УДК 512.548

КОСЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В l-АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук
Могилевский государственный университет продовольствия
Ю. И. Кулаженко
доктор физико-математических наук
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель
М. В. Селькин
доктор физико-математических наук
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

В статье изучаются косые элементы в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, *которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени* A^k *n-арной группы* $< A, \eta >$ *с помощью подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$, *и n-арной операции* η. *В частности, доказана теорема, позволяющая для каждого элемента l-арной группы специального вида указать его косой элемент, выразив его через косые элементы n-арной группы, на декартовой степени которой построена указанная l-арная группа.*

Ключевые слова: полиадическая операция, *n*-арная группа, косой элемент.

1. Введение

Полиадическим группоидом специального вида называют [1] универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с одной l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1)+1$, которая определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η следующим образом.

Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\ldots$$
$$\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))).$$

При $s = 1$ n-арная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$.

Частными случаями ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки s $\in \mathbf{S}_k$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A, а также две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Обе операции Э. Поста являются частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

В [1] было доказано, что если n-арная операция η является ассоциативной, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной, то есть, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа. В связи с этим результатом возник вопрос: *будет ли l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l-арной группой, если $< A, \eta >$ – n-арная группа*.

Э. Пост получил в [3] положительный ответ на этот вопрос для двух своих полиадических операций, которые были упомянуты выше. В [2] это же было сделано для l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а затем в [4] и для операции $\eta_{s,\sigma,k}$, частными случаями которой ($n = 2$) являются и обе операции Э. Поста, а также операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

В данной статье доказывается анонсированная в [5] теорема, позволяющая для каждого элемента l-арной группы специального вида указать его косой элемент, выразив его через косые элементы n-арной группы на декартовой степени которой построена указанная l-арная группа. Приведены следствия из этой теоремы.

Предварительные сведения

Информацию, приведенную в этом разделе, можно найти в книгах [6–8].

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $\eta : A^n \to A$ называют *n-арной полугруппой*, если операция η *ассоциативна*, то есть в A для любого $i = 1, 2, ..., n - 1$ выполняется тождество ассоциативности

$$\eta(\eta(a_1 \ldots a_n)a_{n+1} \ldots a_{2n-1}) = \eta(a_1 \ldots a_i\eta(a_{i+1} \ldots a_{i+n})a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}).$$

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $\eta : A^n \to A$ называют *n-арной квазигруппой*, если для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n) = b,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $\eta : A^n \to A$ называют *n-арной группой*, если она является и n-арной полугруппой и n-арной квазигруппой.

Ясно, что полугруппы (квазигруппы, группы) – это n-арные полугруппы (n-арные квазигруппы, n-арные группы) при $n = 2$.

Замечание 2.1. Исторически n-арные полугруппы и n-арные квазигруппы были определены значительно позже n-арных групп. Поэтому в оригинальном определении n-арной группы, принадлежащем В. Дёрнте [9], отсутствовали n-арные полугруппы и n-арные квазигруппы. В нем говорилось об ассоциативности n-арной операции и однозначной разрешимости соответствующих уравнений.

Замечание 2.2. Э. Пост заметил [3], что: 1) требование однозначной разрешимости уравнений в определении n-арной группы В. Дёрнте можно ослабить, потребовав только их разрешимость; 2) число уравнений можно уменьшить до двух, а при $n = 3$ даже до одного. После Э. Поста и В. Дёрнте было получено большое число новых определений n-арной группы. Со многими из них можно ознакомиться по книге [8]. Приведем здесь только два определения n-арной группы, наиболее интересные на наш взгляд. В определении, принадлежащем А.Н. Скибе и В.И. Тютину

[10], требуется для любых a, $b \in A$ разрешимость в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ либо двух уравнений

$$\eta(x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}) = b,\ \eta(\underbrace{a \ldots a}_{n-1}\ y) = b,$$

либо при $n \geq 3$ одного уравнения

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\ x\ \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = b.$$

А.М. Гальмак доказал [8], что n-арную группу можно определить как n-арную полугруппу $< A, \eta >$, в которой либо для любых $a, b \in A$ в A разрешимы два уравнения

$$\eta(x_1 \ldots x_{n-1}a) = b,\ \eta(ay_1 \ldots y_{n-1}) = b$$

с $n - 1$ неизвестными, либо при $n \geq 3$ для любых a, b, $c \in A$ в A разрешимо одно уравнение

$$\eta(ax_1 \ldots x_{n-2}\, c) = b.$$

с $n - 2$ неизвестными.

Согласно Э. Посту [3], последовательность $e_1 \ldots e_{s(n-1)}$, где $s \geq 1$, элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называется *нейтральной*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{s(n-1)}x) = \eta(xe_1 \ldots e_{s(n-1)}) = x$$

для любого $x \in A$.

