МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НАСЛЕДСТВЕННЫХ НАСЫЩЕННЫХ РЕШЕТОЧНЫХ ФОРМАЦИЙ

С. Йи[1], С.Ф. Каморников[2], В.Н. Тютянов[3]

[1]*Чжэцзянский политехнический университет*, *Ханчжоу*, *Китай*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[3]*Международный университет «МИТСО»*, *Гомель*

ONE PROPERTY OF HEREDITARY SATURATED FORMATIONS

X. Yi[1], S.F. Kamornikov[2], V.N. Tyutyanov[3]

[1]*Zhejiang Sci-Tech University*, *Hangzhou*, *China*
[2]*F. Scorina Gomel State University*
[3]*Gomel Branch of International University «MITSO»*, *Gomel*

Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация. Доказывается, что если для каждой силовской подгруппы P конечной группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая $\mathfrak{F}$-подгруппа T, что $VT = G$, то $G \in \mathfrak{F}$. В статье решаются проблемы 19.87 и 19.88 из «Коуровской тетради».

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовская подгруппа*, *добавление*, *формация*, *обобщенно субнормальная подгруппа*, *решеточная формация*.

Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation. It is proved that if for every Sylow subgroup P of a finite group G and every maximal subgroup V of P there is a $\mathfrak{F}$-subgroup T such that $VT = G$, then $G \in \mathfrak{F}$. Problems 19.87 and 19.88 from the «Kourovka Notebook» are solved in the article.

Keywords: *finite group*, *Sylow subgroup*, *supplement*, *formation*, *generally subnormal subgroup*, *lattice formation*.

Введение

Подгруппа H называется *добавлением* к подгруппе K в группе G, если $G = KH$. Понятно, что в каждой группе любая подгруппа обладает добавлением. Более того, подгруппа K может иметь несколько добавлений. Например, в случае, когда $K = G$, любая подгруппа группы G является добавлением к K.

Как показывают многочисленные исследования, строение конечной группы G существенно зависит от свойств добавлений к некоторым ее подгруппам. В данной работе строение G изучается в зависимости от свойств добавлений к максимальным подгруппам всех ее силовских подгрупп. Главная наша цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация. Тогда и только тогда конечная группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, когда для каждой максимальной подгруппы любой силовской подгруппы группы G существует добавление в G, принадлежащее $\mathfrak{F}$.*

1 Определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1] и [2].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G / N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G).

Наследственная формация – это формация, замкнутая относительно взятия подгрупп. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$ такая, что $H_{i-1} / Core_{H_{i-1}}(H_i) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы.

Все наследственные насыщенные решеточные формации описаны в работе [3] (см. также [4]).

***Лемма* 1.1** [3, теорема 2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является решеточной*, *когда формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) *существует такое разбиение* $\{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества* $\pi(\mathfrak{H})$ *на попарно непересекающиеся подмножества, что* $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ *– наследственная локальная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в* $\mathfrak{M}^2$;

4) *всякая нециклическая критическая группа G формации* $\mathfrak{M}$, *имеющая единичную подгруппу Фраттини, является примитивной с неабелевым цоколем* $N = G^{\mathfrak{M}}$, *причем* G/N *– циклическая примарная группа*.

Напомним, что *критической группой формации* $\mathfrak{F}$ называется группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times \ldots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Если π – некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{X}_\pi$ – это класс всех π-групп из $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп.

Каждая наследственная насыщенная решеточная формация $\mathfrak{F}$ является *классом Фиттинга*, т. е. классом, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и, кроме того, из $G = AB$, где A и B – нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, всегда следует, что G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Из определения класса Фиттинга следует, что в любой группе G существует $\mathfrak{F}$*-радикал* $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая $\mathfrak{F}$ (она совпадает с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из G). В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат, устанавливающий связь $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы с ее $\mathfrak{F}$-радикалом.

