Проблемы физики, математики и техники, № 1 (46), 2021

ФИЗИКА

УДК 539.12

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ СЕЧЕНИЯ БИНАРНЫХ РЕАКЦИЙ С ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

В.В. Андреев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

METHOD FOR CALCULATING THE CROSS SECTION OF BINARY REACTIONS WITH POLARIZED PARTICLES

V.V. Andreev

F. Scorina Gomel State University

Разработана новая методика вычисления сечений бинарных реакций с поляризованными частицами. Методика основана на непосредственном вычислении матричных элементов в специальном виде с помощью метода базисных спиноров. Приведены новые аналитические формулы для интегрирования дифференциальных сечений по углу рассеяния бинарной реакции.

Ключевые слова*: бинарная реакция, диаграмма Фейнмана, биспинор, спиральность.*

A new technique for calculating the cross sections for binary reactions with polarized particles has been developed. The technique is based on direct calculation of matrix elements in a special form using the method of basis spinors. New analytical formulas for integrating differential cross sections with respect to the scattering angle of a binary reaction are presented.

Keywords*: binary reaction, Feynman diagram, bispinor, helicity.*

Введение

Парциальное разложение матричных элементов реакций взаимодействий, как известно, представляет собой удобный аппарат для анализа угловых распределений вторичных частиц. При этом сечение реакции можно получить в относительно общем виде. Однако использование этого разложения применительно к диаграмм Фейнмана наталкивается на ряд проблем.

Во первых, это вычисление коэффициентов парциального разложения. Структура диаграмм Фейнмана не позволяет находить их непосредственно. Для *t*- и *u*-канальных матричных элементов бинарных реакций зависимость от угловых переменных содержится в знаменателях, что автоматически приводит к бесконечному ряду по полному угловому моменту в классическом парциальном разложении.

Во-вторых, при интегрировании дифференциального сечения по угловым переменным возникают специфические интегралы, которые требуют специальных методов их вычисления, что составляет дополнительную трудность при получении численных значений сечений бинарных реакций [1].

В данной работе представлена новая методика вычисления диаграмм Фейнмана и их квадратичных комбинаций, основанная на разложении Джакоба-Вика для бинарных реакций. В этом подходе также решается задача интегрирования дифференциального сечения бинарной реакции с помощью точного аналитического вычисления возникающих интегралов.

1 Разложение Джакоба – Вика для бинарных реакций

В этом разделе изложим некоторые элементы разложения Джакоба – Вика для бинарных реакций $a(p_1,\lambda_1)+b(p_2,\lambda_2)\to c(k_1,\tau_1)+d(k_2,\tau_2)$ в системе центра инерции.

Удобно определить двухчастичный базис состояний $\left|i\right\rangle=\left|a,b\right\rangle$ и $\left|f\right\rangle=\left|c,d\right\rangle$ в переменных полного импульса двух частиц

$$\mathbf{P}_i=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2\ ,\mathbf{P}_f=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2 \qquad (1.1)$$

и импульса относительного движения. В системе центра инерции, где $\mathbf{P}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{0}$, относительные импульсы состояний определяются уравнениями

$$\mathbf{p}_{12}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2\right),\ \mathbf{k}_{12}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2\right). \qquad (1.2)$$

Пусть в сферической системе координат импульсы (1.2) имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_{12}=\mathrm{p}_{12}\left\{\sin\theta_i\cos\phi_i,\sin\theta_i\sin\phi_i,\cos\theta_i\right\},\\ \mathrm{p}_{12}=\left|\mathbf{p}_{12}\right|,\\ \mathbf{k}_{12}=\mathrm{k}_{12}\left\{\sin\theta_f\cos\phi_f,\sin\theta_f\sin\phi_f,\cos\theta_f\right\},\\ \mathrm{k}_{12}=\left|\mathbf{k}_{12}\right|.\end{gathered} \qquad (1.3)$$

Разложение Джакоба – Вика *S*-матричных элементов для бинарной реакции в системе центра инерции можно представить в виде [2], [3]:

$$\begin{aligned}&\left\langle\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\tau_1,\tau_2\left|S\right|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\lambda_1,\lambda_2\right\rangle=\\ &=\delta^{(3)}\left(\mathbf{P}_f-\mathbf{P}_i\right)\left\langle\mathbf{k}_{12},\tau_1\tau_2\left|S\right|\mathbf{p}_{12}\lambda_1\lambda_2\right\rangle=\end{aligned} \qquad (1.4)$$

© *Андреев В.В.*, 2021

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D^{*J}_{\lambda_{12},\tau_{12}}(\phi,\theta,-\phi) \left\langle \mathrm{k}_{12}, \tau_1\tau_2 \left| S_J \right| \mathrm{p}_{12}, \lambda_1\lambda_2 \right\rangle.$$