Это определение обобщает на n-арный случай определение единицы группы A как элемента $e \in A$ такого, что

$$ex = xe = x$$

для любого $x \in A$. Существуют и другие обобщения единицы группы (см., например, [7]).

Согласно Э. Посту [3], последовательность β элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называется *обратной* к последовательности α элементов этой же n-арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Одноэлементную обратную последовательность $b \in A$ для последовательности α естественно называть обратным элементом для этой последовательности.

Согласно В. Дёрнте [9], элемент b n-арной группы $< A, \eta >$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\ b\ \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a, то употребляют обозначение $b = \overline{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\ \overline{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Замечание 2.3. Можно показать, что:

1) *для того, чтобы последовательность* $e_1 \ldots e_{s(n-1)}$ *являлась нейтральной в* n*-арной группе* $< A, \eta >$, *достаточно выполнения для некоторого* $a \in A$ *одного из следующих равенств*

$$\eta\ (e_1 \ldots e_{s(n-1)}a) = a,\ \eta\ (ae_1 \ldots e_{s(n-1)}) = a;$$

2) *для того, чтобы последовательность* β *являлась обратной к последовательности* α *в* n*-арной группе* $< A, \eta >$, *достаточно нейтральности одной из последовательностей* $\alpha\beta$, $\beta\alpha$;

3) *для того, чтобы элемент b n-арной группы* $< A, \eta >$ *являлся косым для* $a \in A$, *достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого* $i = 1, 2, \ldots, n$;

4) *для любого элемента a n-арной группы* $< A, \eta >$ *его косой элемент* $\overline{a}$ *является обратным для последовательности* $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$, *а последовательности* $\overline{a}\,\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$ *и* $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}\,\overline{a}$ *являются нейтральными.*

Следующая теорема позволяет находить значения l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, не используя явно n-арную операцию $\eta_{1,\sigma,k}$, как это сделано в определении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$.

Теорема 2.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ *j-ая компонента* y_j *находится по формуле*

$$y_j = \eta\,(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\eta(\ldots$$

$$\ldots \eta\,(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \qquad (2.1)$$

Замечание 2.4. Если n-арная операция η ассоциативна, то (2.1) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \qquad (2.2)$$

Если η – бинарная операция, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$ из [2]. При этом равенство (2.1) принимают вид

$$y_j = (x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\ldots (x_{s\sigma^{s-1}(j)}\ x_{(s+1)\sigma^{s}(j)}) \ldots))). \qquad (2.3)$$

В правой части равенства (2.3) символ бинарной операции η, как обычно, не указан.

Если бинарная операция η ассоциативна, то (2.2) может быть переписано следующим образом

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{s\sigma^{s-1}(j)}\ x_{(s+1)\sigma^{s}(j)} = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\ x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Следующие теоремы показывают, что некоторые важнейшие свойства переносятся с n-арного группоида $< A, \eta >$ на l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Теорема 2.2 [1]. *Если n-арная операция* η *– ассоциативна, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *ассоциативна.*

Теорема 2.3 [4]. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная квазигруппа, то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– l-арная квазигруппа.*

Теорема 2.4 [4]. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– l-арная группа.*

3. Основной результат

Согласно теореме 2.4, если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l-арная группа. Укажем для каждого элемента этой l-арной группы его косой элемент.

Теорема 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная групп*а $(n \geq 3)$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ l*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}),\ j = 1, \ldots, k, \quad (3.1)$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(1)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(1)}}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma(k)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(k)}})).$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что формула (3.1) корректна, так как число элементов в правой части этой формулы равно

$$(l-2)(n-2) = (s(n-2)-1)(n-1)+1.$$

Положим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}(b_1, \ldots, b_k)) = (c_1, \ldots, c_k).$$

Тогда, принимая во внимание замечание 2.4, тождественность подстановки σ^{l-1} и нейтральность последовательностей

$$a_{\sigma^{l-2}(j)}\ \underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}},$$

$$a_{\sigma^{l-3}(j)}\ \underbrace{a_{\sigma^{l-3}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-3}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-3}(j)}},$$

....

$$a_{\sigma(j)}\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}},$$

будем иметь

$$c_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)}\ a_{\sigma^{l-2}(j)}\ b_{\sigma^{l-1}(j)}) = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}\ b_j) =$$

$$= \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-3}(j)}\ a_{\sigma^{l-2}(j)}\ \underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}}$$

$$\underbrace{a_{\sigma^{l-3}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-3}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-3}(j)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}) =$$

$$= \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-3}(j)}\ \underbrace{a_{\sigma^{l-3}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-3}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-3}(j)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}) = \ldots$$

$$\ldots = \eta(a_j a_{\sigma(j)}\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}) = a_j,$$

то есть $c_j = a_j$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно,

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}(b_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{a}.$$

Теорема доказана.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то она удовлетворяет и условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где компоненты* $b_1, \ldots, b_k$ *определяются равенствами* (3.1), *является косым для* $\mathbf{a}$.

