причем для наборов нескольких генераторов), появился в [4]. Необходимость исчисления подобного типа вызвана также потребностями функционального исчисления Бохнера-Филлипса, использующего класс $\mathcal{T}$ отрицательных функций Бернштейна (см., например, [11] – [18], а также [19]). Ниже будут установлены связи между этими исчислениями, в частности, доказаны правило умножения и теорема о сложной функции. Всюду ниже A есть генератор ограниченной C_0-полугруппы T в банаховом пространстве X с областью определения $D(A)$ и образом $\mathrm{Im}A$. Через $LB(Y,X)$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих между банаховыми пространствами Y и X, $LB(X) := LB(X,X)$. Если f есть функция на $\mathbb{R}_+$, то через $\widehat{f}$ будет обозначаться преобразование Лапласа меры $f(t)dt$. Для регулярной борелевской меры μ на $\mathbb{R}_+$ через $\mu(t)$ обозначается ее функция распределения, нормированная условиями $\mu(0) = 0$, $\mu(t) = (\mu(t-0) + \mu(t+0))/2$ при $t > 0$. Конец доказательства или примера обозначается знаком $\Box$.

2. Основное определение. Следующее определение формально совпадает с определением, предложенным Хилле и Филлипсом в монографии [1], но мы отказываемся от наложенных там ограничений, гарантирующих существование интеграла и ограниченность определяемого им оператора (см. также работу [3], посвященную генераторам групп).

Определение 1. Для функции g из $L\mathcal{M}$, $g = La$, $a \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$) положим

$$g(A)x = \int_0^\infty T(t)x\,da(t),$$

где область определения $D_0(g(A))$ этого оператора состоит из тех $x \in X$, для которых интеграл в правой части существует в смысле Бохнера.

Следующий пример иллюстрирует определение 1.

Пример 1. Пусть $g(s) = s^{-1}, s < 0$. Тогда $g = La$, где $a = -\mathrm{mes}$ (mes — мера Лебега на $\mathbb{R}_+$). Таким образом, в силу определения 1 при $x \in D_0(g(A))$

$$g(A)x = -\int_0^\infty T(t)x\,dt.$$

Предположим, что генератор A инъективен, а полугруппа T сильно устойчива (т. е. $T(n)y \to 0$ при $y \in X$, $n \to \infty$) и покажем, что из определения 1 следует равенство $g(A) = A^{-1}$. Пусть $x \in \mathrm{Im}A$ и $y = A^{-1}x$. Тогда

$$g(A)x = -\int_0^\infty T(t)Ay\,dt = -\int_0^\infty dT(t)y = y.$$

Таким образом, $D_0(g(A)) \supseteq \mathrm{Im}A$ и при $x \in \mathrm{Im}A$ имеем $g(A)x = A^{-1}x$. Нам осталось доказать включение $D_0(g(A)) \subseteq \mathrm{Im}A$. С этой целью выберем произвольно $x \in D_0(g(A))$ и рассмотрим последовательность

$$y_n := -\int_0^n T(t)x\,dt.$$

Положим $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Как известно, $y_n \in D(A)$ и

$$Ay_n = -A\int_0^n T(t)xdt = x - T(n)x.$$

Поэтому $Ay_n \to x$ $(n \to \infty)$, и в силу замкнутости оператора A имеем $y \in D(A)$ и $Ay = x$, что и завершает доказательство.□

3. Теоремы о замкнутости $g(A)$**.** Прежде всего, нас интересуют условия, при которых оператор $g(A)$ будет плотно определен и замкнут (замыкаем).

Лемма 1. 1) *Если* $\mathrm{Im}A \subset D_0(g(A))$*, то оператор* $g(A)A$ *ограничен относительно* A*;*

2) *если дополнительно предположить, что оператор* A *инъективен, то* $g(A)$ *замкнут на подпространстве* $D(A) \cap D_0(g(A))$*, наделенном нормой графика;*

3) *если* $\int_0^\infty \|T(t)\|\, d\,|a|\,(t) < \infty$*, то оператор* $g(A)$ *ограничен на* X*, и рассматриваемое исчисление согласовано с классическим исчислением Хилле-Филлипса.*

Доказательство. 1) Для любого $x \in D(A)$ определим операторы

$$B_n x = \int_0^n T(t)Axda(t),$$

(интеграл существует в смысле Бохнера, так как функция $r \mapsto \|T(t)\|$ ограничена на $[0,n]$ по принципу равномерной ограниченности). Поскольку у нас $Ax \in D_0(g(A))$, то $B_n x \to g(A)Ax$ $(n \to \infty)$ при всех $x \in D(A)$. Далее, так как оператор A замкнут, то пространство $Y = D(A)$, наделенное нормой графика $\|x\|_Y = \|x\| + \|Ax\|$, банахово. Кроме того, $B_n \in LB(Y, X)$, поскольку

$$\|B_n x\| \le \left(\int_0^n \|T(t)\|\, d|a|(t)\right) \|x\|_Y .$$

В силу теоремы Банаха-Штейнгауза оператор $g(A)A$ тоже принадлежит $LB(Y, X)$, а потому ограничен относительно A.