Индексы *D*-функции Вигнера $\lambda_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$ и $\tau_{12} = \tau_1 - \tau_2$ являются функциями спиральностей частиц a, b, c и *d*. Углы ϕ, θ связаны с сферическими углами $\phi_{f,i}, \theta_{f,i}$ формулой

$$D^{*J}_{\lambda_{12},\tau_{12}}(\phi,\theta,-\phi) = \\ = \sum_\rho D^{*J}_{\rho,\tau_1-\tau_2}(\phi_f,\theta_f,-\phi_f) D^J_{\rho,\lambda_1-\lambda_2}(\phi_i,\theta_i,-\phi_i). \quad (1.5)$$

В частности,

$$\cos\theta = \cos\theta_f \cos\theta_i + \cos(\varphi_f - \varphi_i)\sin\theta_f \sin\theta_i. \quad (1.6)$$

Соответственно, парциальная спиральная амплитуда $\left\langle \mathrm{k}_{12}, \tau_1\tau_2 \left| S_J \right| \mathrm{p}_{12}, \lambda_1\lambda_2 \right\rangle$ связана с матричным элементом $\left\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 \left| S \right| \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle$ посредством уравнения

$$\left\langle \mathrm{k}_{12}, \tau_1\tau_2 \left| S_J \right| \mathrm{p}_{12}, \lambda_1\lambda_2 \right\rangle = \\ = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \quad (1.7) \\ \times D^J_{\lambda_{12},\tau_{12}}(\phi,\theta,-\phi) \left\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \tau_1, \tau_2 \left| S \right| \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle.$$

В отличие от классической работы [2] в выражениях (1.4) и (1.7) не выделяется отдельно функция $\delta(E_a + E_b - E_c - E_d)$, связанная с сохранением энергии. Наличие этой функции приводит к тому, что в системе центра инерции

$$\mathrm{k}_{12} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)}{2\sqrt{s}}, \\ \mathrm{p}_{12} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}}, \quad (1.8)$$

где функция Каллена имеет вид

$$\lambda(a,b,c) = (a-b-c)^2 - 4bc = \\ = \left(a - \left[\sqrt{b} + \sqrt{c}\right]^2\right)\left(a - \left[\sqrt{b} - \sqrt{c}\right]^2\right). \quad (1.9)$$

Поэтому в формулах (1.4) и (1.7) парциальные амплитуды матрицы $\mathcal{S}$ зависят только от одной инвариантной переменной $s = P_i^2$, а все нормировочные множители включены в парциальные амплитуды.

Разложения (1.4) и (1.7) обобщены на случай с $\mathbf{P}_i \neq 0$ в [3] с использованием так называемых пуанкаре-инвариантных операторов спиральностей

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{W_j^\mu P_\mu}{\sqrt{(p_j P_i)^2 - m_j^2 P_i^2}}, \ j = (a,b) \ , \quad (1.10)$$

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{W_j^\mu P_\mu}{\sqrt{(p_j P_f)^2 - m_j^2 P_f^2}}, \ j = (c,d) \ , \quad (1.11)$$

где *W* – оператор спина Паули – Любанского. В системе $\mathbf{P} = 0$ все эти операторы совпадают с операторами спиральностей частиц реакции.

Использование пуанкаре-инвариантных операторов спиральностей приводит к тому, что соотношения (1.4) и (1.7) по форме не изменяются. Для получения соотношений в системе отсчета с $\mathbf{P}_i \neq 0$ необходимо сделать замены вида

$$\lambda_j \to \tilde{\lambda}_j \ , j = (a,b,c,d). \quad (1.12)$$

Для реакции распада $a \to c + d$ парциальные разложения упрощаются и определяются только одной парциальной амплитудой с $J = S$, где *S* – спин частицы *a*.

2 Методика вычисления дифференциального сечения

Итак из общей релятивистской теории реакций следует, что *S*-матричный элемент может быть представлен в виде (1.4). Отсюда следует, что соответствующий любой диаграмме Фейнмана бинарной реакции

$$a(p_1,\lambda_1) + b(p_2,\lambda_2) \to c(k_1,\tau_1) + d(k_2,\tau_2) \quad (2.1)$$

матричный элемент может быть также представлен в виде разложения (1.4)

$$\mathcal{M}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(s,t) = \\ = \sum_{J=0}^\infty \frac{2J+1}{4\pi} h^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(J) D^{*J}_{\lambda_{12},\tau_{12}}(\phi,\theta,-\phi). \quad (2.2)$$

Если матричный элемент $\mathcal{M}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}$ (2.2) зависит только от инвариантной переменной $s = (p_1 + p_2)^2$, то ряд по *J* обрывается. Тогда такое разложение становится удобным для практических расчетов. Однако, если имеется зависимость от переменной Мандельстама $t = (p_2 - k_2)^2$ (или $u = (p_1 - k_2)^2$), то ряд становится бесконечным. Для устранения этих недостатков предлагается новая методика, основанная на разложение Джакоба – Вика.