В качестве подстановки σ в следствии 3.1 можно взять любой цикл σ длины $n - 1$ из $\mathbf{S}_k$, если $n \leq k + 1$. Например, цикл $\sigma = (12 \ldots n - 1)$.

Для $n = 2$ результат, аналогичный теореме 3.1, доказан в [2].

Предложение 3.1 [2, предложение 3.6.3]. *Пусть A – группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *элемент*

$$\overline{\mathbf{a}} = (a^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a^{-1}_{\sigma(1)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a^{-1}_{\sigma(k)})$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Замечание 3.1. Элементы

$$b_1 = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}} \ldots \underbrace{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(1)}}),$$

....

$$b_k = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}} \ldots \underbrace{a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(k)}})$$

из теоремы 3.1 являются обратными в n-арной группе $< A, \eta >$ соответственно для последовательностей

$$a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(k)}.$$

Аналогично, элементы

$$a^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a^{-1}_{\sigma(1)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a^{-1}_{\sigma(k)}$$

из предложения 3.1 являются обратными в группе A соответственно для последовательностей (элементов)

$$a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(k)}.$$

Таким образом, теорему 3.1 и предложение 3.1 можно объединить в одну теорему, включающую и случай $n \geq 3$ и случай $n = 2$.

Теорема 3.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная групп*а, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *элемент*

$$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k),$$

где b_j *– обратный элемент в* $< A, \eta >$ *для последовательности*

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \ldots, k, \tag{3.2}$$

является косым для **a**, *то есть* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$.

Следствие 3.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная групп*а, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ *элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где* b_j *– обратный элемент в* $< A, \eta >$ *для последовательности* (3.2), *является косым для* **a**.

Полагая в теореме 3.2 или в следствии 3.2 $s = 1$, получим

Следствие 3.3. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная групп*а, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *n-арной группы* $< A^k, \eta_{1, \sigma, k} >$ *элемент*

$$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k),$$

где b_j *– обратный элемент в* $< A, \eta >$ *для последовательности*

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}, \ j = 1, \ldots, k,$$

является косым для **a**, *то есть* $\overline{\mathbf{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$.

Следующее следствие получается из теоремы 3.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 3.4. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$ $(s \geq 2)$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ из $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{2s+1, \sigma, k} >$ *элемент*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(1)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(1)}}\ ), \ldots, \eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(k)}} \ \ldots \ \overline{a_{\sigma(k)}}\ ))$$

является косым для **a**.

Полагая в следствии 3.3 $n = 3$, и, учитывая тот факт, что в любой тернарной группе $< A, \eta >$ обратная последовательность для элемента a совпадает с его косым элементом $\overline{a}$, получим

Следствие 3.5. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная групп*а, *подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^3 = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *тернарной группы* $< A^k, \eta_{1, \sigma, k} >$ *элемент*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\overline{a_{\sigma(1)}}, \ldots, \overline{a_{\sigma(k)}})$$

является косым для **a**.

Следствие 3.5 может быть формально получено и из следствия 3.4, если в нем положить $s = 1$ и считать, что $\eta(a) = a$ для любого $a \in A$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А. М.*** О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. ***Гальмак, А. М.*** О разрешимости уравнений в $< A^k, h_{s,\sigma,k} >$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1(51). – С. 4–10.
5. ***Гальмак, А. М.*** Косые элементы в полиадических группах специального вида / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко, М. В. Селькин / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 186–188.
6. ***Русаков, С. А.*** Алгебраические *n*-арные системы / С. А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. ***Гальмак, А. М.*** *n*-Арные группы / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – Часть 1. – 202 с.
8. ***Гальмак, А. М.*** *n*-Арные группы / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – Часть 2. – 324 с.
9. ***Dörnte, W.*** Untersuchungen u ber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
10. ***Тютин, В.И.*** К аксиоматике *n*-арных групп / В. И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.

Поступила в редакцию 28.01.2020 г.
Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A., Kulazhenko Y., Selkin M. SKEW ELEMENTS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM.

The article deals with the study of skew elements in polyadic groups of special form, that is in polyadic groups with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, *called polyadic operation of special form and defined on Cartesian power of* A^k *n-ary group* $< A, \eta >$ *by substitution* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *and n-ary operation* η. *In particular, there has been proved a theorem that allows to determine a skew element for each element of l-ary group of special form, the skew element being formulated by means of a skew element of n-ary group on Cartesian power of which the given l-ary group is constructed.*

Keywords: polyadic operation, *n*-ary group, skew element.