2) Заметим сначала, что при $x \in D(A) \cap D_0(g(A))$ справедливо равенство

$$Ag(A)x = g(A)Ax. \tag{1}$$

Действительно, с учетом замкнутости A и сходимости интегралов имеем

$$g(A)Ax = \int_0^\infty T(t)Axda(t) = \int_0^\infty AT(t)xda(r) = Ag(A)x,$$

поскольку $\mathrm{Im}A \subset D_0(g(A))$. Теперь, если A инъективен, то с помощью утверждения 1) получаем, что оператор $g(A)x = A^{-1}g(A)Ax$ замнут на подпространстве $D(A) \cap D_0(g(A))$ пространства Y как произведение замкнутого и ограниченного операторов.

3) Это следует из свойств интеграла Бохнера. □

Всюду далее для функции f на $\mathbb{R}_+$ через $\widehat{f}$ обозначается ее преобразование Лапласа, т. е.

$$\widehat{f}(s) := \int_0^\infty e^{st} f(t) dt \ (s < 0).$$

Следствие 1. *Пусть $g = \widehat{f}$ есть преобразование Лапласа функции f, причем при x из $D(A)$ существуют $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)T(n)x$ и $\int_0^\infty T(t)xdf(t)$. Тогда $\mathrm{Im}A \subset D_0(g(A))$ и справедливы все утверждения леммы 1.*

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем при всех $x \in D(A)$

$$\int_0^n T(t)Axf(t)dt = \int_0^n f(t)dT(t)x = f(n)T(n)x - f(0)x - \int_0^n T(t)xdf(t), \qquad (2)$$

причем правая часть имеет предел при $n \to \infty$. □

Следствие 2. *В условиях части 1 леммы 1 оператор $g(A)A$ ограничен вместе с A.*

Следствие 3. *Если в условиях части 1 леммы 1 оператор A инъективен, то $g(A)|\mathrm{Im}A$ ограничен относительно A^{-1}.*

Следствие 4. *Если в условиях части 1 леммы 1 существует ограниченный обратный оператор A^{-1} на $\mathrm{Im}A$, то $g(A)$ ограничен на $\mathrm{Im}A$.*

Теорема 1. *Пусть $g = \widehat{f}$, где функция f такова, что оператор*

$$Sx := \int\limits_0^\infty T(t)xdf(t)$$

ограничен, а последовательность $f(n)T(n)$ сходится на $D(A)$ сильно к оператору $B \in LB(D(A))$. Тогда

1) *$\mathrm{Im}A \subset D_0(g(A))$ и оператор $g(A)A$ ограничен на $D(A)$;*

2) *если оператор A инъективен, то оператор $g(A)|D(A) \cap D_0(g(A))$ замкнут, а если еще $B = 0$, то замкнут также и оператор $g(A)|\mathrm{Im}(A)$.*

Доказательство. 1) Включение $\mathrm{Im}A \subset D_0(g(A))$ сразу вытекает из следствия 1. Переходя к пределу в формуле (2), получаем при $x \in D(A)$

$$g(A)Ax = \int_0^\infty T(t)Axf(t)dt = Bx - f(0)x - \int_0^\infty T(t)xdf(t), \qquad (3)$$

откуда и следует ограниченность $g(A)A$ на $D(A)$.

2) Здесь первое утверждение следует из 1) и равенства $g(A)x = A^{-1}g(A)Ax$ ($x \in D(A) \cap D_0(g(A))$) как в доказательстве леммы 1. Пусть теперь $B = 0$. Полагая в (3) $y = Ax$, имеем

$$g(A)y = -f(0)A^{-1}y - \int_0^\infty T(t)A^{-1}ydf(t).$$

Но оператор

$$y \mapsto A\int_0^\infty T(t)A^{-1}ydf(t) = \int_0^\infty AT(t)A^{-1}ydf(t) = \int_0^\infty T(t)ydf(t) = Sy$$