***Лемма* 1.2** [2, лемма 3.1.6]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная насыщенная решеточная формация. Если подгруппа H является* $\mathfrak{F}$*-субнормальной в группе G и принадлежит формации* $\mathfrak{F}$, *то H содержится в* $\mathfrak{F}$*-радикале группы G.*

***Лемма* 1.3.** *Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы любой силовской подгруппы группы G существует добавление в G, принадлежащее* $\mathfrak{F}$, *то и для каждой максимальной подгруппы любой силовской подгруппы группы* G/N *существует добавление в* G/N, *принадлежащее* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть R/N – неединичная силовская p-подгруппа группы G/N. Если R_1/N – максимальная подгруппа группы R/N, то по теореме Силова $R_1 = P_1N$ для некоторой силовской p-подгруппы P_1 группы R_1. При этом P_1 – максимальная подгруппа некоторой силовской p-подгруппы P_2 группы R. Очевидно, P_2 – силовская p-подгруппа группы G. По условию $G = TP_1$ для некоторой $\mathfrak{F}$-подгруппы T группы G. Отсюда заключаем, что

$$G/N = TP_1/N =$$
$$= (TN/N)(P_1N/N) = (TN/N)(R_1/N).$$

При этом из изоморфизма $TN/N \simeq T/T \cap N$ следует, что подгруппа TN/N принадлежит формации $\mathfrak{F}$. □

2 Доказательство теоремы

Если группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, то ввиду наследственности формации $\mathfrak{F}$ для каждой максимальной подгруппы из любой силовской подгруппы группы G каждое добавление в G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что оно неверно и G – контрпример минимального порядка. Доказательство проведем в несколько шагов.

***Шаг* 1.** *Группа G не является простой.*

Предположим, что группа G является простой. По условию для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая $\mathfrak{F}$-подгруппа T, что $VT = G$. Очевидно, $|G:T|$ – степень простого числа. Но тогда группа G обладает максимальной подгруппой H, индекс которой в G является степенью простого числа. Отсюда ввиду [5, теорема 1] справедливо одно из следующих утверждений:

(a) $G = A_n$ и $H \simeq A_{n-1}$, где $n = p^k$;

(b) $G = L_n(q)$ и H – стабилизатор линии или гиперплоскости, при этом

$$|G:H| = \frac{q^n - 1}{q - 1} = p^k$$

(n – простое число);

(c) $G = L_2(11)$ и $H \simeq A_5$;

(d) $G = M_{23}$ и $H = M_{22}$ или $G = M_{11}$ и $H = M_{10}$;

(e) $G = PSU_4(2) \simeq PSp_4(3)$ и H – параболическая подгруппа индекса 27.

Ввиду произвольного выбора простого числа p для любого простого $p \in \pi(G)$ группа G содержит максимальную подгруппу, индекс которой является степенью p. Простая проверка показывает, что ни одна из групп, перечисленных в (a)–(e), таким свойством не обладает. Следовательно, G не является простой.

Пусть далее N – минимальная нормальная подгруппа группы G.

***Шаг* 2.** $G/N \in \mathfrak{F}$.

Ввиду леммы 1.3 условия теоремы переносятся на фактор-группу G/N. А так как $|G/N|<|G|$, то ввиду выбора группы G группа G/N принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

***Шаг* 3.** *N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G)=1$ и $C_G(N)\subseteq N$.*

Так как формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, то $\Phi(G)=1$. Если предположить, что в G существует минимальная нормальная подгруппа L, отличная от N, то ввиду утверждения шага 1 $G/L \in \mathfrak{F}$. А так как класс $\mathfrak{F}$ является формацией, то отсюда имеем $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G. Таким образом, G – примитивная группа, а значит, $C_G(N) \subseteq N$ $(C_G(N)=N$, если N – абелева группа; $C_G(N)=1$, если N – неабелева группа).

***Шаг* 4.** *N – абелева группа.*

Предположим, что N не является абелевой. Пусть $\pi(N)=\{p_1, p_2, ..., p_s\}$, где $s \geq 3$.

