

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

О. М. ДЕМИДЕНКО, М. К. ЕФИМЧИК

ТЕОРИЯ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ПРАВЕРАННЯ

2014

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений
по специальности «Автоматизированные системы обработки информации»

УК 8469

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Францыска Скорины"

БІБЛІЯТЭКА
Гомель

УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

2008

УДК 681.5 (075.8)

ББК 32 965 я73

Д 304

Рецензенты: О. Ф. Олейко, канд. техн. наук, доцент кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок и производственных комплексов» БГГУ; Б. С. Калитин, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры методов оптимального управления

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины

Демиденко, О. М.

Д 304

Теория автоматического управления: учебное пособие
О. М. Демиденко, М. К. Ефимчик; М-во образования
Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. — Гомель:
им. Ф. Скорины 2008. — 227 с.

ISBN 978-985-439-332-2

В пособии изложены основные принципы и методы теории автоматического управления: построение систем управления, методы их математического описания, критерии оценки устойчивости и качества систем при детерминированных и случайных воздействиях. Рассмотрены вопросы анализа импульсных систем, основные методы идентификации объектов управления и принципы синтеза линейных систем. Краткие сведения об оптимальных и адаптивных системах.

Для студентов, обучающихся по специальности I-53 01 02 — «Автоматизированные системы обработки информации».

УДК 681.5 (07)

ББК 32 965

ISBN 978-985-439-332-2 © Демиденко О. М., Ефимчик М. К., 2008
©УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2008

Содержание

Введение.....	5
1 Общие принципы построения систем автоматического управления.....	7
1.1 Основные понятия и определения	7
1.2 Принципы построения и классификация систем управления.....	13
2 Методы математического описания и моделирования линейных элементов и систем управления.....	21
2.1 Общие понятия о передаточных свойствах элементов и систем.....	21
2.2 Временные и спектральные характеристики типовых воздействий и сигналов.....	23
2.3 Линейные дифференциальные уравнения.....	30
2.4 Временные характеристики.....	33
2.5 Операционный метод и передаточная функция.....	36
2.6 Частотные характеристики.....	43
2.7 Статические и динамические характеристики типовых соединений линейных элементов.....	49
2.8 Векторно-матричная форма описания многомерных элементов	54
2.9 Элементарные операции аналогового и цифрового моделирования.....	65
2.10 Правила преобразования алгоритмических схем и сигнальных графов.....	70
3 Типовые динамические звенья и характеристики точности систем управления.....	80
3.1 Классификация звеньев.....	80
3.2 Безынерционное звено.....	82
3.3 Инерционные звенья первого порядка.....	85
3.4 Инерционные звенья второго порядка.....	91
3.5 Интегрирующие звенья.....	100
3.6 Дифференцирующие звенья.....	103
3.7 Звено запаздывания.....	107
3.8 Передаточные функции типовой одноконтурной системы.....	110
3.9 Точность статических и астатических систем управления при типовых воздействиях.....	115
4 Устойчивость линейных систем.....	120
4.1 Понятие, виды и общее условие устойчивости.....	120
4.2 Алгебраические критерии устойчивости.....	125
4.3 Критерий Михайлова.....	128
4.4 Критерий Найквиста.....	131
5 Оценка качества управления.....	139
5.1. Понятие и показатели качества управления.....	139

5.2. Интегральные показатели качества.....	149
6 Линейные системы при случайных воздействиях.....	156
6.1 Сущность статистического подхода к расчету систем управления.....	156
6.2 Характеристики случайных сигналов.....	159
6.3 Преобразование случайного сигнала линейным динамическим звеном.....	173
7 Линейные импульсные системы управления.....	181
7.1 Общие сведения о дискретных системах.....	181
7.2 Функциональная и алгоритмическая структуры амплитудно-импульсной системы.....	185
7.3 Математическое описание амплитудно-импульсной системы.....	192
7.4 Основное условие и критерии устойчивости импульсных систем.....	199
8 Идентификация объектов управления и синтез линейных систем управления.....	205
8.1 Идентификация объектов управления.....	205
8.1.1 Экспериментальное определение частотных характеристик.....	205
8.1.2 Экспериментальное определение временных характеристик.....	207
8.1.3 Статистические методы определения импульсной переходной функции.....	208
8.1.4 Компенсационные методы определения динамических характеристик.....	209
8.2 Основные понятия о синтезе систем управления	211
8.3 Общие принципы синтеза алгоритмической структуры системы управления.....	214
8.4 Осуществление инвариантности в стабилизирующих и следящих системах.....	222
Литература.....	227

Введение

Теория автоматического управления (ТАУ) — научная дисциплина, предметом изучения которой являются информационные процессы, протекающие в автоматических системах управления. ТАУ выявляет общие закономерности функционирования, присущие автоматическим системам различной физической реализации, и на основе этих закономерностей разрабатывает принципы построения высококачественных систем управления.

При изучении процессов управления в ТАУ абстрагируются от физических и конструктивных особенностей систем и вместо реальных систем рассматривают их адекватные математические модели, поэтому основным методом исследования в ТАУ является математическое моделирование. Кроме того, методологическую основу ТАУ образуют теория обыкновенных дифференциальных уравнений, операционное исчисление (преобразование Лапласа), гармонический анализ (преобразование Фурье).

ТАУ вместе с теорией функционирования элементов систем управления (датчиков, регуляторов, исполнительных механизмов) образует более широкую отрасль науки — автоматику. Автоматика в свою очередь является одним из разделов технической кибернетики. Техническая кибернетика изучает сложные автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП) и предприятиями (АСУП), построенные с использованием управляющих вычислительных машин (УВМ).

Приблизительно до середины 20-го столетия теория регуляторов паровых машин и котлов развивалась как раздел прикладной механики. Параллельно разрабатывались методы анализа и расчета автоматических устройств в электротехнике. Формирование ТАУ в самостоятельную научную и учебную дисциплину произошло в период с 1940 по 1950 г. В это время в СССР и за рубежом были изданы первые монографии и учебники, в которых автоматические устройства различной физической реализации

рассматривались единими методами.

В настоящее время ТАУ наряду с новейшими разделами так называемой общей теории управления (исследование операций, системотехника, теория игр, теория массового обслуживания) играет важную роль в совершенствовании и автоматизации управления производством.

Современными тенденциями в автоматизации производства являются широкое применение ЭВМ для управления, создание машин и оборудования со встроенными микропроцессорными средствами измерения, контроля и регулирования, переход на децентрализованные (распределенные) структуры управления с микроЭВМ, внедрение человеко-машинных систем, использование высоконадежных технических средств, автоматизированное проектирование систем управления.

1 Общие принципы построения систем автоматического управления

1.1 Основные понятия и определения

Наиболее общими, лежащими в основе всей терминологии автоматики понятиями являются: алгоритм, алгоритм функционирования, объект управления, алгоритм управления, управление, автоматическое управляемое устройство, автоматическая система управления.

Алгоритмом называют правило или предписание, устанавливающее порядок выполнения тех или иных операций.

В теории автоматического управления термин «алгоритм» используют чаще всего в сочетании со словами «функционирование» и «управление».

Алгоритм функционирования устройства (системы) — это совокупность предписаний, ведущих к правильному выполнению технического процесса в каком-либо устройстве или в совокупности устройств (системе).

На всякое техническое устройство влияет внешняя среда. Влияние внешней среды чаще всего имеет возмущающий характер, т. е. среда мешает правильному выполнению технического процесса. Поэтому приходится оказывать на устройство специальные воздействия, направленные на устранение или компенсацию отрицательного влияния среды и выполнение алгоритма функционирования. Устройство (или совокупность устройств), осуществляющее технический процесс и нуждающееся в специально организованных воздействиях извне для осуществления его алгоритма функционирования, называют *объектом управления*.

Совокупность предписаний, определяющая характер воздействий извне на объект управления с целью осуществления его алгоритма функционирования, называют *алгоритмом управления*. Процесс осуществления воздей-

ствий, соответствующих алгоритму управления, называют *управлением*. Обычно управление не может полностью компенсировать влияние возмущений в каждый момент времени, поэтому алгоритм функционирования управляемого объекта выполняется лишь приближенно.

Устройство, осуществляющее в соответствии с алгоритмом управления воздействие на управляемый объект, называют *автоматическим управляющим устройством*. Очевидно, что алгоритм функционирования управляющего устройства есть алгоритм управления. Совокупность объекта управления и автоматического управляющего устройства, взаимодействующих между собой, называют *автоматической системой управления*. В дальнейшем будут использованы краткие формы этого термина — автоматическая система (АС) или система управления (СУ), так как аббревиатура АСУ вошла в широкое употребление в ином смысле — автоматизированные системы управления. Рассмотрим схему взаимодействия объекта управления (ОУ), управляющего устройства (УУ) и внешней среды (рисунок 1.1). Физическая величина $x(t)$, которая характеризует состояние объекта и которую преднамеренно изменяют или поддерживают постоянной в процессе управления, называется *управляемой величиной*. Для обозначения этого понятия используют также термины «управляемая координата», «управляемая переменная».