Матричный элемент диаграммы Фейнмана можно представить в виде произведения множителя $\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(s,\theta,\phi)$, который содержит спиновую структуру внешних частиц и инвариантного скалярного коэффициента $F(s,t)$

$$\mathcal{M}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(s,t) = F(s,t)\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(s,\theta,\phi). \quad (2.3)$$

Зависимость от угловых переменных θ, ϕ для $\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(s,\theta,\phi)$ присутствует только в числителе этой функции.

Инвариантный коэффициент $F(s,t)$ зависит только от скалярных произведений импульсов частиц. В отличие от $\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(s,\theta,\phi)$ коэффициент $F(s,t)$ для *t*- и *u*-канальных диаграмм содержит зависимость от углов в знаменателе (знаменатели пропагаторов, входящих в диаграмму Фейнмана), т. е.,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$F(s,t) \sim \frac{1}{t-m^2}, \; F(s,t) \sim \frac{1}{u-m^2}. \qquad (2.4)$$

Поэтому разложение (2.2) становится бесконечным рядом по J из-за присутствия инвариантных коэффициентов (2.4) и вследствие соотношения [4, с. 1027, формула 8.791]

$$\frac{1}{t-m^2} = \frac{x}{\cos\theta - y} = \\ = (-x)\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(2\ell+1\right)P_\ell\left(\cos\theta\right)Q_\ell\left(y\right), \qquad (2.5)$$

где x и y являются функциями, зависящими только от s и масс частиц бинарной реакции, а функции $P_\ell\left(y\right)$ и $Q_\ell\left(y\right)$ – полиномы Лежандра первого и второго рода.

Матричный элемент $\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}\left(s,\theta,\phi\right)$ можно разложить уже в конечный ряд вида

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}\left(s,\theta,\phi\right) = \\ = \sum_{J=0}^{k}\tilde{h}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(J,s)D^{*J}_{\lambda_{12},\tau_{12}}\left(\phi,\theta,-\phi\right), \qquad (2.6)$$

где $k = \max\left(\left|\lambda_{12}\right|,\left|\tau_{12}\right|\right)$ (максимальное из возможных значений).

Коэффициенты разложения (2.6) вычисляются посредством уравнения

$$\tilde{h}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(J,s) = \frac{2J+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi \times \\ \times D^{J}_{\lambda_{12},\tau_{12}}\left(\phi,\theta,-\phi\right)\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}\left(s,\theta,\phi\right). \qquad (2.7)$$

3 Вычисление спиральных амплитуд методом базисных спиноров

Для получения $\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}\left(s,\theta,\phi\right)$ в виде (2.6) используем метод базисных спиноров [5]–[7], в котором удается представить матричный элемент в наиболее удобном виде для интегрирования по угловым переменным θ,ϕ.

Основной задачей вычисления матричных элементов диаграмм Фейнмана является преобразование функции с фермионными состояниями вида

$$\mathcal{M}_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p,s_p;k,s_k\right) = \\ = \overline{w}^{D}_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)Q\, w^{B}_{\lambda_k}\left(k,s_k\right), \qquad (3.1)$$

в явно скалярную функцию.

В соотношении (3.1) индексы λ_p и λ_k – проекции спина для фермионов с 4-импульсами p,k и векторами поляризации s_p,s_k. Функция $w^{D}_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)$ для $D=+1$ является биспинором Дирака фермиона $u_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)$, а для $D=-1$ биспинором Дирака антифермиона $\upsilon_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)$.