По условию для каждой максимальной подгруппы любой силовской подгруппы группы G существует добавление в G, принадлежащее $\mathfrak{F}$. Понятно, что любое такое добавление имеет индекс, являющийся степенью простого числа. Пусть T_1 и T_2 – некоторые из этих добавлений, причем индексы их взаимно просты. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $|G:T_1|=p_1^k$ и $|G:T_2|=p_2^t$. Предположим, что оба добавления T_1 и T_2 содержат подгруппу N. Тогда, очевидно, подгруппы T_1 и T_2 $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Кроме того, по условию подгруппы T_1 и T_2 принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Отсюда по лемме 1.2 подгруппы T_1 и T_2 содержатся в $\mathfrak{F}$-радикале $G_{\mathfrak{F}}$ группы G. Так как индексы подгрупп T_1 и T_2 взаимно просты, то $G=\langle T_1, T_2\rangle \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, т. е. группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G.

Итак, если T_i – принадлежащее формации $\mathfrak{F}$ добавление к некоторой максимальной подгруппе из силовской p_i-подгруппы группы G, то в системе подгрупп $\{T_i \mid i=1,2,...,s\}$ не более чем одна из подгрупп $T_1, T_2, \ldots, T_s$ содержит N. Таким образом, возможны два случая:

1) каждая из подгрупп $T_1, T_2, \ldots, T_s$ не содержит N;

2) подгруппы $T_1, T_2, \ldots, T_{s-1}$ не содержат подгруппу N, а подгруппа T_s содержат N.

Подгруппа N представима в виде

$$N = N_1 \times N_2 \times ... \times N_m,$$

где $N_1, N_2, \ldots, N_m$ – изоморфные простые неабелевы группы. Если любая из подгрупп $T_1, T_2, \ldots, T_s$ не содержит N, то для любого $i=1,2,...,s$ из $|G:T_i|=p_i^{k_i}$, где $k_i \geq 1$, очевидно, следует, что подгруппа N_1 содержит максимальную подгруппу H_i, индекс которой является степенью простого числа p_i. С учетом [5, теорема 1] проверка показывает, что ни одна из простых групп таким свойством не обладает.

Следовательно, подгруппы $T_1, T_2, \ldots, T_{s-1}$ не содержат подгруппу N, а подгруппа T_s содержит N. В этом случае для любого $i=1,2,...,s-1$ из $|G:T_i|=p_i^{k_i}$, где $k_i \geq 1$, следует, что подгруппа N_1 содержит максимальную подгруппу H_i, индекс которой является степенью простого числа p_i. Так как $s \geq 3$, то ввиду [5, теорема 1] (см. шаг 1) получаем, что $N_1 \simeq L_2(7)$.

Пусть T – принадлежащее $\mathfrak{F}$ добавление к некоторой максимальной подгруппе из силовской 3-подгруппы группы G. Предположим, что T не содержит N. Тогда, как показано выше, подгруппа $N_1 \simeq L_2(7)$ содержит максимальную подгруппу индекса 3, что невозможно. Следовательно, $N \subseteq T$. Тогда T – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, а значит, по лемме 1.2 T содержится в $G_{\mathfrak{F}}$. При этом индекс $G_{\mathfrak{F}}$ в группе G равен 3^t, где $t \geq 0$.

Предположим, что $t>0$. Пусть V_1 – силовская 3-подгруппа группы $G_{\mathfrak{F}}$. Заключим эту подгруппу в максимальную подгруппу V из $P \in Syl_3(G)$. Тогда для любого принадлежащего $\mathfrak{F}$ добавления T к V в группе G имеем $TV \subseteq G_{\mathfrak{F}}V \subset G$, что противоречит условию теоремы. Значит, $G_{\mathfrak{F}}=G$ и $G \in \mathfrak{F}$. Снова имеем противоречие с выбором группы G.