ограничен на $\mathrm{Im}A$, а потому оператор

$$g(A)y = -A^{-1}\left(f(0)y + Sy\right)$$

замкнут на $\mathrm{Im}A$ как произведение замкнутого и ограниченного операторов. $\square$

Отрицательные дробные степени неограниченных операторов рассматривались многими авторами (см., например, [5], [6], [7], [8]). Определение 1 приводит к определению отрицательных дробных степеней генераторов полугрупп, формально совпадающему с определением из [6, с. 32–33]. [1]

Пример 2. Пусть $g(s) = (-s)^{-\alpha}, s < 0, \alpha > 0$. Тогда $g = \widehat{f}$, где $f(r) = 1/\Gamma(\alpha)r^{\alpha-1}$. Следовательно, мы можем в соответствии с определением 1 положить

$$(-A)^{-\alpha}x := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty T(t)xt^{\alpha-1}dt,$$

считая, что $D_0((-A)^{-\alpha})$ состоит из тех $x \in X$, при которых интеграл существует в смысле Бохнера. Предположим, что $\alpha > 1$, оператор A инъективен, а C_0-полугруппа T удовлетворяет оценке $\|T(t)\| \le C/t^\delta$ с константами $\delta > \alpha - 1$, $C > 0$. Тогда выполнены все условия теоремы 1, а потому $\mathrm{Im}A \subset D_0((-A)^{-\alpha})$ и оператор $(-A)^{-\alpha}|\mathrm{Im}A$ замкнут.

Если же $0 < \alpha < 1$, то мы можем при $\delta > \alpha$ положить $(-A)^{-\alpha} := (-A)^{-(1+\alpha)}(-A)$. В этом случае $D((-A)^{-\alpha}) = D(A)$, и при $x \in D(A)$, интегрируя по частям, для $(-A)^{-\alpha}x$ получим ту же формулу, что и выше. В самом деле, тогда $t^\alpha T(t)x \to 0$ $(t \to \infty)$, а потому

$$(-A)^{-\alpha}x := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^\infty T(t)(-Ax)t^\alpha dt =$$

$$-\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(t^\alpha T(t)x\,|_0^\infty - \alpha\int\limits_0^\infty T(t)xt^{\alpha-1}dt\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty T(t)xt^{\alpha-1}dt.$$

Если дополнительно предположить, что полугруппа сжимающая, то $(-A)^{-\alpha}x \to x$ при $x \in D(A)$, $\alpha \to +0$. Действительно, в этом случае $\|T(t)x - e^{-t}x\| \le t\|Ax - x\|$ (см., например, [9, гл. 1, лемма 2.9]). Так как

$$(-A)^{-\alpha}x - x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty (T(t)x - e^{-t}x)t^{\alpha-1}dt,$$

[1] В [6] отрицательные дробные степени определяются при условиях, что оператор $-A$ секториальный и $\mathrm{Re}\sigma(A) < 0$, и являются ограниченными операторами.

то

$$\|(-A)^{-\alpha}x - x\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int\limits_0^1 \|T(t)x - e^{-t}x\| t^{\alpha-1} dt + \int\limits_1^\infty \|T(t)x - e^{-t}x\| t^{\alpha-1} dt \right) \le$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int\limits_0^1 \|Ax - x\| t^{\alpha} dt + \int\limits_1^\infty \left(\frac{M}{t^\delta} + e^{-t} \right) \|x\| t^{\alpha-1} dt \right) \le$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\|Ax - x\|}{\alpha+1} + \frac{M\|x\|}{\delta-\alpha} + \|x\| e^{-1} \right) \to 0$$

при $\alpha \to +0.\square$

4. Связь с исчислением Бохнера-Филлипса. Следующие теоремы устанавливают связь между рассматриваемым исчислением и исчислением Бохнера-Филлипса (относительно последнего см., например, [12], [14]). Ниже через $\mathcal{T}$ будет обозначаться класс отрицательных функций Бернштейна одного переменного. Функция ψ из $\mathcal{T}$ аналитична в левой полуплоскости и допускает интегральное представление

$$\psi(z) = c_0 + \int_0^\infty (e^{zu} - 1)\, u^{-1} d\rho(u) \ (\mathrm{Re} z < 0), \tag{4}$$

где $c_0 = \psi(0)$, ρ — положительная мера на $\mathbb{R}_+$, причем $\int_0^r d\rho(u) < \infty$, $\int_r^\infty u^{-1} d\rho(u) < \infty$ при $r > 0$.