3.1 *Базис пространства Минковского и изотропная тетрада*

В пространстве Минковского введем четверку (тетраду) ортонормированных 4-векторов l_A $(A=0,1,2,3)$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left(l_\mu l_\nu\right) = g_{\mu\nu}, \; l_0^2 = -l_1^2 = -l_2^2 = -l_3^2 = 1, \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}l^{\mu}_{\mu'}l^{\nu}_{\nu'}l^{\rho}_{\rho'}l^{\sigma}_{\sigma'} = -\varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}, \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}l^{\mu}_{0}l^{\nu}_{1}l^{\rho}_{2}l^{\sigma}_{3} = \varepsilon^{0123} = 1. \qquad (3.3)$$

Используя векторы l_μ, определим светоподобные векторы, которые образуют изотропную тетраду в пространстве Минковского:

$$b_\rho = \frac{l_0+\rho l_3}{2}, \; n_\lambda = \frac{\lambda l_1 + \mathrm{i} l_2}{2}, \; (\rho,\lambda = \pm 1). \qquad (3.4)$$

Из соотношений (3.2) и (3.4) следует:

$$\left(b_\rho b_{-\lambda}\right) = \frac{\delta_{\lambda,\rho}}{2}, \; \left(n_\lambda n_{-\rho}\right) = \frac{\delta_{\lambda,\rho}}{2}, \; \left(b_\rho n_\lambda\right) = 0, \qquad (3.5)$$

3.2 *Базисные спиноры*

С помощью векторов изотропной тетрады (3.4) определим безмассовые базисные спиноры (биспиноры) $u_\lambda\left(b_{-1}\right)$ и $u_\lambda\left(b_1\right)$:

$$\hat{b}_{-1}u_\lambda\left(b_{-1}\right) = 0, \; u_\lambda\left(b_1\right) = \hat{b}_1 u_{-\lambda}\left(b_{-1}\right), \qquad (3.6)$$

$$\omega_\lambda u_\lambda\left(b_{\pm1}\right) = u_\lambda\left(b_{\pm1}\right) \qquad (3.7)$$

с проективной матрицей

$$\omega_\lambda = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}+\lambda\gamma_5\right)$$

и условием нормировки

$$u_\lambda\left(b_{\pm1}\right)\overline{u}_\lambda\left(b_{\pm1}\right) = \omega_\lambda\hat{b}_{\pm1}. \qquad (3.8)$$

Фазовое соглашение, которое будет определять связь между спинорами с разной спиральностью, выберем в виде

$$\hat{n}_\lambda u_{-\rho}\left(b_{-1}\right) = \delta_{\lambda,\rho}u_\rho\left(b_{-1}\right). \qquad (3.9)$$

Соотношения (3.6), (3.7) и (3.9) можно записать в обобщенном виде:

$$\hat{b}_\rho u_\lambda\left(b_A\right) = \delta_{\rho,-A}u_{-\lambda}\left(b_{-A}\right), \qquad (3.10)$$

$$\omega_\lambda u_\rho\left(b_A\right) = \delta_{\rho,\lambda}u_\lambda\left(b_A\right), \qquad (3.11)$$

$$\hat{n}_\rho u_\lambda\left(b_A\right) = \left(-A\right)\delta_{\rho,A\times\lambda}u_{-\lambda}\left(b_A\right), \\ (A,\rho,\lambda = \pm1). \qquad (3.12)$$

Важным свойством базисных спиноров является соотношение полноты, которое доказывается с помощью (3.6), (3.7) и (3.8)

$$\sum_{\lambda,A=-1}^{1}u_\lambda\left(b_A\right)\overline{u}_{-\lambda}\left(b_{-A}\right) = \mathrm{I}. \qquad (3.13)$$

Спинорные произведения базисных спиноров (3.6) задаются простыми соотношениями

$$\overline{u}_\lambda\left(b_C\right)u_\rho\left(b_A\right) = \delta_{\lambda,-\rho}\,\delta_{C,-A}, \\ (C,A,\lambda,\rho = \pm1). \qquad (3.14)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3.3 *«Строительные блоки» фейнмановских диаграмм*

Рассмотрим специальный случай матричного элемента (3.1), когда $p=b_C$ и $k=b_{-A}$, т. е.

$$\Gamma^{C,A}_{\rho,\sigma}\left[Q\right]=\bar{u}_{\rho}\left(b_C\right)Q\,u_{-\sigma}\left(b_{-A}\right), \qquad (3.15)$$

который и будем далее называть **базовым матричным элементом**.

С помощью основных соотношений МБС несложно найти выражение для (3.15) в терминах векторов изотропной тетрады $b_{\pm1}, n_{\pm1}$ для различных видов оператора *Q*, например

$$\Gamma^{C,A}_{\rho,\sigma}\left[\gamma^{\mu}\right]=\delta_{\sigma,-\rho}\left(\delta_{C,-A}\,\tilde{b}^{\mu}_{-A}+A\,\delta_{C,A}\,\tilde{n}^{\mu}_{-A\times\rho}\right). \qquad (3.16)$$