***Шаг* 5.** *G – бипримарная группа.*

Пусть N – p-группа. Предположим, что группа G не является бипримарной, т. е. ее порядок делится на различные простые числа q и r, отличные от p. По условию для каждой максимальной подгруппы из любой силовской подгруппы группы G существует добавление в G, принадлежащее $\mathfrak{F}$. Понятно, что все эти добавления имеют индекс, являющийся степенью простого числа. Пусть T_1 и T_2 – два таких добавления, причем $|G:T_1|=q^k$ и $|G:T_2|=r^t$. Понятно, что добавления T_1 и T_2 содержат подгруппу N. Тогда, очевидно, подгруппы T_1 и T_2 $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Кроме того, по условию подгруппы T_1 и T_2 принадлежат формации $\mathfrak{F}$.

Но тогда по лемме 1.2 подгруппы T_1 и T_2 содержатся в $\mathfrak{F}$-радикале $G_{\mathfrak{F}}$ группы G. Так как индексы подгрупп T_1 и T_2 взаимно просты, то $G = \langle T_1, T_2 \rangle \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, т. е. группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G. Значит, G – бипримарная группа.

Будем полагать далее, что $\pi(G) = \{p, q\}$.

***Шаг* 6.** $\mathfrak{F}_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ *– формация всех нильпотентных* $\{p, q\}$ *-групп.*

В силу леммы 1.1 формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям: $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$; существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$; $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ – наследственная локальная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$.

Предположим, что $\{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{M})$. Тогда из $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ следует, что $G \in \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Если $\{p, q\} \subseteq \pi_i$ для некоторого $i \in I$, то из $G \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Снова приходим к противоречию. Таким образом, либо одно из простых чисел p и q принадлежит $\pi(\mathfrak{M})$, а другое $\pi(\mathfrak{H})$, либо числа p и q они принадлежат различным членам разбиения $\{\pi_i \mid i \in I\}$. Поэтому из $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$ получаем, что $\mathfrak{F}_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ – формация всех нильпотентных $\{p, q\}$ -групп.

***Шаг* 7.** *Заключительное противоречие.*

Так как G – $\{p, q\}$ -группа, $\mathfrak{F}_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, то N – силовская p-подгруппа группы G. Так как N – минимальная нормальная подгруппа группы G, то силовская q-подгруппа Q группы G максимальна в G. Отсюда и из условия теоремы получаем, что группа G нильпотентна. □

3 Следствия

Приведем два следствия, дающие положительные ответы на вопросы 19.87 и 19.88 из «Коуровской тетради» [6].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Следуя [7], будем говорить, что группа G является: σ *-примарной*, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ *-нильпотентной*, если она является прямым произведением некоторых σ -примарных групп; σ *-разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является σ -примарной группой.

Как отмечено в [7], класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ -нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Кроме того, в силу леммы 1.1 эта формация является решеточной. Поэтому из теоремы имеем

***Следствие* 3.1.** *Пусть* σ *– некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая* σ *-нильпотентная подгруппа T, что VT = G. Тогда G –* σ *-нильпотентная группа.*

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{S}_\sigma$ всех σ -разрешимых групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Кроме того, $\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_\sigma$ и все критические группы формации $\mathfrak{S}_\sigma$ являются простыми. Таким образом, в силу леммы 1.1 эта формация является решеточной. Поэтому из теоремы имеем

***Следствие* 3.2.** *Пусть* σ *– некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая* σ *-разрешимая подгруппа T, что VT = G. Тогда G –* σ *-разрешимая группа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорусская наука, 2003. – 256 с.

3. *Васильев*, *А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

4. *Yi*, *X.* Subgroup-closed lattice formations / X. Yi, S.F. Kamornikov // J. Algebra. – 2015. – Vol. 444. – P. 143–151.

5. *Guralnick*, *R.* Subgroups of prime power index in a simple group / R. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.

6. *Нерешенные вопросы теории групп*: Коуровская тетрадь. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2018. – 248 с.

7. *Skiba*, *A.N.* On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

Исследования С. Йи выполнены при поддержке Китайского фонда естественных наук провинции Чжэцзян (*Грант* LY18A010028). *Исследования С.Ф. Каморникова и В.Н. Тютянова выполнены при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта* Ф20Р-291.

Поступила в редакцию 25.01.2021.