Определение 2. Для неположительной функции Бернштейна ψ с интегральным представлением (4) и генератора A ограниченной C_0-полугруппы T на банаховом пространстве X ее значение на операторе A при $x \in D(A)$ определяется интегралом Бохнера

$$\psi(A)x = c_0 x + \int\limits_{\mathbb{R}_+} (T(u) - I) x u^{-1} d\rho(u).$$

При этом замыкание этого оператора, также обозначаемое $\psi(A)$, есть генератор ограниченной C_0-полугруппы $g_t(A)$ на X. Здесь $g_t(s) := e^{t\psi(s)}$, а оператор $g_t(A)$ понимается в смысле исчисления Хилле-Филлипса, поскольку функция $g_t(s)$ абсолютно монотонна на $(-\infty, 0]$, а потому есть преобразование Лапласа некоторой субвероятностной меры ν_t (полугруппа $g_t(A)$ называется подчиненной полугруппе T).

Теорема 2. *Пусть $\psi \in \mathcal{T}$, $\psi(0) = 0$. Тогда функция $\tilde{\psi}(s) := \psi(s)/s$ принадлежит $L\mathcal{M}$ и при всех $x \in D(A) \cap D_0(\tilde{\psi}(A))$ справедливо равенство*

$$\psi(A)x = A\tilde{\psi}(A)x, \tag{5}$$

где $\tilde{\psi}(A)$ понимается в смысле определения 1, а $\psi(A)$ — в смысле исчисления Бохнера-Филлипса.

Доказательство. В силу формулы (4) и теоремы Фубини

$$\tilde{\psi}(s) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{su}-1}{s}\right) u^{-1} d\rho(u) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty 1_{[0;u]}(r) e^{sr} dr\right) u^{-1} d\rho(u) =$$
$$\int\limits_0^\infty e^{sr} \left(\int\limits_0^\infty 1_{[0;u]}(r) u^{-1} d\rho(u)\right) dr = \widehat{f}(s),$$

где $f(r) = \int_r^\infty u^{-1} d\rho(u)$, а 1_A — индикатор множества A.

Следовательно, если $x \in D(A) \cap D_0(\tilde{\psi}(A))$, то

$$\tilde{\psi}(A)x = \int\limits_0^\infty T(t)xf(t)dt. \tag{6}$$

С другой стороны, по теореме Фубини для интеграла Бохнера

$$\psi(A)x := \int\limits_0^\infty (T(u) - I)\, xu^{-1} d\rho(u) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^u AT(t)xdt\right) u^{-1} d\rho(u) =$$
$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty 1_{[0;u]}(t) AT(t)xdt\right) u^{-1} d\rho(u) = A\int\limits_0^\infty T(t)x \left(\int\limits_0^\infty 1_{[0;u]}(t) u^{-1} d\rho(u)\right) dt =$$
$$A\tilde{\psi}(A)x$$

(теорема Фубини применима, поскольку интеграл Бохнера в (6) сходится). □

Следствие 5. *Если оператор A имеет ограниченный обратный, то оператор $\tilde{\psi}(A)$ замкнут на подпространстве $D(A) \cap D_0(\tilde{\psi}(A))$.*

Доказательство. В силу теоремы 4.1 из [13] и ее следствия формула (5) влечет равенство $\tilde{\psi}(A)x = \psi(A)A^{-1}x$ $(x \in D(A) \cap D_0(\tilde{\psi}(A)))$, правая часть которого есть произведение замкнутого и ограниченного операторов. □

Следствие 6. *Оператор $\tilde{\psi}(A)$ отображает $D(A) \cap D_0(\tilde{\psi}(A))$ в $D(A)$.*

Следствие 7. *Оператор A отображает $D(A) \cap D_0(\tilde{\psi}(A))$ в $D_0(\tilde{\psi}(A))$.*

Для доказательства следующих двух теорем нам понадобится такой вариант теоремы X_{38} из [10, Введение].

Лемма 2. *Пусть комплекснозначная функция ϕ непрерывна на $(0, \infty)$, функция $a(u)$ монотонно возрастает и имеет ограниченную вариацию на любом интервале $(c, d) \subset \mathbb{R}_+$, а функция $\alpha(u, v)$ непрерывна по u при каждом $v > 0$, монотонно возрастает по v и на любом интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}_+$, имеет ограниченную вариацию по v равномерно по переменной u, пробегающей любой интервал $(c, d) \subset \mathbb{R}_+$. Тогда, если один из интегралов*

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \phi(v) d_v \alpha(u, v)\right) da(u), \int\limits_0^\infty \phi(v) d_v \left(\int\limits_0^\infty \alpha(u, v) da(u)\right)$$

существует и конечен при замене ϕ на $|\phi|$, то эти интегралы равны.