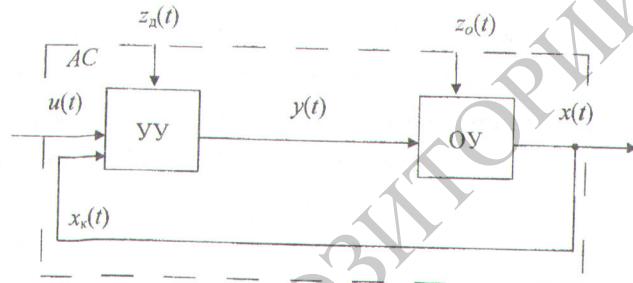


Рисунок 1.1 — Обобщенная структура автоматической системы управления

Управляемой величиной может служить физическая величина, которая

либо измеряется (непосредственно на выходе объекта), либо вычисляется по нескольким измеряемым величинам. Управляемыми величинами первого типа являются, например, температура, давление, напряжение, скорость, содержание полезного компонента в готовом продукте и т. д. Примерами величин второго типа служат коэффициент полезного действия энергетической установки, соотношение количеств двух продуктов разделительной установки.

Часто состояние управляемого объекта характеризуется несколькими величинами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Тогда принято говорить об n -мерном векторе состояния объекта $x(t)$, компонентами которого являются величины $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Объект в этом случае называют многомерным.

Управляемая величина является выходной величиной объекта и зависит от двух входных воздействий: управляющего $y(t)$ и возмущающего $z_o(t)$. В общем случае эти воздействия также могут быть векторными величинами. Возмущающие воздействия могут быть координатными и параметрическими. Координатные воздействия — это физические величины, которые обычно сами являются характеристиками состояния внешней среды или выходными величинами других технических устройств, не являющихся частями рассматриваемой автоматической системы. Параметрические возмущения также являются следствием влияния внешней среды, но проявляются в изменениях параметров объекта (параметрами объекта являются его передаточные коэффициенты, постоянные времени и т. д.).

Кроме основного возмущения $z_o(t)$, действующего на объект, на функционирование системы может влиять дополнительное возмущение $z_d(t)$, приложенное к управляющему устройству (рисунок 1.1). Обычно такие возмущения проявляются в нестабильности напряжения источников энергии, питающих управляющее устройство, в изменениях температурного режима и т. д.

Зависимость управляемой величины от входных воздействий для од-

номерного объекта можно выразить при помощи некоторого оператора A_0 , характеризующего объект как преобразователь сигналов:

$$x(t) = A_0[y(t), z(t)]. \quad (1.1)$$

Символом A_0 в выражении (1.1) обозначена некоторая совокупность математических операций, которые необходимо выполнить, чтобы по функциям времени $y(t)$ и $z(t)$ найти функцию $x(t)$.

Для n -мерного объекта будет n зависимостей вида (1.1), связывающих n управляемых величин $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ с несколькими управляющими и возмущающими воздействиями.

Зависимость (1.1) вместе с требованиями, предъявляемыми к управляемой величине (и в некоторых случаях — к управляющему воздействию), составляют *алгоритм функционирования объекта*.

Управляющее воздействие вырабатывается в управляющем устройстве в соответствии с алгоритмом управления и в зависимости от истинного и предписанного значений управляемой величины. Информация об истинном значении управляемой величины поступает в управляющее устройство в виде *контрольного воздействия* $x_k(t)$, а информация о предписанном значении — в виде *задающего воздействия* $u(t)$. Иногда управляющее воздействие вырабатывается с учетом изменений возмущающих воздействий $z_o(t)$ и $z_d(t)$.

Алгоритм управления (алгоритм функционирования управляющего устройства) в самом общем случае выражает зависимость управляющего воздействия от задающего воздействия, управляемой величины и возмущающих воздействий. Для одномерной автоматической системы алгоритм управления можно записать следующим образом:

$$y(t) = A_y[u(t), x(t), z_o(t), z_d(t)]. \quad (1.2)$$

Алгоритм функционирования объекта и алгоритм управления в совокупности образуют алгоритм функционирования автоматической системы.

Различают три аспекта любого воздействия: энергетический, метаболи-

ческий и информационный. Энергетический аспект проявляется в процессах преобразования и передаче энергии, метаболический — в процессах преобразования формы и состава вещества. Информационный аспект заключается в том, что и при энергетическом и, при метаболическом проявлении каждого воздействие является одновременно носителем информации.

Информационный аспект наиболее важен для изучения процессов, происходящих в автоматических системах. Эти процессы заключаются в преобразовании сигналов.

Сигналом в автоматике называют изменение определенной физической величины, которое отображает в соответствии с принятой условностью информацию, содержащуюся в воздействии.

Автоматическая система управления может быть разделена на части по различным признакам: назначению частей, алгоритмам преобразования информации, конструктивной обособленности. Соответственно различают функциональные, алгоритмические и конструктивные структуры. При этом под структурой понимают совокупность связанных между собой частей некоторого целого.

Функциональная структура отражает функции (целевые назначения), выполняемые отдельными частями автоматической системы. Такими функциями могут быть: получение информации о состоянии объекта, преобразование сигналов, сравнение сигналов и т. п. Части функциональной структуры называют элементами и блоками. Названия элементов и блоков указывают на выполняемые функции, например: воспринимающий элемент, управляющий блок, исполнительный блок.

Алгоритмическая структура характеризует алгоритмы преобразования в автоматической системе и представляет собой совокупность элементарных звеньев и связей между ними. Алгоритмы всех звеньев, входящих в систему, в совокупности соответствуют алгоритму функционирова-

ния системы

Элементарное алгоритмическое звено — часть алгоритмической структуры автоматической системы, соответствующая элементарному алгоритму преобразования сигнала. Каждое элементарное звено выполняет одну простейшую математическую или логическую операцию.

Различают следующие виды элементарных звеньев: статические, динамические, арифметические и логические.

У **статического звена** мгновенное значение выходного сигнала зависит только от значения входного сигнала в данный момент и не зависит от характера изменения входного сигнала во времени. Связь между входным и выходным сигналами статического звена описывается обычно алгебраической функцией. К статическим звеньям относятся различные безынерционные (нелинейные и линейные) преобразователи.

К классу динамических звеньев относятся конструктивные элементы автоматических систем, способные накапливать какой-либо вид энергии или вещества.

В непрерывных системах **динамическое звено** преобразует входной сигнал в соответствии с операциями интегрирования или дифференцирования во времени. Значение выходного сигнала динамического звена зависит не только от текущего значения входного сигнала, но и от его предыдущих значений, т. е. от характера изменения входного сигнала. Большинство динамических звеньев описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Арифметическое звено осуществляет одну из арифметических операций: суммирование, вычитание, умножение, деление. Наиболее часто встречающееся в автоматике арифметическое звено — звено, выполняющее алгебраическое суммирование сигналов, называют сумматором.

Логическое звено выполняет какую-либо логическую операцию: логическое умножение («И»), сложение («ИЛИ»), логическое отрицание («НЕ») и т. д.

1.2 Принципы построения и классификация систем управления

Классификация автоматических систем управления может быть осуществлена по различным принципам и признакам, характеризующим назначение и конструкцию систем, вид применяемой энергии, используемые алгоритмы управления и функционирования и т. д.

В зависимости от характера изменения задающего воздействия во времени автоматические системы управления разделяются на три класса: стабилизирующие, программные и следящие системы.

Стабилизирующая автоматическая система управления (система стабилизации) — это система, алгоритм функционирования которой содержит предписание поддерживать значение управляемой величины постоянным:

$$x(t) \approx u(t) = \text{const} \quad (1.3)$$

Знак приблизительного равенства означает, что управляемая величина поддерживается на заданном уровне с некоторой ошибкой.

Стабилизирующие системы самые распространенные в промышленной автоматике. Их применяют для стабилизации различных физических величин, характеризующих состояние технологических объектов. Пример: стабилизатор напряжения ([10], схемы на рисунке 8.3, а, б; $x(t) = U_{\text{вых}}$, $u(t) = U_{\text{оп}}$).

Алгоритм функционирования **программной автоматической системы** содержит предписание изменять управляемую величину в соответствии с заранее заданной функцией времени $f_n(t)$:

$$x(t) \approx u(t) = f_n(t). \quad (1.4)$$

Пример: функциональный генератор на основе цифро-аналогового преобразователя, значение выходного напряжения которого задается цифровым кодом, поступающим от программного устройства ([10], раздел 6.15).

Следящая автоматическая система управления предназначена для

изменения управляемой величины в соответствии с изменениями другой величины, которая действует на входе системы и закон изменения которой заранее не известен:

$$x(t) \approx u(t) = f_c(t), \quad (1.5)$$

где $f_c(t)$ — произвольная функция времени. Пример: усилитель напряжения ([10], схемы на рисунке 3.7, а, б, в); $x(t) = u_{\text{вых}}$, $u(t) = u_{\text{ВХ}}$, $f_c(t)$ — напряжение с выхода датчика, например, микрофона.

В стабилизирующих (1.3), программных (1.4) и следящих (1.5) системах цель управления заключается в обеспечении равенства или близости управляемой величины $x(t)$ к ее заданному значению $u(t)$. Такое управление, осуществляемое с целью поддержания

$$x(t) \approx u(t), \quad (1.6)$$

называется **регулированием**.

Управляющее устройство, осуществляющее регулирование, называется **регулятором**, а сама система — **системой регулирования**.