Произведение двух базовых элементов (3.15) запишется в виде

$$\begin{gathered}\Gamma^{C,A}_{\rho,\sigma}\left[\gamma^{\mu}\right]\Gamma^{C'A'}_{\rho',\sigma'}\left[\gamma_{\mu}\right]=\\ =2\delta_{\rho,-\sigma}\delta_{\rho',-\sigma'}\left[AA'\delta_{C,A}\delta_{C',A'}\delta_{A\sigma,-A'\sigma'}+\right. \qquad (3.17)\\ \left.+\delta_{C,-A}\delta_{C',-A'}\delta_{A',-A}\right].\end{gathered}$$

С помощью соотношения полноты амплитуда процесса может быть представлена в виде композиции функций $\Gamma^{C,A}_{\sigma,\rho}$ (3.15). Такие вставки позволяют разбить фермионную линию (3.1) на произведение фермионных линий с базисными спинорами $u_{\lambda}\left(b_A\right)$:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p,s_p\ k,s_k;Q\right)=\\ =\sum_{A,\,C,\sigma,\,\rho=-1}^{1}\left\{\bar{w}^{D}_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)u_{-\sigma}\left(b_{-C}\right)\right\}\times\\ \times\left\{\bar{u}_{\sigma}\left(b_C\right)Qu_{-\rho}\left(b_{-A}\right)\right\}\left\{\bar{u}_{\rho}\left(b_A\right)w^{F}_{\lambda_k}\left(k,s_k\right)\right\}= \qquad (3.18)\\ =\sum_{\sigma,\,\rho=-1}^{1}\sum_{A,\,C=-1}^{1}\bar{s}^{(C,\,D)}_{\sigma,\lambda_p}\left(p,s_p\right)\Gamma^{C,A}_{\sigma,\rho}\left[Q\right]s^{(A,\,F)}_{\rho,\lambda_k}\left(k,s_k\right).\end{gathered}$$

В соотношении (3.18) выделены коэффициенты разложения $s,\bar{s}$ физических спиноров по базисным спинорам, которые являются частными случаями базового матричного элемента $\Gamma\left[Q\right]$:

$$s^{(A,\,D)}_{\rho,\lambda}\left(p,s_p\right)=\bar{u}_{\rho}\left(b_A\right)w^{D}_{\lambda}\left(p,s_p\right) \qquad (3.19)$$

и обладают следующим свойством:

$$\bar{s}^{(A,\,B)}_{\rho,\lambda}\left(p,s_p\right)=s^{*(-A,\,B)}_{-\rho,\lambda}\left(p,s_p\right). \qquad (3.20)$$

Коэффициент разложения (3.19) для спиральных состояний фермиона можно представить в виде [8]

$$\begin{gathered}s^{(A,B)}_{\rho,\lambda}(p,s_H)=\\ =\left(B\lambda\right)f_{\rho\lambda,B}\sqrt{\omega_{m_p}\left(\mathrm{p}\right)-\left(B\lambda\rho\right)\left|\mathbf{p}\right|}\times \qquad (3.21)\\ \times D^{*1/2}_{A\rho/2,-B\lambda/2}(\phi_p,\theta_p,-\phi_p),\end{gathered}$$

где $f_{\lambda\rho,B}=\delta_{\rho,-\lambda}+B\delta_{\rho,\lambda}$.

3.4 *Вычисление спиральных амплитуд*

Вычислим матричный элемент *t*-канальной диаграммы Фейнмана с обменом γ-квантом для процесса

$$\mathrm{e}^{-}(p_1,\lambda_{p_1})\mathrm{e}^{+}(p_2,\lambda_{p_2})\to\mathrm{e}^{-}(k_1,\lambda_{k_1})\mathrm{e}^{+}(k_2,\lambda_{k_2}),$$

который определяется формулой:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}^{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}=\frac{e^2}{(k_2-p_2)^2}\bar{u}_{\lambda_{k_1}}\left(k_1\right)\times \qquad (3.22)\\ \times\gamma_{\mu}u_{\lambda_{p_1}}\left(p_1\right)\bar{\upsilon}_{\lambda_{p_2}}\left(p_2\right)\gamma^{\mu}\upsilon_{\lambda_{k_2}}\left(k_2\right).\end{gathered}$$

Расчеты проведем в системе центра инерции. Следуя разработанной методике, в качестве скалярного инвариантного множителя $F(s,t)$ выберем функцию

$$F(s,t)=\frac{e^2}{(k_2-p_2)^2}=\frac{2e^2}{\left(s-4m_e^2\right)(1-\cos\theta)}. \qquad (3.23)$$

Согласно (2.3) остальная часть (3.22) определяет множитель $\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}$.