Доказательство. Если функция ϕ неотрицательна, то, в силу упоминавшейся теоремы X_{38}, для любого натурального n

$$\int_0^\infty \left(\int_0^n \phi(v) d_v \alpha(u,v) \right) da(u) = \int_0^n \phi(v) d_v \left(\int_0^\infty \alpha(u,v) da(u) \right).$$

В этом случае для доказательства достаточно положить $n \to \infty$ и применить теорему Б. Леви.

Случай комплекснозначной функции ϕ сводится к предыдущему, если заметить, что ϕ можно представить в виде $\phi = (\phi_1 - \phi_2) + i(\phi_3 - \phi_4)$, где все функции ϕ_k удовлетворяют неравенствам $0 \le \phi_k \le |\phi|$ и непрерывны. □

Положим

$$L\mathcal{M}_T := \left\{ g \in L\mathcal{M} : g = La, \forall x \in D(A) \lim_{t\to\infty} a(t)\|T(t)x\| = 0 \right\}.$$

Теорема 3 (ср. [14, теорема 1]). *Пусть T — ограниченная полугруппа, $g = La$, где a — непрерывная положительная мера, $g \in LM_T$, $\psi \in \mathcal{T}$. Тогда $h := g\psi \in L\mathcal{M}_T$, $D_0(h(A)) \supset D(A) \cap D_0(g(A))$ и при $x \in D(A) \cap D_0(g(A))$ справедливы равенства*

$$h(A)x = \psi(A)g(A)x = g(A)\psi(A)x.$$

Доказательство. Пусть $g = La$, $a(t)$ — такая (непрерывная) функция распределения меры a, что $a(0) = 0$. Тогда $h = Lb$, где b — мера на $\mathbb{R}_+$ с функцией распределения

$$b(t) = \psi(0)a(t) + \int_0^\infty (a(t-u) - a(t))\, u^{-1} d\rho(u). \tag{7}$$

В самом деле, в силу леммы 2

$$Lb(s) = \psi(0)La(s) + \int_0^\infty e^{st} d_t \left(\int_0^\infty (a(t-u) - a(t)) u^{-1} d\rho(u) \right) =$$

$$\psi(0)g(s) + \int_0^\infty u^{-1} d\rho(u) \int_0^\infty e^{st} d_t\, (a(t-u) - a(t)) =$$

$$\psi(0)g(s) + \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{st} d_t a(t-u) - \int_0^\infty e^{st} da(t) \right) u^{-1} d\rho(u) =$$

$$\psi(0)g(s) + \int_0^\infty \int_0^\infty \left(e^{s(t+u)} - e^{st} \right) da(t) u^{-1} d\rho(u) =$$

$$\psi(0)g(s)+\int\limits_0^\infty e^{st}da(t)\int\limits_0^\infty\left(e^{us}-1\right)u^{-1}d\rho(u)=g(s)\psi(s).$$

Далее, поскольку при $x\in\in D(A), t>0$

$$b(t)T(t)x=\psi(0)a(t)T(t)x+\int\limits_0^\infty\left(a(t-u)-a(t)\right)T(t)xu^{-1}d\rho(u)=$$

$$\psi(0)a(t)T(t)x+\int\limits_0^\infty a(t)(T(t+u)x-T(t)x)u^{-1}d\rho(u)=a(t)T(t)\psi(A)x,$$

то $h\in L\mathcal{M}_T$. Кроме того, полагая $t\to+0$, получаем $b(+0)=0$.

С помощью интегрирования по частям легко проверить, что при $x\in D(A)\cap D_0(g(A))$

$$g(A)x=\int_0^\infty T(t)(-Ax)a(t)dt. \tag{8}$$

Следовательно, при этих x справедливы равенства

$$\begin{aligned}(T(u)-I)g(A)x=\int\limits_0^\infty T(u+t)(-Ax)a(t)dt-\int\limits_0^\infty T(t)(-Ax)a(t)dt=\\=\int\limits_0^\infty T(t)(-Ax)(a(t-u)-a(t))dt.\end{aligned}$$

Поэтому и с учетом (7) при $x\in D(A)\cap D_0(g(A))$ имеем (не нарушая общности, можно считать $\psi(0)=0$)

$$\psi(A)g(A)x=$$

$$\int\limits_0^\infty\left(T(u)-I\right)g(A)xu^{-1}d\rho(u)=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty T(t)(-Ax)(a(t-u)-a(t))dt\right)u^{-1}d\rho(u)=$$
$$\int\limits_0^\infty T(t)(-Ax)\left(\int\limits_0^\infty(a(t-u)-a(t))u^{-1}d\rho(u)\right)dt=\int\limits_0^\infty T(t)(-Ax)b(t)dt=-\int\limits_0^\infty b(t)dT(t)x=$$

$$-b(t)T(t)x|_{t=0}^\infty+\int\limits_0^\infty T(t)xdb(t)=h(A)x.$$

Значит, $D_0(h(A))\supset D(A)\cap D_0(g(A))$ и первое равенство доказано.