В зависимости от конфигурации цепи воздействий различают три вида систем управления: с разомкнутой цепью воздействий, с замкнутой цепью и комбинированные.

В автоматической системе управления с разомкнутой цепью воздействий (кратко — **разомкнутая система**) входными воздействиями управляющего устройства являются только внешние (задающие и возмущающие) воздействия, т.е. в них не осуществляется контроль управляемой величины.

Разомкнутые системы можно разделить в свою очередь на два класса: системы, осуществляющие управление в соответствии с изменением только задающего воздействия (рисунок 1.2, а), и системы, управляющие при изменении возмущения (рисунок 1.2, б).

Алгоритм управления разомкнутой системы первого типа имеет вид

$$y(t) = A_y [u(t)]. \quad (1.7)$$

Чаще всего оператор A_y устанавливает пропорциональную связь между задающим воздействием $u(t)$ и управляющим воздействием $y(t)$, а сама система в этом случае осуществляет **программное управление**.

Системы первого типа работают с достаточной эффективностью только при условии, если влияние возмущений на управляемую величину невелико и все элементы разомкнутой цепи обладают достаточно стабильными характеристиками.

В системах управления по возмущению (рисунок 1.2, б) управляющее воздействие зависит от задающего и возмущающего воздействий:

$$y(t) = A_y [u(t), z(t)], \quad (1.8)$$

причем в большинстве случаев оператор A_y может быть разделен на две не зависящие друг от друга составляющие:

$$y(t) = A_3[u(t)] + A_B[z(t)], \quad (1.9)$$

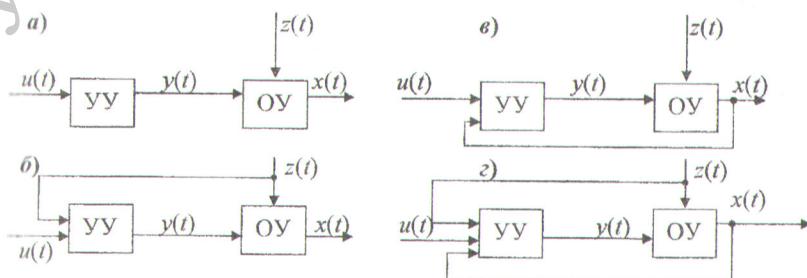


Рисунок 1.2 — Функциональные структуры систем управления с разомкнутой (а, б), замкнутой (в) и комбинированной (г) цепями воздействия

Оператор A_3 соответствует, как правило, простому пропорциональному преобразованию сигнала $u(t)$, а оператор A_B может быть и более сложным. Например, в дифференциальном усилителе оператору A_3 соответствует коэффициент усиления дифференциального сигнала, а оператору A_B — коэффициент усиления синфазного возмущения ([10] раздел 3.11).

В автоматической системе с замкнутой цепью воздействий, (кратко

— замкнутая система или система с обратной связью) на вход управляющего устройства поступают как внешнее (задающее) воздействие, так и внутреннее (контрольное). Обобщенная функциональная структура замкнутой системы изображена на рисунке 1.2, в.

Управляющее воздействие в замкнутой системе формируется в большинстве случаев в зависимости от величины и знака отклонения истинного значения управляемой величины от ее заданного значения:

$$y(t) = A_y[\varepsilon(t)], \quad (1.10)$$

где $\varepsilon(t) = x(t) - u(t)$ — сигнал ошибки (называемый также сигналом рассогласования). Замкнутые системы называют часто системами управления по отклонению.

В замкнутой системе контролируется непосредственно управляемая величина и тем самым при выработке управляющих воздействий учитывается действие всех возмущений, влияющих на управляемую величину. В этом заключается преимущество замкнутых систем. Но из-за наличия замкнутой цепи воздействий в этих системах могут возникать колебания, которые в некоторых случаях делают систему неработоспособной. Кроме того, сам принцип действия замкнутых систем (принцип управления по отклонению) допускает нежелательные изменения управляемой величины: вначале возмущение должно проявиться на выходе, система «почувствует» отклонение и только потом выработает управляющие воздействия, направленные на устранение отклонения. Такая «медлительность» снижает эффективность управления. Несмотря на наличие определенных недостатков, этот принцип широко применяют при создании автоматических систем.

Пример: стабилизатор напряжения с регулирующим усилителем ([10], раздел 8.2.2) без устройства защиты от перегрузки.

В комбинированных системах (рисунок 1.2, г) создают две цепи воздействий — по заданию и по возмущению, и управляющее воздействие формируется согласно оператору

$$y(t) = A_s[\varepsilon(t)] + A_u[z(t)]. \quad (1.11)$$

Пример: стабилизатор напряжения с регулирующим усилителем ([10], раздел 8.2.2) с устройством защиты от перегрузки.

В зависимости от способа выработки управляющих воздействий замкнутые системы разделяются на поисковые и беспоисковые.

В беспоисковых системах управляющие воздействия вырабатываются в результате сравнения истинного значения управляемой величины с ее заданным значением. Такие системы применяют для управления сравнительно несложными объектами, характеристики которых достаточно хорошо изучены и для которых заранее известно, в каком направлении и на сколько нужно изменить управляющее воздействие при определенном отклонении управляемой величины от заданного значения.

В поисковой системе основные управляющие воздействия формируются с помощью пробных управляющих воздействий и путем анализа результатов пробных воздействий. Такую процедуру поиска правильных управляющих воздействий приходится применять в тех случаях, когда характеристики объекта меняются или известны не полностью; например, известен тип зависимости управляемой величины от управляющего воздействия, но неизвестны числовые значения параметров этой зависимости. Поэтому поисковые системы называют также системами с неполной информацией, их можно отнести также к адаптивным системам.

Наиболее часто принцип автоматического поиска применяют для управления объектами, характеристики которых имеют экстремальный характер. Целью управления является отыскание и поддержание управляющих воздействий, соответствующих экстремальному значению управляемой величины. Такие системы поиска называют **экстремальными системами**.

Особый класс систем управления образуют системы, которые способны автоматически приспосабливаться к изменению внешних условий и свойств объекта, обеспечивая при этом необходимое качество управления путем из-

менения структуры и параметров управляющего устройства. Они называются адаптивными или самоприспособляющимися системами. В составе *адаптивной системы управления* имеется дополнительное автоматическое устройство, которое меняет алгоритм управления основного управляющего устройства таким образом, чтобы автоматическая система в целом осуществляла заданный алгоритм функционирования. Алгоритм функционирования адаптивной системы предписывает обычно экстремум показателя качества, который характеризует либо свойства процесса управления в автоматической системе в целом (быстродействие, точность и т. д.), либо свойства процессов, протекающих в управляемом объекте (производительность, извлечение полезного компонента и т. д.).

По виду сигналов, действующих в системах, автоматические системы разделяют на *непрерывные* и *дискретные*. Дискретные системы в свою очередь разделяются на импульсные, релейные и цифровые.

Автоматические системы управления, у которых управляемая величина в установившемся режиме зависит от величины возмущающего воздействия, называются *статическими*, а системы, у которых не зависит, — *астатическими*.

Пример астатической системы. В электродинамических приборах для компенсации погрешности, создаваемой внешними магнитными полями, применяются астатические механизмы, имеющие две неподвижные и две подвижные катушки. Токи в неподвижных катушках направлены так, что они создают противоположно направленные магнитные поля. Токи в подвижных катушках также имеют разные направления. Таким образом, врачающие моменты, создаваемые этими парами катушек, совпадают по направлению и чувствительность прибора повышается. Однако действие внешнего магнитного поля на первую систему полностью компенсируется противоположным действием на вторую, поэтому погрешность от внешнего магнитного поля практически равна нулю.

По виду дифференциальных уравнений, описывающих элементы систем, последние разделяют на линейные и нелинейные. В *линейной системе* все элементы описываются линейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями.

Автоматическая система управления является *нелинейной*, если хотя бы один ее конструктивный элемент (или одно ее алгоритмическое звено) описывается нелинейным уравнением.

Различают два вида нелинейных элементов: существенно нелинейные и несущественно нелинейные. *Нелинейность* элемента считается *несущественной*, если его замена линейным элементом (*линеаризация*) не изменяет принципиальных особенностей системы, и процессы в *линеаризованной* системе качественно не отличаются от процессов в реальной системе. Если такая замена невозможна, и процессы в линеаризованной и реальной системах сильно отличаются, то *нелинейность* является *существенной*.

Автоматические системы с существенными нелинейностями обладают рядом принципиальных особенностей, которые не присущи линейным системам и не могут быть выявлены при исследовании линеаризованных уравнений систем.

Главная особенность всех нелинейных систем заключается в том, что они не подчиняются принципу наложения (суперпозиции), а форма и показатели переходного процесса зависят от величины и формы внешнего воздействия.

Важной особенностью динамики существенно нелинейных систем является зависимость условий устойчивости от величины внешнего воздействия: система, устойчивая при одних значениях воздействия, оказывается неустойчивой при других его значениях. В связи с этим для нелинейных систем применяют понятия «устойчивость (неустойчивость) в малом», «устойчивость (неустойчивость) в большом», «устойчивость в целом».