Используя разложение (3.18) для фермионных цепочек и уравнение (3.17) после подстановки коэффициентов разложения и тривиального суммирования получим:

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}=s\sum_{J=0}^{1}D^{*J}_{\lambda_{p_{12}},\lambda_{k_{12}}}(\phi,\theta,-\phi)\times\\ \times\left\{\begin{matrix}\lambda_{p_1} & \lambda_{k_1} & 1/2\\ -\lambda_{p_2} & -\lambda_{k_2} & 1/2\end{matrix}\middle| J\right\}\times \qquad (3.24)\\ \times\left[2(-1)^J\beta_e^2\delta_{\lambda_{p_1},\lambda_{k_1}}\delta_{\lambda_{p_2},\lambda_{k_2}}\delta_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}+\right.\\ \left.+\left(1+\lambda_{k_1}\lambda_{p_1}\beta_e^2\right)\delta_{\lambda_{p_1}\lambda_{p_2},\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}+\eta_e\delta_{\lambda_{p_1}\lambda_{p_2},-\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}\right],\end{gathered}$$

где $s=(p_1+p_2)^2$, $\eta_e=2m_e/\sqrt{s}$, $\beta_e=\sqrt{1-\dfrac{4m_e^2}{s}}$ и $\lambda_{p_{12}}=(\lambda_{p_1}-\lambda_{p_2})/2$, $\lambda_{k_{12}}=(\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2})/2$.

Для расчета (3.24) использовалось разложение Клебша – Гордана для произведения двух *D*-функций Вигнера

$$\begin{gathered}D^{j_1}_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\phi,\theta,\varphi\right)D^{j_2}_{m_1,m_2}\left(\phi,\theta,\varphi\right)=\\ =\sum_{j=\left|j_1-j_2\right|}^{j_1+j_2}\left\{\begin{matrix}\lambda_1 & \lambda_2 & j_1\\ m_1 & m_2 & j_2\end{matrix}\middle| j\right\}D^{j}_{\lambda_1+m_1,\lambda_2+m_2}\left(\phi,\theta,\varphi\right) \qquad (3.25)\end{gathered}$$

с дополнительной функцией от произведения коэффициентов Клебша – Гордана

$$\mathbf{C}\left\{\begin{matrix}j_1 & j_2 & j\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2\end{matrix}\right\}$$

группы SU(2)

$$\begin{gathered}\left\{\begin{matrix}\lambda_1 & \lambda_2 & j_1\\ m_1 & m_2 & j_2\end{matrix}\middle| j\right\}=\\ =\mathbf{C}\left\{\begin{matrix}j_1 & j_2 & j\\ \lambda_1 & m_1 & \lambda_1+m_1\end{matrix}\right\}\mathbf{C}\left\{\begin{matrix}j_1 & j_2 & j\\ \lambda_2 & m_2 & \lambda_2+m_2\end{matrix}\right\}. \qquad (3.26)\end{gathered}$$

В данном случае метод базисных спиноров сразу дал искомый результат для представления функции $\widetilde{\mathcal{M}}^{\lambda_{k_1},\lambda_{k_2}}_{\lambda_{p_1},\lambda_{p_2}}$ в виде (2.6).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4 Квадратичная комбинация матричных элементов

Поскольку дифференциальное сечение процесса (2.1) пропорционально квадрату модуля амплитуды, тогда оно будет содержать квадратичные комбинации матричных элементов диаграмм Фейнмана. Запишем произвольную квадратичную комбинацию матричного элементов двух диаграмм Фейнмана $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*$, используя (2.3) и (2.6):

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* = \sum_{J,J'} F_1(s,t)F_2^*(s,t)h_1^J h_2^{J'} \times \\ \times D^{*J}_{\lambda_{12},\tau_{12}}(\phi,\theta,-\phi)\, D^{J'}_{\lambda_{12},\tau_{12}}(\phi,\theta,-\phi), \tag{4.1}$$

Здесь введена сокращенная запись для коэффициентов $h^J = \tilde{h}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\tau_1,\tau_2}(J,s)$. Еще раз отметим, что суммирование по J и J' в (4.1) ограничено параметром $k = \max(|\lambda_{12}|,|\tau_{12}|)$.

Уравнение (4.1) трансформируется к виду

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* = \sum_{J,J'} F_1(s,t)F_2^*(s,t)h_1^J h_2^{*J'} \times \\ \times \sum_{\ell=|J-J'|}^{J+J'} (-1)^{\lambda_{12}-\tau_{12}} \begin{Bmatrix} \lambda_{12} & -\lambda_{12} & J \\ \tau_{12} & -\tau_{12} & J' \end{Bmatrix}\!\ell\, P_\ell(\cos\theta). \tag{4.2}$$

с помощью разложения (3.25).