Наконец заметим, что операторы $T(u)$ и $g(A)$ коммутируют в том смысле, что при $x\in D_0(g(A))$

$$T(u)g(A)x=\int\limits_0^\infty T(u+t)xda(t)=\int\limits_0^\infty T(t)T(u)xda(t)=g(A)T(u)x,$$

а потому при $x\in D(A)\cap D_0(g(A))$

$$\begin{aligned}h(A)x=\psi(A)g(A)x=\int\limits_0^\infty g(A)\left(T(u)-I\right)xu^{-1}d\rho(u)=\\=g(A)\int\limits_0^\infty\left(T(u)-I\right)xu^{-1}d\rho(u)=g(A)\psi(A)x.\ \square\end{aligned}$$

Следствие 8. *Пусть* $g \in LM_T$. *Тогда* $h(s) := sg(s) \in L\mathcal{M}_T$, $D_0(h(A)) \subset D(A) \cap D_0(g(A))$ *и при* $x \in D(A) \cap D_0(g(A))$ *справедливы равенства*

$$h(A)x = Ag(A)x = g(A)Ax.$$

В самом деле, если в (4) в качестве ρ взять меру Дирака, то при $c_0 = 0$ получим $\psi(s) = s$.

Пример 3. Пусть $g(s) = (-s)^{-\alpha}, s < 0,\ 0 < \alpha < 1$, а C_0-полугруппа T удовлетворяет оценке $\|T(t)\| \le C/t^\delta$ с константами $\delta > \alpha$, $C > 0$ как в примере 2. И пусть $\psi(s) = -(-s)^\beta, s < 0,\ 0 < \beta < \alpha$. Как известно, $\psi \in \mathcal{T}$ и

$$-(-s)^\beta = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^\infty (e^{st} - 1)t^{-\beta-1}dt.$$

Тогда выполнены все условия теоремы 3, причем в силу примера 2 $D_0(g(A)) = D_0(h(A)) = D(A)$, а потому для генератора A полугруппы T при $x \in D(A)$ справедливо равенство

$$(-A)^\beta(-A)^{-\alpha}x = (-A)^{\beta-\alpha}x.\Box$$

В связи с идущим ниже следствием 8 отметим, что, если $\psi \in \mathcal{T}$, то функция $-1/\psi$ на $(-\infty, 0)$ абсолютно монотонна, а потому принадлежит $L\mathcal{M}$.

Следствие 9. *Пусть* $\psi \in \mathcal{T}$, *функция* $1/\psi$ *принадлежит* $L\mathcal{M}_T$, *и оператор* $(1/\psi)(A)$ *(в смысле определения 1) определен и ограничен на* X. *Тогда оператор* $\psi(A)$ *обратим, и* $\psi(A)^{-1} = (1/\psi)(A)$.

Доказательство. Так как $(1/\psi)(s)\psi(s) = 1$, то силу теоремы 3 при $x \in D(A)$ имеем

$$(1/\psi)(A)\psi(A)x = \psi(A)(1/\psi)(A)x = x.$$

Поскольку оператор $\psi(A)(1/\psi)(A)$ замкнут как произведение замкнутого и ограниченного операторов, последнее равенство верно при всех $x \in X$. Следовательно, оператор $\psi(A)$ биективен и $\psi(A)^{-1} = (1/\psi)(A)$. $\Box$

Пример 4. Пусть $\psi(s) = -\log(1-s)$. Известно, что $\psi \in \mathcal{T}$ (см., напр., [12]). Кроме того, известно, что для функции

$$\nu(t, -1) = \int\limits_1^\infty \frac{t^\xi}{\xi\Gamma(\xi)} d\xi$$

справедливо равенство $1/\log(-x) = \widehat{\nu(t,-1)}(x)$ при $x < 0$ [20, глава V, §5.7, (11)]. Следовательно, $1/\psi = \widehat{(-f)}$, где $f(t) = e^{-t}\nu(t, -1)$. Пусть полугруппа T равномерно устойчива, т. е. $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$, где $\omega < 0$. С помощью правила Лопиталя легко проверить, что $1/\psi \in L\mathcal{M}_T$. Кроме того, оператор $(1/\psi)(A)$ определен и ограничен на X, так как

$$\|(1/\psi)(A)x\| \le \int\limits_0^\infty \|T(t)x\| f(t)dt \le M \int\limits_0^\infty e^{\omega t} f(t)dt \|x\| = \frac{M}{\log(1-\omega)}\|x\|.$$