Система *устойчива в малом*, если она устойчива только при малых на-

чальных отклонениях. Система *устойчива в большом*, если она устойчива при больших начальных отклонениях. Система *устойчива в целом*, если она устойчива при любых отклонениях.

Специфической особенностью нелинейных систем является также режим автоколебаний. *Автоколебания* — это устойчивые собственные колебания, возникающие из-за нелинейных свойств системы. Режим автоколебаний нелинейной системы принципиально отличается от колебаний линейной системы на границе устойчивости. В линейной системе при малейшем изменении ее параметров колебательный процесс становится либо затухающим, либо расходящимся. Автоколебания же являются устойчивым режимом: малые изменения параметров системы не выводят ее из этого режима. Амплитуда автоколебаний не зависит от начальных условий и уровня внешних воздействий ([10], раздел 4.3).

Контрольные задания и вопросы

- 1 Назовите наиболее распространенные функциональные элементы систем управления.
- 2 Что отражает алгоритмическая схема системы управления?
- 3 Приведите примеры элементарных алгоритмических звеньев.
- 4 Какие преимущества и недостатки имеют разомкнутые системы управления?
- 5 Какие преимущества и недостатки имеют замкнутые системы управления?

2 Методы математического описания и моделирования нелинейных элементов и систем управления

2.1 Общие понятия о передаточных свойствах элементов и систем

Любая автоматическая система управления представляет собой совокупность нескольких устройств, в которых происходят различные физические явления. Одна и та же система может включать в себя, например, механические, электрические и гидравлические элементы. Эти части системы взаимодействуют между собой по сложным законам механики, электротехники, гидравлики. Взаимодействие частей автоматической системы между собой также, как и процесс функционирования самого объекта управления, выражается в преобразовании энергии одного вида в энергию другого вида. Но процессы преобразования и перераспределения энергии в автоматической системе, в отличие от многих других физических систем, строго ориентированы, т. е. энергия и воздействия передаются только в определенном направлении.

Направленность передачи воздействий в автоматической системе обеспечивается благодаря наличию у одного или нескольких конструктивных элементов системы так называемого детектирующего свойства. Это свойство заключается в том, что рассматриваемый элемент не оказывает обратного действия на предыдущий элемент, а его выходная величина не влияет на свою входную. Например, электрический четырехполюсник обладает односторонностью передачи воздействий, если он не нагружает предшествующий четырехполюсник, т. е. если выходное сопротивление предшествующего элемента существенно меньше входного сопротивления рассматриваемого четырехполюсника.

Обычно свойством односторонности обладают те элементы автомати-

ческой системы, которые передают информационные воздействия. К таким элементам относятся в первую очередь измерители и преобразователи сигналов. Конструктивные части системы, через которые передаются энергетические воздействия, этим свойством, как правило, не обладают.

Только вследствие наличия элементов направленного действия в автоматической системе создается замкнутый контур передачи воздействий, при помощи которого и осуществляется целенаправленный процесс управления. Без таких элементов автоматические системы были бы неработоспособны или малоэффективны.

Первым этапом при исследовании или конструировании автоматической системы является составление математического описания (математической модели) ее элементов и системы в целом.

Наиболее распространенной формой описания передаточных свойств автоматических систем и их элементов являются обыкновенные дифференциальные уравнения. Для элемента, имеющего один входной сигнал $x(t)$ и один выходной сигнал $y(t)$, обыкновенное дифференциальное уравнение записывается в общем случае следующим образом:

$$\Phi[y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t); x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t), t] = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) связывает неизвестную функцию $y(t)$ и ее производные с независимой переменной t и известной (заданной) функцией времени $x(t)$. Уравнение (2.1) называют *уравнением динамики* или *движения элемента*. При этом понятие «движение» употребляют в самом обобщенном смысле.

Уравнение (2.1) может быть линейным и нелинейным. Линейным оно является в том случае, если функция Φ линейна по отношению ко всем ее аргументам. Если же функции $y(t)$, $x(t)$ и их производные входят в выражение функции Φ в виде произведений, частных или степеней, то уравнение является нелинейным.

В выражение функции Φ , кроме основных переменных, входят постоянные величины, называемые *параметрами*. Числовые значения параметров

зависят от конструктивных данных описываемого элемента — масс, индуктивностей, емкостей и т. д.

Если переменная y , характеризующая состояние элемента, кроме времени зависит еще от другой независимой переменной, которая является пространственной координатой, то элемент описывается дифференциальным уравнением с частными производными. Сам описываемый элемент называют в этом случае *элементом с распределенными (в пространстве) параметрами*.

Почти все реальные объекты автоматического управления являются элементами с распределенными параметрами. Однако при практических расчетах с большей или меньшей степенью приближения их рассматривают как элементы с *сосредоточенными параметрами*.

2.2 Временные и спектральные характеристики типовых воздействий и сигналов

Виды воздействий и режимов в системах управления. Большое разнообразие конструкций и условий работы автоматических систем управления определяет многообразие воздействий и сигналов, наблюдавших в системах. Изучение и математический анализ конкретных автоматических систем существенно упрощаются, если пользоваться разработанной в теории управления типизацией воздействий и сигналов. В зависимости от характера изменения сигнала во времени и от формы его математического представления различают регулярные и нерегулярные сигналы.

Регулярный (детерминированный) сигнал изменяется по определенному закону и может быть описан конкретной математической функцией времени. К классу регулярных сигналов относятся различные периодические сигналы и непериодические импульсы конечной длительности. Пример регулярного сигнала — импульс, описываемый экспонентой (рисунок 2.1, а).

Нерегулярный (случайный) сигнал изменяется во времени случайным образом и не может быть представлен в виде конкретной математической функции. Характер изменения случайного сигнала во времени показан на рисунке 2.1, б.

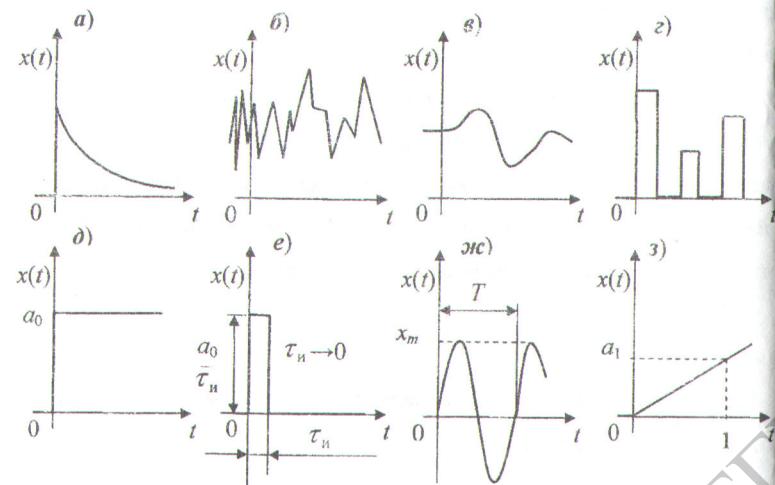


Рисунок 2.1 — Виды сигналов и типовых воздействий

Если значение регулярного или случайного сигнала определено в каждый момент времени (рисунок 2.1, в), то сигнал называется *непрерывным* или *аналоговым*. Если же значения сигнала заданы лишь в некоторые моменты времени (рисунок 2.1, г), то он называется *дискретным*.

При экспериментальном и теоретическом исследовании автоматических систем и их элементов используют ряд стандартных сигналов, называемых *типовыми воздействиями*. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и легко воспроизводятся при испытании систем. Использование типовых («эталонных») воздействий позволяет унифицировать расчеты различных систем и облегчает сравнение передаточных свойств систем.

Наибольшее применение в теории и практике автоматического управления находят следующие четыре типовых воздействия: ступенчатое, импульсное, гармоническое и линейное.

Ступенчатое воздействие — это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным (рисунок 2.1, д). Ступенчатому воздействию соответствует функция:

$$x_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ a_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

При анализе и расчете систем удобно использовать ступенчатое воздействие, у которого величина $a_0 = 1$. Его называют *единичным ступенчатым воздействием* (единичным скачком) и обозначают $l(t)$. Математическое выражение, описывающее единичный скачок, имеет вид:

$$l(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Любое неединичное ступенчатое воздействие можно обозначить $a_0 l(t)$. Единичное ступенчатое воздействие, возникающее в момент времени $t = t_1$, обозначают $l(t - t_1)$.

Ступенчатое воздействие чаще всего используют при испытаниях и расчетах систем стабилизации, так как эти воздействия наиболее близки к реальным входным (задающим и возмущающим) воздействиям систем стабилизации.

Импульсное воздействие представляет собой одиночный импульс прямоугольной формы (рисунок 2.1, е), имеющий достаточно большую высоту и весьма малую продолжительность (по сравнению с инерционностью испытуемой системы). Очевидно, что площадь такого импульса всегда равна

При математическом анализе автоматических систем используют *еди-*

ничное импульсное воздействие, которое описывается так называемой дельта-функцией

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

причём

$$\int \delta(t) dt = 1. \quad (2.5)$$

Согласно выражениям (2.4) и (2.5) дельта-функцию можно рассматривать как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь. Дельта-функцию можно определить также как производную единичного скачка:

$$\delta(t) = d\delta(t)/dt. \quad (2.6)$$

Неединичное импульсное воздействие с площадью a_0 обозначается $a_0\delta(t)$.