Таким образом, с учетом (2.4) зависимость от угла θ для квадратичной комбинации (4.7) содержится в функциях вида

$$\frac{P_\ell(x)}{(x-y)},\ \frac{P_\ell(x)}{(x-y_1)(x-y_2)}, \tag{4.3}$$

где $x=\cos\theta$, а константы $y, y_{1,2}$ зависят от переменной s и масс частиц бинарной реакции (2.1).

С учетом экспериментальных ограничений при определении характеристик частиц реакции, дифференциальное сечение требуется не для всей возможной области $-1 \le z \le 1$, а для некоторого интервала $(z_1,z_2), |z_{1,2}| \le 1$. Следовательно, при вычислении сечения возникает задача расчета интегралов вида

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y)}\mathrm{d}x,\ \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y_1)(x-y_2)}\mathrm{d}x,\ |y_{1,2}| \ge 1. \tag{4.4}$$

5 Вычисление интегралов

Задача расчета функций (4.4) оказалась непростой. Как показано в [1], при непосредственном численном расчете (4.4) возникали нестабильности, особенно при $x=\cos\theta \sim \pm 1$. Это, в свою очередь, приводит к низкой скорости программ интегрирования и падению точности расчетов.

Для решения указанных проблем в [1] предложено инвариантные коэффициенты $F_n(s,t)$ численно рассчитывать, используя обобщенный ряд Фурье

$$F_n(s,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{t} c_{n,\ell}(s) P_\ell(\cos\theta), \tag{5.1}$$

где

$$c_{n,\ell}(s) = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\, t F_n(s,t) P_\ell(x). \tag{5.2}$$

Такой обобщенный ряд Фурье является стабильным при численном интегрировании. На практике требуется порядка 20 обобщенных коэффициентов Фурье $c_{n,\ell}(s)$. При этом такая процедура воспроизводит полный расчет $F_n(s,t)$ с точностью примерно до шести знаков для углов рассеяния и энергий LEP2 [1].

Явный множитель t в (5.1) и (5.2) был включен для того, чтобы учесть полюс t-канала в функциях $F_n(s,t)$; без этого множителя разложение будет менее эффективным и требует гораздо большего количества членов в сумме по ℓ в (5.2). Явный вид (5.1) и (5.2) обусловлен также тем, что все фермионы считались безмассовыми.

Оригинальная новизна нашего подхода состоит в том, чтобы получить аналитические формулы для вычисления интегралов вида (4.4) для любого значения ℓ и для произвольных масс частиц. Данный подход существенно повышает эффективность вычислительной методики.

При вычислении квадрата матричных элементов в предлагаемом подходе возникают интегралы по угловым переменным вида

$$\mathcal{I}_{\ell,0}(z_2,z_1) = \int_{z_1}^{z_2} P_\ell(x)\,dx, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2,z_1,y) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y)}\,dx \tag{5.4}$$

и

$$\mathcal{I}_{\ell,2}(z_2,z_1,y_1,y_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y_1)(x-y_2)}\,dx. \tag{5.5}$$

Интеграл

$$\mathcal{I}_{\ell,3}(z_2,z_1,y) = \mathcal{I}_{\ell,2}(z_2,z_1,y,y) = \\ = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P_\ell(x)}{(x-y)^2}\,dx \tag{5.6}$$

является вспомогательным и также может встречаться в расчетах.

Интеграл (5.3) несложно рассчитать в общем виде:

$$\mathcal{I}_{\ell,0}(z_2,z_1) = \int_{z_1}^{z_2} P_\ell(z)\,\mathrm{d}z = \frac{F_\ell(z_2)-F_\ell(z_1)}{2\ell+1}, \tag{5.7}$$

где

$$F_\ell(z) = P_{\ell+1}(z) - P_{\ell-1}(z),\ P_{-1}(z) = 1. \tag{5.8}$$

Для вычисления интеграла (5.4) используем новое соотношение для полиномов Лежандра (автору не удалось найти его в известных справочниках по специальным функциям, и было получено им самостоятельно)

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y}= \tag{5.9}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)P_k(x)\big(P_k(y)w_{n-1}(y)-P_n(y)w_{k-1}(y)\big),$$

$$n\geq 1,$$

где $w_n(y)$ является полиномом переменной z [4, с. 1033, формула 8.831]:

$$w_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)}P_k(y)P_{n-k}(y)=$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(2n+1-4k)}{(2k+1)(n+1-k)}P_{n-2k}(y),\ \ w_{-1}(y)=0. \tag{5.10}$$

Для $n=0$ соотношение (5.9) обращается в ноль.