Таким образом, по следствию 8 существует ограниченный обратный оператор

$$(\log(I-A))^{-1}x = \int\limits_0^\infty T(t)xe^{-t}\nu(t,-1)dt \ (x \in X).\square$$

Замечание 1. В [21] для случая, когда A есть негативный оператор (в смысле Коматсу) в X, доказана формула

$$(\log(I-A))^{-1}x = \int\limits_1^\infty \frac{R(t,A)xdt}{\pi^2 + \log^2(t-1)} \ (x \in X).$$

Положим

$$X_T := \{x \in X : \exists M(x) > 0, \omega(x) < 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \|T(t)x\| \le M(x)e^{\omega(x)t}\}.$$

Теорема 4. *Пусть $h = La$, где a — положительная мера, $\psi \in \mathcal{T}$. Тогда $h \circ \psi \in L\mathcal{M}$, и при $x \in X_T$ справедливо равенство*

$$(h \circ \psi)(A)x = h(\psi(A))x.$$

Доказательство. Справедлива формула

$$(h \circ \psi)(s) = \int\limits_0^\infty e^{u\psi(s)}da(u).$$

Но, как отмечалось выше,

$$g_u(s) = e^{u\psi(s)} = \int\limits_0^\infty e^{sv}d\nu_u(v), u \ge 0$$

для некоторой субвероятностной положительной меры ν_u на $\mathbb{R}_+$, а потому

$$(h \circ \psi)(s) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{sv}d\nu_u(v) \right) da(u). \quad (9)$$

Чтобы применить лемму 2, нам достаточно проверить, что функция $u \mapsto \nu_u(v)$ непрерывна на $(0,\infty)$. Для этого воспользуемся теоремой непрерывности для преобразования Лапласа (см., например, [22, глава XIII, §1, теорема 2a]). Пусть $u_n, u > 0$ и $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Поскольку $L\nu_{u_n}(-\lambda) = e^{u_n\psi(-\lambda)} \to L\nu_u(-z)$ при $\lambda > 0$, то по указанной теореме $\nu_{u_n}\{J\} \to \nu_u\{J\}$ для любого конечного интервала J непрерывности функции ν_u, что позволяет сделать вывод о непрерывности функции $u \mapsto \nu_u(v)$ на $(0,\infty)$.

Стало быть, в силу леммы 2, из (9) следует, что

$$(h\circ\psi)(s) = \int\limits_0^\infty e^{sv} d_v \left(\int\limits_0^\infty d\nu_u(v) da(u) \right).$$

Таким образом, $h\circ\psi \in L\mathcal{M}$ и при $x \in D_0((h\circ\psi)(A))$

$$(h\circ\psi)(A)x := \int\limits_0^\infty T(v)x d_v \left(\int\limits_0^\infty d\nu_u(v) da(u) \right). \tag{10}$$

Заметим, что при $x \in X_T$ интеграл, стоящий в правой части формулы (10), существует в смысле Бохнера, поскольку в силу леммы 2 и формулы (9)

$$\int\limits_0^\infty \|T(v)x\| d_v \left(\int\limits_0^\infty d\nu_u(v) da(u) \right) \le M(x) \int\limits_0^\infty e^{\omega(x)v} d_v \left(\int\limits_0^\infty d\nu_u(v) da(u) \right) =$$

$$M(x) \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{\omega(x)v} d_v \nu_u(v) \right) da(u) = M(x)(h\circ\psi)(\omega(x)).$$

Значит, $X_T \subset D_0((h\circ\psi)(A))$.

Далее, для любого функционала $\Lambda \in X'$ при $x \in X_T$ из (10) следует с учетом леммы 2, что

$$\Lambda((h\circ\psi)(A)x) = \int\limits_0^\infty \Lambda(T(v)x) d_v \left(\int\limits_0^\infty d\nu_u(v) da(u) \right) =$$

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \Lambda(T(v)x) d_v \nu_u(v) \right) da(u) = \Lambda \left(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty T(v)x d_v \nu_u(v) da(u) \right) =$$

$$\Lambda \left(\int\limits_0^\infty g_u(A)x da(u) \right) = \Lambda\left(h(\psi(A))x\right),$$

откуда и следует доказываемое равенство. □

Следствие 10. *Если полугруппа T равномерно устойчива (т. е. $\|T(t)\| \to 0, t \to \infty$), то $(h \circ \psi)(A) = h(\psi(A))$, причем этот оператор ограничен.*

Пример 5. Пусть $h(t) = (-t)^{-\alpha}$, $\psi(s) = -(-s)^{\beta}$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Тогда справедливо равенство

$$((-A)^{\beta})^{-\alpha}x = (-A)^{-\beta\alpha}x \ (x \in X_T).\square$$

Список литературы

[1] Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы /Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : ИЛ, 1962. – 829 с.