Если единичный импульс действует в момент времени $t = t_1$, то ему соответствует так называемая смещенная дельта-функция $\delta(t - t_1)$, которая также удовлетворяет условию (2.5).

Основное свойство дельта-функции выражается соотношением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\vartheta)\delta(\vartheta - t)d\vartheta = x(t). \quad (2.7)$$

Это свойство дельта-функции называют фильтрующим или «выхватывающим».

В качестве стандартного гармонического воздействия используют обычно сигнал синусоидальной формы, описываемый функцией

$$x(t) = x_m \sin \omega t \quad (-\infty < t < \infty), \quad (2.8)$$

где x_m — амплитуда сигнала; $\omega = 2\pi/T$ — угловая частота, рад/с; T — период сигнала, с.

Гармонический сигнал, начинающий действовать в момент времени $t = 0$

(рисунок 2.1, ж), описывают при помощи единичной ступенчатой функции

$$x(t) = l(t)x_m \sin \omega t \quad (0 \leq t < \infty). \quad (2.9)$$

Гармонические воздействия (2.8) и (2.9) широко используются при исследовании точности и устойчивости как стабилизирующих, так следящих программных автоматических систем. Это объясняется двумя обстоятельствами: во-первых, реальные возмущения часто имеют периодический характер и поэтому могут быть представлены в виде суммы гармонических составляющих; во-вторых, математический аппарат анализа автоматических систем хорошо разработан именно для случая гармонических воздействий.

Для следящих программных систем типовым является линейное воздействие (рисунок 2.1, з)

$$x(t) = l(t)a_1 t \quad (0 \leq t < \infty). \quad (2.10)$$

Коэффициент a_1 характеризует скорость нарастания воздействия $x(t)$.

Основные сведения из гармонического анализа воздействий и сигналов. В инженерной практике при описании и исследовании систем управления широко применяется разложение реальных сигналов сложной формы на элементарные сигналы синусоидальной формы. Математический метод представления сложных сигналов (периодических и непериодических) в виде конечности элементарных гармонических составляющих (гармоник) называется гармоническим анализом.

Рассмотрим основные положения этого метода. Как известно из курса высшей математики, любая периодическая функция с периодом T

$$x(t) = x(t + iT) \quad (i = 0; 1; 2; \dots), \quad (2.11)$$

удовлетворяющая условиям Дирихле (конечное число конечных разрывов на интервале периода T), может быть разложена в бесконечный сходящийся тригонометрический ряд — ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (2.12)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$, $\omega_k = \omega_1 k$ — угловые частоты соответственно основной и k -й гармоник, a_0 , a_k , b_k — независимые от t коэффициенты (коэффициенты Фурье), которые определяются по формулам:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\vartheta) \cos \omega_1 k \vartheta d\vartheta \quad (k = 0; 1; 2; \dots); \quad (2.13)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\vartheta) \sin \omega_1 k \vartheta d\vartheta \quad (k = 1; 2; \dots). \quad (2.14)$$

Ряд Фурье обладает важным свойством: при заданном конечном числе членов дает лучшее приближение (по критерию суммы квадратов отклонений), чем любое другое разложение функции $x(t)$.

С помощью формулы Эйлера

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha \quad (2.15)$$

и ее модификаций

$$\cos \alpha = (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})/2, \quad \sin \alpha = (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})/2j \quad (2.16)$$

ряд (2.12) можно преобразовать к комплексной форме ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j\omega_k t} \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots), \quad (2.17)$$

где

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\vartheta) e^{-j\omega_k \vartheta} d\vartheta = \frac{a_k - jb_k}{2}. \quad (2.18)$$

В формуле (2.17) суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным значениям k . Это означает, что комплексная форма ряда Фурье допускает существование и положительных, и отрицательных частот. Так как каждому комплексному слагаемому с положительным k соответствует сопряженное слагаемое с отрицательным k , то при суммировании в (2.17) останутся только действительные величины.

Слагаемые в (2.17) называются *комплексными гармониками*, а сомножи-

тели X_k — *комплексными амплитудами*.

Зависимость модуля $|X_k|$ комплексной амплитуды от частоты называется *амплитудным спектром сигнала* $x(t)$. При переходе от периодических сигналов к непериодическим период $T \rightarrow \infty$ и сумму (2.17) можно заменить интегралом Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.19)$$

а выражение (2.18) для комплексной амплитуды — так называемым преобразованием Фурье

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.20)$$

Непериодический сигнал $x(t)$, представленный в виде интеграла (2.19), можно во взаимосвязи с периодическим сигналом, разложенным в ряд (2.17), рассматривать как сумму бесконечно большого числа комплексных гармоник с бесконечно малыми комплексными амплитудами

$$dX = X(j\omega) d\omega / 2\pi. \quad (2.21)$$

Так как амплитуда dX характеризует спектр, приходящийся на интервал от ω до $\omega + d\omega$, то величину

$$X(j\omega) = 2\pi dX / d\omega \quad (2.22)$$

называют *комплексной спектральной плотностью*, а зависимость ее модуля $|X(j\omega)|$ от частоты — *спектральной плотностью амплитуд*.

Спектральная плотность мощности $|X(j\omega)|^2$ выражается равенством

$$\int [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega, \quad (2.23)$$

которое утверждает, что энергия, заключенная в сигнале $x(t)$, равна сумме квадратов всех составляющих его спектра.

2.3 Линейные дифференциальные уравнения

Как было указано ранее, наиболее общей и наиболее полной формой математического описания автоматических систем и их элементов является дифференциальное уравнение вида (2.1). Для большинства реальных элементов исходное уравнение (2.1), составленное строго в соответствии с законами физики, оказывается нелинейным, что значительно усложняет все последующие процедуры анализа. Поэтому всегда стремятся перейти от трудно разрешимого нелинейного уравнения (2.1) к линейному дифференциальному уравнению вида:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x(t), \quad (2.24)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — входная и выходная величины элемента или системы; a_i, b_i — коэффициенты уравнения.

Уравнение (2.24) устанавливает связь между входной и выходной величинами как в переходных, так и в установившихся режимах.

Коэффициенты дифференциального уравнения называются *параметрами*.

В большинстве практических случаев коэффициенты уравнения существенно не изменяются и системы являются *системами с постоянными параметрами*. В дальнейшем будут рассматриваться только такие системы.

Рассмотрим типовые формы записи линейного дифференциального уравнения (2.24), используемые в различных задачах теории автоматического управления.

Как и в других областях науки и техники, все физические переменные, входящие в уравнение, могут быть выражены в *относительных единицах*. Для этого каждое слагаемое делят на постоянную величину, имеющую размерность той переменной, которая входит в это слагаемое. Постоянные величины называют *базовыми*. В качестве базовых величин принимают

обычно номинальные или установившиеся значения переменных y и x .

Удобной формой записи линейных дифференциальных уравнений является *символическая* или *операторная*. Переход к этой форме осуществляют введением сокращенного условного обозначения операции дифференирования $d/dt = p$. Соответственно k -ю производную переменной y обозначают

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} = p^k y(t), \quad (2.25)$$

тогда уравнение (2.24) в символической форме будет иметь вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x(t). \quad (2.26)$$

Многочлены от p степени n и m , находящиеся в левой и правой частях уравнения (2.26), называются *дифференциальными операторами*. Каждый такой оператор устанавливает соответствие между функцией времени и определенной совокупностью производных этой функции. Многочлен

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = D(p) \quad (2.27)$$

называют *собственным оператором*, а многочлен

$$b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m = K(p) — \quad (2.28)$$

входным оператором или *оператором воздействия*.

Название *собственный* обусловлено тем, что многочлен $D(p)$ характеризует собственное движение элемента, т. е. движение при отсутствии внешних воздействий. Оператор $D(p)$ называют также *характеристическим*.

У всех реальных элементов и систем порядок наивысшей производной во входном операторе не может быть больше порядка наивысшей производной в собственном операторе, т. е. всегда $m \leq n$. Если в процессе каких-либо формальных выкладок образуется уравнение, у которого $m > n$, то говорят, что это уравнение соответствует физически нереализуемой системе.

Уравнения элементов невысокого порядка ($n < 3$) в теории автоматического управления принято записывать в так называемой *стандартной форме*. При *стандартной форме* записи уравнение преобразовывают таким образом, чтобы коэффициент при выходной величине был равен единице.

При этом коэффициент перед входной величиной в правой части уравнения становится равным передаточному коэффициенту, а коэффициенты при производных выходной величины будут иметь размерность времени в степени, равной порядку соответствующей производной. Например, уравнение второго порядка

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = (b_0 p + b_1) x(t) \quad (2.29)$$

путем деления всех членов на коэффициент a_2 может быть приведено к стандартной форме

$$(T^2_2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = k (T + 1) x(t), \quad (2.30)$$

$$K = b_1/a_2; T = b_0/b_1; T_1 = a_1/a_2; T^2_2 = a_0/a_2.$$

Коэффициенты T , T_1 , T_2 принято называть *постоянными времени*, характеризующими динамические свойства элемента.