Для сокращения дальнейшей записи введем обозначение

$$R_{k,n}(y)=P_k(y)w_{n-1}(y)-P_n(y)w_{k-1}(y). \tag{5.11}$$

Тогда путем вычитания получим соотношение:

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2,z_1,y)=$$
$$=\int_{z_1}^{z_2}\frac{P_\ell(x)-P_\ell(y)}{x-y}dx+P_\ell(y)\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{x-y}dx. \tag{5.12}$$

С помощью формулы (5.9) и тривиального инегрирования в (5.12) получим

$$\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2,z_1,y)=P_\ell(y)\ln\left|\frac{y-z_2}{y-z_1}\right|+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\mathcal{I}_{k,0}(z_2,z_1)R_{k,n}(y). \tag{5.13}$$

Интеграл (5.5) с помощью тождества

$$\frac{1}{(x-y_1)(x-y_2)}=\frac{1}{y_1-y_2}\left[\frac{1}{x-y_1}-\frac{1}{x-y_2}\right] \tag{5.14}$$

преобразуется к уравнению

$$\mathcal{I}_{\ell,2}(z_2,z_1,y)=\frac{1}{y_1-y_2}\times$$
$$\times\left\{\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2,z_1,y_1)-\mathcal{I}_{\ell,1}(z_2,z_1,y_2)\right\},\ \ y_1\neq y_2. \tag{5.15}$$

На основе вышеизложенной методики вычитания для интеграла (5.6), также несложно получить формулу для расчета $\mathcal{I}_{\ell,3}$:

$$\mathcal{I}_{\ell,3}(z_2,z_1,y)=P_\ell(y)\frac{z_2-z_1}{(y-z_1)(y-z_2)}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\mathcal{I}_{k,1}(z_2,z_1,y)R_{k,n}(y), \tag{5.16}$$

которая проще, чем производная от выражения (5.13).

Формулы (5.13), (5.15) и (5.16) справедливы как для положительных, так и для отрицательных значений переменной $y, y_{1,2}$. Поэтому эти формулы могут быть использованы и для интегралов вида

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{P_\ell(x)}{(x+y)}dx,\ \int_{z_1}^{z_2}\frac{P_\ell(x)}{(x\mp y_1)(x\pm y_2)}dx,\ \int_{z_1}^{z_2}\frac{P_\ell(x)}{(x+y_1)(x+y_2)}dx.$$

Использование соотношений (5.13), (5.15) и (5.16) для расчета сечения намного проще, чем использование обобщенного ряда Фурье (5.1).

Заключение

Таким образом, методика аналитического или численного расчета дифференциального сечения бинарной реакции содержит следующие компоненты: представление матричных элементов диаграмм Фейнмана в виде (2.3) с использованием (2.6). Данную задачу для спиральных состояний частиц эффективно решает метод базисных спиноров, который во многих случаях сразу позволяет получить разложение (2.6). Квадратичные комбинации матричных элементов различных диаграмм Фейнмана определяются компактным соотношением (4.2) вследствие (2.3) и (2.6). Задача интегрирования по углу рассеяния для квадратичных комбинаций матричных элементов решается с помощью оригинального способа аналитического расчета интегралов, описанного в разделе 5. Аналитические выражения для интегралов позволяют повысить точность численных расчетов и увеличить эффективность программ по вычислению сечений бинарных реакций. Данная методика может быть эффективным инструментом для расчета не только дифференциального сечения бинарной реакции, но и для вычисления ширин распадов вида $1\to 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Electroweak radiative corrections to* $e^+e^-\to W^+W^-\to 4$ *fermions in double pole approximation: The RACOONWW approach* / A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth, D. Wackeroth // Nucl. Phys. B. – 2000. – Vol. 587. – P. 67–117.

2. *Jacob*, *M.* On the general theory of collisions for particles with spin / M. Jacob, G.C. Wick // Annals of Physics. – 1959. – Vol. 7, № 4. – P. 404–428.

3. *Верле*, *Ю.* Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – Москва: Атомиздат, 1969. – 442 с.

4. *Градштейн*, *И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – 4-е переработанное изд. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.

5. *Andreev*, *V.V.* Analytic calculation of Feynman amplitudes / V.V. Andreev // Physics of Atomic Nuclei. – 2003. – Vol. 66, № 2. – P. 383–393.

6. *Andreev*, *V.V.* Scattering QCD amplitudes with massive fermions using recursive relations / V.V. Andreev // Nonlinear phenomena in complex systems. – 2009. – Vol. 12, №4. – P. 338–342.

7. *Андреев*, *В.В.* Вычисление фейнмановских диаграмм техникой блоков / В. В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 7–12.

8. *Андреев*, *В.В.* Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 294 с.

Поступила в редакцию 08.01.2021.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