[2] А. Р. Миротин, Расширение функционального исчисления Хилле-Филлипса, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, 2009, № 5 (56), с. 66 – 69.

[3] B. Baeumer, M. Haase and M. Kovacs, Unbounded functional calculus for bounded groups with applications, J. Evol. Equ., 2009, Vol. 9, no 1, p. 171–195.

[4] О. В. Лопушанский, С. В. Шарин, Обобщенное функциональное исчисление типа Хилле–Филлипса для многопараметрических полугрупп, Сибирский матем.журнал, 2014. Том 55, № 1, с. 131 – 146.

[5] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука, 1963.

[6] Д.Хенри, Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений, М.: Мир, 1985.

[7] C. Martinez Carracedo and M. Sanz Alix, The Theory of Fractional Powers of Operators, North- Holland Mathematics Studies 187, Elsevier, Amsterdam - London - New York - Oxford - Paris - Shannon - Tokyo, 2001.

[8] Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант, Свойства отображений скалярных функций в операторные линейного замкнутого оператора, Тр. ИММ УрО РАН, 2015, т. 21, № 1, с. 153–165.

[9] Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения, Киев: Выща школа, 1989.

[10] Н. Винер. Интеграл Фурье и его приложения, М. : Физматгиз, 1963.

[11] Carasso A. S., On Subordinate Holomorphic Semigroups / A. S. Carasso, T. Kato // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 327, N 2. – P. 867 – 878.

[12] Миротин, А. Р. О $\mathcal{T}$-исчислении генераторов C_0-полугрупп / А. Р. Миротин // Сибирский матем. журнал. – 1998. – Т. 39, N 3. – С. 571–583. A. R. Mirotin, "On the $\mathcal{T}$-calculus of generators of C_0-semigroups", Siberian Math. J., 39:3 (1998)

[13] Миротин, А. Р. Многомерное $\mathcal{T}$-исчисление генераторов C_0-полугрупп/А. Р. Миротин // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11, № 2. – С. 142–170; A. R. Mirotin, “The multidimensional -calculus of generators of C_0-semigroups”, St. Petersburg Math. J., 11:2 (2000), 315–335

[14] Mirotin, A. R. Criteria for Analyticity of Subordinate Semigroups / A. R. Mirotin // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, № 2. – P. 262 – 275.

[15] Миротин, А. Р. Функции класса Шенберга $\mathcal{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры, Матем. заметки, 61:4 (1997), 630–633 ; A. R. Mirotin, “Functions from the Schoenberg class $\mathcal{T}$ on the cone of dissipative elements of a Banach algebra”, Math. Notes, 61:4 (1997), 524–527.

[16] Миротин, А. Р. Функции класса Шенберга $\mathcal{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры. II, Матем. заметки, 64:3 (1998), 423–430; A. R. Mirotin, “Functions from the Schoenberg class $\mathcal{T}$ act in the cone of dissipative elements of a Banach algebra. II”, Math. Notes, 64:3 (1998), 364–370.

[17] Mirotin, A. R. On multidimensional Bochner-Phillips functional calculus, arXiv:1902.08762.

[18] Миротин, А. Р. О совместных спектрах наборов неограниченных операторов, Изв. РАН. Сер. матем., 79:6 (2015), 145–170; A. R. Mirotin, “On joint spectra of families of unbounded operators”, Izv. Math., 79:6 (2015), 1235–1259.

[19] А. Р. Миротин, Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. III. Некоторые вопросы теории возмущений, Изв. вузов. Матем., 2017, 12, 24–34; A. R. Mirotin, On some functional calculus of closed operators on Banach space. III. Some topics of perturbation theory, Russian Math. (Iz. VUZ), 61:12 (2017), 19–28

[20] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, М. : Наука, 1969.

[21] А. Р. Миротин, Обращение операторно монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве, Труды Института математики. Минск.- 2004 - Т. 12, № 1. - С. 104 – 108.

[22] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. Т. 2, М. : Мир, 1984.