Часто при исследовании автоматических систем оказывается удобным переход от естественного времени t , измеряемого в секундах, минутах и т. д., к так называемому *безразмерному* (относительному) времени \bar{t} . Этот переход осуществляется с помощью некоторого постоянного (в общем случае — произвольно выбранного) множителя T_m , имеющего размерность времени

$$\bar{t} = t / T_m. \quad (2.31)$$

В качестве множителя T_m , часто принимают постоянную времени одного из элементов, входящих в систему. Величину, обратную множителю T_m , называют *масштабом времени* и обозначают $m_r = 1/T_m$. Оператор k -кратного дифференцирования по безразмерному времени $\bar{p}^k = d^k/d\bar{t}^k$ связан с обычным оператором дифференцирования $p^k = d^k/dt^k$ соотношением

$$\bar{p}^k = p^k T_m^k. \quad (2.32)$$

Используя соотношение (2.32), можно любое дифференциальное уравнение записать в безразмерном времени, измеряемом в условных единицах T_m . Например, уравнение (2.29) будет иметь вид

$$\left(\frac{a_0}{T_m^2} \bar{p}^2 + \frac{a_1}{T_m} \bar{p} + a_2 \right) y(\bar{t}) = \left(\frac{b_0}{T_m} \bar{p} + b_1 \right) x(\bar{t}). \quad (2.33)$$

Если коэффициент преобразования времени выбирать по определенному правилу, а именно

$$T_m = \sqrt{a_0/a_n}, \quad (2.34)$$

то можно максимально упростить дифференциальное уравнение. Так, уравнение (2.33) примет вид

$$(\bar{p}^2 + A_1 \bar{p} + 1) y(\bar{t}) = (B_0 \bar{p} + B_1) x(\bar{t}), \quad (2.35)$$

$$A_1 = a_1 \sqrt{a_0/a_2}; B = b_0 / \sqrt{a_0/a_2}; B_1 = b_1 / a_2.$$

В левой части уравнения вместо трех числовых коэффициентов a_0, a_1, a_2 остается лишь один коэффициент A_1 . Такая компактная форма записи была впервые применена И. А. Вышинеградским (для уравнения 3-го порядка) и называется *формой Вышинеградского*.

Нажим преимуществом этой формы является то, что введение безразмерного времени \bar{t} в дифференциальное уравнение не влияет на характер решений функции $y(t)$, меняется только масштаб независимой переменной t . Поэтому изменение масштаба времени широко применяют при исследовании автоматических систем на аналоговых вычислительных машинах.

3.4 Временные характеристики

Дифференциальное уравнение является самой общей формой описания элемента и не дает наглядного представления о передаточных свойствах элемента. Наглядное представление об этих свойствах дает функция $y(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения. Но одно и то же дифференциальное уравнение может иметь множество решений, конкрет-

ный вид которых зависит от начальных условий и от характера функции $x(t)$, т.е. от начального состояния элемента и вида внешнего воздействия.

Поэтому принято динамические свойства элементов и систем характеризовать решением, соответствующим нулевым начальным условиям и одному из типовых воздействий. В качестве типового воздействия принимают единичное ступенчатое, дельта функцию или гармоническое воздействие.

Наиболее наглядное представление о динамических свойствах элемента дает его переходная функция (характеристика). Переходной функцией $h(t)$ называют изменение выходной величины $y(t)$ во времени, возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия, при нулевых начальных условиях. Переходная функция может быть задана в виде графика (рисунок 2.2, а) или в виде формулы.

Переходная функция $h(t)$, как и любое решение неоднородного дифференциального уравнения вида (2.24), имеет две составляющие: вынужденную $h_b(t)$ и свободную $h_c(t)$. Вынужденная составляющая переходного процесса представляет собой, как известно, частное решение исходного уравнения. При ступенчатом воздействии вынужденная составляющая равна устанавлившемуся значению выходной величины, которое для статических элементов может быть определено непосредственно из дифференциального уравнения (при нулевых производных):

$$h_b(t) = y(\infty) = b_m/a_n. \quad (2.36)$$

Свободная составляющая $h_c(t)$ может быть найдена как решение соответствующего однородного дифференциального уравнения в следующем виде (при отсутствии одинаковых корней)

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t}, \quad (2.37)$$

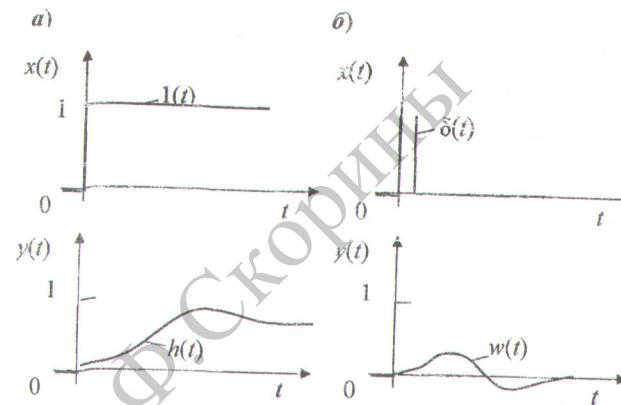


Рисунок 2.2 — Переходная (а) и импульсная переходная (б) характеристики

где λ_k — корни характеристического уравнения; C_k — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Характеристическое уравнение, соответствующее определенному дифференциальному уравнению, представляет собой, как известно, алгебраическое уравнение, степень и коэффициенты которого совпадают с порядком и коэффициентами левой части этого дифференциального уравнения. Для дифференциального уравнения, записанного в форме (2.24), характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.38)$$

Для линейных элементов и систем, кроме принципа суперпозиции, справедливо еще одно общее правило: реакция $y(t)$ на неединичное ступенчатое воздействие $a_0 I(t)$ равна произведению переходной функции $h(t)$ на величину множителя a_0 , т. е. $y(t) = a_0 h(t)$. Это свойство широко используется при исследовании и расчете линейных систем.

Импульсной переходной функцией $w(t)$ называют изменение выходной величины $y(t)$, возникающее после подачи на вход дельта-функции, при

нулевых начальных условиях (рисунок 2.2, б). Функцию $w(t)$ называют также *весовой функцией*.

Если входное воздействие представляет собой неединичный импульс $a_0\delta(t)$, то ординаты функции выходной величины $y(t)$ будут в a_0 раз больше ординат функции $w(t)$, т. е. $y(t) = a_0w(t)$.

Импульсная переходная функция $w(t)$ равна производной от переходной функции $h(t)$:

$$w(t) = dh(t)/dt, \quad (2.39)$$

и наоборот, переходная функция равна интегралу от импульсной переходной

$$h(t) = \int_0^t w(\vartheta)d\vartheta. \quad (2.40)$$

При помощи импульсной переходной функции элемента можно определить его реакцию на входное воздействие произвольного вида. Связь между изменениями входной и выходной величин во времени устанавливается *интегралом свертки*

$$y(t) = \int_0^t x(\vartheta)w(t-\vartheta)d\vartheta = \int_0^t x(t-\vartheta)w(\vartheta)d\vartheta. \quad (2.41)$$

2.5 Операционный метод и передаточная функция

Наиболее распространенным методом описания и анализа автоматических систем является операционный метод (метод операционного исчисления). В основе метода лежит *преобразование Лапласа*

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \quad (2.42)$$

которое устанавливает соответствие между функциями действительной переменной t и функциями комплексной переменной $s = \alpha + j\beta$. Функцию времени $x(t)$, входящую в интеграл Лапласа (2.42), называют *оригиналом*,

а результат интегрирования — функцию $X(s)$ — *изображением* функции $x(t)$ по Лапласу.

Преобразование Лапласа выполнимо только для таких функций времени, которые равны нулю при $t < 0$. Это условие обеспечивается обычно умножением функции $x(t)$ на единичную ступенчатую функцию $1(t)$. С математической и физической точек зрения такой искусственный прием вполне корректен, так как функции $x(t)$ описывают процессы в автоматических системах, начинающиеся с некоторого момента времени, а этот момент времени всегда может быть принят за начало отсчета.

Изображения простейших функций времени, наиболее часто используемых в расчетах автоматических систем, приведены в таблице 2.1. Основные свойства преобразования Лапласа, используемые при анализе автоматических систем, указаны в таблице 2.2.

Таблица 2.1 — Изображение простейших функций времени по Лапласу

Наименование функции	$x(t)$	$X(s) = L\{x(t)\}$
Дельта-функция	$\delta(t)$	1
Ступенчатая функция	$a_0 1(t)$	a_0/s
Степенная функция	$t^n 1(t)$	$n!/s^{n+1}$
Экспонента	$e^{-\alpha t} 1(t)$	$1/(s + \alpha)$
Синусоида	$\sin \omega t 1(t)$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
Косинусоида	$\cos \omega t 1(t)$	$s/(s^2 + \omega^2)$
Периодическая функция	$x(t) = x(t + T)$	$X(s)/(1 - e^{-sT})$

Наиболее важными свойствами преобразования Лапласа являются свойства, формулируемые обычно в виде правила: *при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала $x(t)$ по переменной t соответствует умножение изображения $X(s)$ на комплексную переменную s , а интегрированию оригинала соответствует деление $X(s)$ на s .*

Именно на этих двух свойствах основан операционный метод решения дифференциальных уравнений, который заключается в следующем. Исходное дифференциальное (или интегро-дифференциальное) уравнение, записанное

относительно искомой выходной функции $y(t)$, заменяют на алгебраическое уравнение относительно изображения $Y(s)$ (это называется алгебраизацией дифференциального уравнения), затем, решая алгебраическое уравнение при заданном $X(s)$, находят изображение $Y(s)$ и, наконец, по изображению $Y(s)$ определяют функцию $y(t)$. Этот обратный переход от изображений к оригиналам в большинстве практических задач может быть осуществлен при помощи таблиц, имеющихся в специальных справочниках по операционному исчислению.

Таблица 2.2 — Основные свойства преобразования Лапласа

Наименование	Оригинал	Изображение
Линейность	$a\dot{x}(t)$ $x_1(t) \pm x_2(t)$	$aX(s)$ $X_1(s) \pm X_2(s)$
Правило дифференцирования (при нулевых начальных условиях)	$d^k x(t)/dt^k$	$X(s)s^k$
Правило интегрирования (при нулевых начальных условиях)	$\underbrace{\int \dots \int}_{k \text{ раз}} x(\theta) d\theta^k$	$X(s)/s^k$
Изменение масштаба времени (теорема подобия)	$x(t/T_m)$	$X(sT_m) T_m$
Смещение аргумента оригинала (теорема запаздывания)	$x(t-\tau)$	$X(s)e^{-st}$
Теорема о начальном значении оригинала	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$
Теорема о конечном значении оригинала	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Широкое распространение операционного метода в теории автоматического управления обусловлено тем, что с его помощью определяют так называемую передаточную функцию, которая является самой компактной формой описания динамических свойств элементов и систем.

Применим преобразование Лапласа к линейному дифференциальному уравнению (2.24), полагая, что до приложения внешнего воздействия сис-

тема находилась в покое и все начальные условия равны нулю. Используя свойство линейности и правило дифференцирования (таблица 2.2), можно получить алгебраическое уравнение в изображениях:

$$D(s)Y(s) = K(s)X(s), \quad (2.43)$$

где

$$D(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n;$$

$$K(s) = b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m.$$

Сравнивая уравнение (2.43) с уравнением в символьической форме (2.26), можно заметить полную аналогию их структур. Различие уравнений в том, что символ p в (2.26) обозначает операцию дифференцирования, а символ s в (2.43) — комплексную переменную.

Введем понятие передаточной функции. *Передаточной функцией* $W(s)$ называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях (все величины равны нулю при $t < 0$):

$$W(s) = Y(s)/X(s) = L\{y(t)\}/L\{x(t)\}. \quad (2.44)$$

Для системы, описываемой уравнением (2.23), передаточная функция равна отношению входного оператора $K(s)$ к собственному оператору $D(s)$:

$$W(s) = \frac{K(s)}{D(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.45)$$

Как следует из (2.44) и (2.45), передаточная функция представляет собой некоторый динамический оператор, характеризующий прохождение сигналов через линейный элемент (рисунок 2.3, а).

Передаточную функцию формально можно получить из дифференциального уравнения путем замены в нем символа p на символ s соответствующей степени и деления образованного таким образом многочлена правой части уравнения на многочлен левой части.

Передаточную функцию электрических четырехполюсников удобно получить, пользуясь понятием операторного сопротивления. Для этого четы-

рехполюсник необходимо представить в виде схемы делителя напряжения (рисунок 2.3, б), состоящей из двух операторных сопротивлений $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$. Тогда передаточная функция между входным (u_1) и выходным (u_2) напряжениями может быть определена как отношение выходного сопротивления $Z_{\text{вых}}(s) = Z_2(s)$ к входному $Z_{\text{вх}}(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$:

$$W(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{Z_{\text{вых}}(s)}{Z_{\text{вх}}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}, \quad (2.46)$$

где $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$ найдены как эквивалентные операторные сопротивления входного и выходного участков, состоящих из типовых элементов электрических цепей (рисунок 2.3, б).

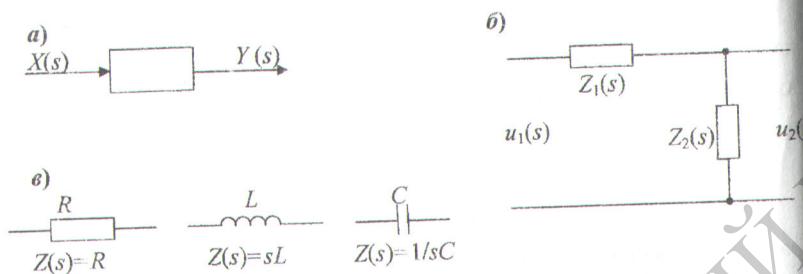


Рисунок 2.3 — Схемы для определения передаточной функции

Напомним известные из курса электричества (электротехники) [10] формулы, связывающие ток i с напряжением u в типовых элементах R , C и L

$$u_R = Ri; \quad u_c = \frac{1}{C} \int i dt; \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Преобразованные по Лапласу (таблица 2.2) эти формулы имеют вид:

$$u_R(s) = Ri(s); \quad u_c(s) = \frac{1}{sC} i(s); \quad u_L(s) = sLi(s).$$

Отсюда операторные сопротивления соответственно:

$$Z_R(s) = R; \quad Z_c(s) = \frac{1}{sC}; \quad Z_L(s) = sL.$$

Рассмотрим теперь основные свойства и особенности передаточных функций автоматических систем и их элементов.

Передаточная функция элемента связана с его импульсной переходной функцией преобразованием Лапласа:

$$W(s) = L\{w(t)\} = \int_0^\infty w(t)e^{-st} dt. \quad (2.47)$$

Для реальных элементов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями вида (2.24), передаточная функция представляет собой правильную рациональную дробь, у которой степень многочлена числителя меньше или равна степени многочлена знаменателя, т. е. $m \leq n$. Все коэффициенты передаточной функции — действительные числа, характеризующие параметры элемента. Передаточная функция является функцией комплексной переменной $s = \alpha \pm j\beta$, которая может при некоторых значениях переменной s обращаться в нуль или бесконечность. Значение переменной s , при котором функция $W(s)$ обращается в нуль, называют *нулем*, а значение, при котором обращается в бесконечность, — *полюсом* передаточной функции.

Очевидно, что нулями передаточной функции являются корни полинома $K(s)$, а полюсами — корни полинома $D(s)$. Корни полиномов числителя и знаменателя могут быть комплексными, мнимыми и вещественными числами (в том числе и нулевыми). Если эти корни известны, то передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$W(s) = \frac{b_0(s - \gamma_1)(s - \gamma_2) \dots (s - \gamma_m)}{a_0(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)}, \quad (2.48)$$

где γ_i — корни многочлена $K(s)$ (нули $W(s)$); λ_i — корни многочлена $D(s)$ (полюсы $W(s)$).

Таким образом, каждой конкретной передаточной функции с заданными коэффициентами соответствует вполне определенное сочетание нулей и полюсов. По распределению нулей и полюсов передаточной функции на ком-

плоскости с координатами α и $j\beta$ можно судить о свойствах элемента или системы.

Если полиномы $D(s)$ и $K(s)$ имеют один или несколько нулевых корней, то передаточную функцию удобно записывать в такой форме, чтобы полюсы и нули были выделены в явном виде. Так, если передаточная функция имеет в точке $s = 0$ полюс кратности v , то такую передаточную функцию удобно записать в виде

$$W(s) = k W^*(s) / s^v, \quad (2.49)$$

где $W^*(s)$ при $s \rightarrow 0$ стремится к единице.

Передаточная функция (2.48) имеет полюсы в точке $s = 0$, когда один или несколько младших коэффициентов многочлена $D(s)$ равны нулю:

$a_{n-v+1} = 0$ ($v = 0; 1; 2; \dots$). Такую передаточную функцию можно представить в виде (2.45) или после преобразований

$$W(s) = \frac{k}{s^v} W^*(s) = \frac{k \cdot B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + 1}{s^v A_0 s^{n-v} + A_1 s^{n-v-1} + \dots + 1}, \quad (2.50)$$

где $B_i = b_i / b_m$ при $i = 0; 1; 2; \dots; m$; $A_i = a_i / a_{n-v}$ при $i = 0; 1; 2; \dots; n-v$; $k = b_m / a_{n-v}$.

Величину v называют *порядком астатизма*. Коэффициент k имеет размерность

$$[k] = [y]/[x][I]^v \quad (2.51)$$

и с некоторой условностью может быть назван *передаточным коэффициентом*. Условность заключается в том, что понятие «передаточный коэффициент» было введено в качестве характеристики статического режима, а у «элемента» с $v \neq 0$ статический режим работы не существует.

Если $v = 0$, то элемент называется статическим, а его передаточная функция при $s = 0$ равна передаточному коэффициенту:

$$W(0) = k W^*(0) = b_m / a_n = k. \quad (2.52)$$

2.6 Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Зная частотную характеристику элемента, можно определить реакцию элемента на гармоническое воздействие любой частоты, а также на сумму гармонических воздействий различной частоты. Частотные характеристики широко используются в теории и практике автоматического управления, так как реальные возмущения, действующие на автоматические системы, могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.

Рассмотрим физическую сущность и разновидности частотных характеристик. Пусть на вход линейного элемента (рисунок 2.4, а) в момент времени $t=0$ подано гармоническое воздействие определенной частоты ω

$$x(t) = x_m \sin \omega t. \quad (2.53)$$

Через некоторое время, необходимое для протекания переходного процесса (т.е. для исчезновения свободной составляющей), элемент войдет в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина $y(t)$ будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω , но с отличающейся амплитудой y_m и со сдвигом Δt по оси времени (рисунок 2.4, б).

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \phi), \quad (2.54)$$

где $\phi = (\Delta t_\phi / T) 360$ — фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами, градус.

Повторяя такой эксперимент при фиксированном x_m для различных значений частоты (от 0 до ∞), можно установить, что амплитуда y_m и фазовый сдвиг ϕ выходного сигнала конкретного элемента зависят от частоты воздействия. Подавая гармоническое воздействие на вход различных элемен-

также от типа и параметров элемента. Следовательно, зависимости амплитуды y_m и сдвига ϕ от значений частоты ω могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

Так как амплитуда выходного сигнала y_m зависит еще от амплитуды входного сигнала x_m , то целесообразно при описании передаточных свойств элементов рассматривать отношение амплитуд y_m/x_m .

Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты называют *амплитудной частотной характеристикой* (АЧХ) и обозначают $A(\omega)$ (рисунок 2.5, а). Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты называют *фазовой частотной характеристикой* (ФЧХ) $\varphi(\omega)$ (рисунок 2.5, б). Аналитические выражения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ называют соответственно амплитудными и фазовыми частотными функциями.

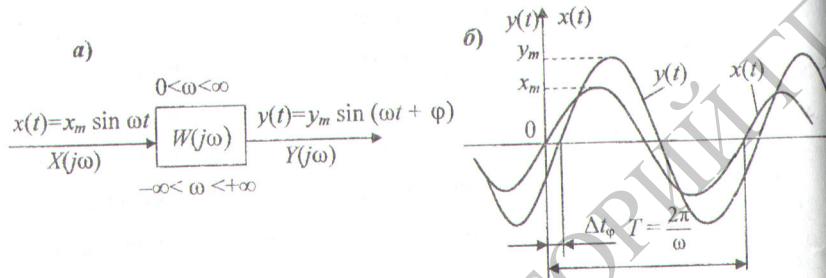


Рисунок 2.4 — Схема для определения понятий частотного метода

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно объединить в одну общую — амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ или АФХ). Амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)$ представляет собой функцию комплексной переменной $j\omega$ (см. пояснение к формуле (2.17)), модуль которой равен $A(\omega)$, а аргумент равен $\varphi(\omega)$. Каждому

фиксированному значению частоты ω , соответствует комплексное число $W(j\omega_i)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $A(\omega_i)$ и угол поворота $\varphi(\omega_i)$ (рисунок 2.5, в).

Отрицательные значения $\varphi(\omega)$, соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительного направления действительной оси.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор $W(j\omega)$ поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно увеличивается или уменьшается длина вектора. Кривая, которую при этом описывает конец вектора, и есть АФХ. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

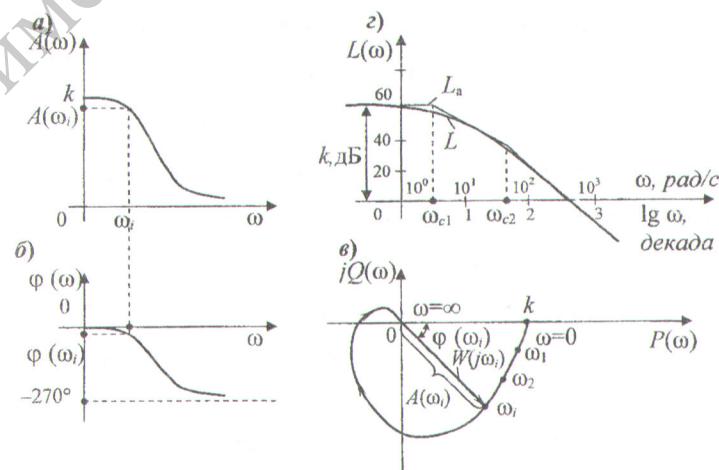


Рисунок 2.5 — Частотные характеристики: амплитудная (а); фазовая (б); амплитудно-фазовая (в); логарифмическая (г)

Проекции вектора $W(j\omega)$ на действительную и мнимую оси называют соответственно *действительной и мнимой частотными характеристиками* и обозначают $P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$, $Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$. Отметим, что действительная частотная характеристика $P(\omega)$ — всегда четная функция частоты, а

мнимая характеристика $Q(\omega)$ — всегда нечетная функция.

Аналитическое выражение для АФХ конкретного элемента можно получить из его передаточной функции путем подстановки $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega}. \quad (2.55)$$

АФХ $W(j\omega)$, как и любая комплексная величина, может быть представлена в показательной форме

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (2.56)$$

алгебраической

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (2.57)$$

или тригонометрической

$$W(j\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega) + jA(\omega)\sin\varphi(\omega). \quad (2.58)$$

Связь между различными частотными функциями следующая:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (2.59)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg(Q(\omega)/P(\omega)). \quad (2.60)$$

Поскольку АФХ $W(j\omega)$, так же как и передаточная функция, представляет собой обычно дробь, то ее модуль может быть найден как отношение модуля числителя к модулю знаменателя:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = K(j\omega) / |D(j\omega)|, \quad (2.61)$$

а аргумент функции $W(j\omega)$ — как разность аргументов числителя и знаменателя:

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg K(j\omega) - \arg D(j\omega). \quad (2.62)$$

При практических расчетах автоматических систем удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют *логарифмическими*. В логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствуют сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду. Декада — интервал частот, заключенный между произвольным значением ω_i и его десятикратным значением $10\omega_i$. Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1.

Обычно в расчетах используют *логарифмическую амплитудную частотную характеристику* (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad (2.63)$$

ординаты которой выражают в логарифмических единицах — белах (Б) или децибелах (дБ). При аппроксимации реальной ЛАЧХ ломаной линией максимальная погрешность равна -3 дБ в точке излома на сопрягающей частоте ω_{cl} (рисунок 2.5, г).

При построении фазовой частотной характеристики логарифмический масштаб применяют только для оси абсцисс.

АФХ устанавливает связь между выходным и входным сигналами, являющимися гармоническими функциями или их линейными комбинациями. Поэтому АФХ можно определить как отношение изображения по Фурье выходной величины $Y(j\omega)$ к изображению входной величины $X(j\omega)$.

$$W(j\omega) = Y(j\omega) / X(j\omega). \quad (2.64)$$

В этом случае комплексная переменная $j\omega$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, так как любой реальный сигнал может быть разложен на сумму только попарно сопряженных врачающихся векторов.

АФХ элемента связана с его импульсной переходной функцией преобразованием Фурье (2.20):

$$W(j\omega) = \int_0^\infty w(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.65)$$

При применении двустороннего преобразования (2.20) к функции $w(t)$ учтено, что при $t < 0$ $x(t) \equiv 0$, и поэтому нижний предел интегрирования принят равным нулю.

По виду частотных характеристик все элементы и системы делятся на

две группы: минимально-фазовые и неминимально-фазовые. Минимально-фазовыми являются элементы (системы), у которых все полюсы и нули передаточной функции $W(s)$ имеют отрицательные действительные части. Такие элементы дают минимальный фазовый сдвиг $\phi(\omega)$ по сравнению с любыми другими элементами, имеющими такую же амплитудную характеристику $A(\omega)$, но у которой действительная часть хотя бы одного полюса или нуля положительна. Минимально-фазовые элементы обладают важным для практических расчетов свойством: их частотная передаточная функция полностью определяется одной из трех составляющих — $A(\omega)$, $P(\omega)$ или $Q(\omega)$. Это существенно упрощает задачи анализа и синтеза минимально-фазовых систем.

Рассмотренные в 2.5—2.6 временные, передаточные и частотные характеристики однозначно связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Лапласа и Фурье. Эти взаимные связи и соответствия сведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 — Взаимные соответствия динамических характеристик

Характеристики	$h(t)$	$w(t)$	$W(s)$	$W(j\omega)$
Переходная $h(t)=$	1	$\int_0^t w(\theta) d\theta$	$L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$	$F^{-1}\left\{\frac{W(j\omega)}{j\omega}\right\}$
Импульсная $w(t)=$	$\frac{dh(t)}{dt}$	1	$L^{-1}\{W(s)\}$	$F^{-1}\{W(j\omega)\}$
Передаточная $W(s)=$	$sL\{h(t)\}$	$L\{w(t)\}$	1	$W(j\omega) _{j\omega=s}$
Частотная $W(j\omega)=$	$j\omega F\{h(t)\}$	$F\{w(t)\}$	$W(s) _{s=j\omega}$	1

2.7 Статические и динамические характеристики типовых соединений линейных элементов

Алгоритмическая структура любой автоматической системы управления представляет собой комбинацию трех типовых соединений элементов: последовательного, параллельного и встречно-параллельного (охват обратной связью). Если эти соединения состоят из элементов направленного действия, то каждое соединение может быть заменено одним элементом, статические и динамические свойства которого эквивалентны свойствам соединения. При *последовательном соединении* (рисунок 2.6, а) выходная величина каждого предыдущего элемента является входным воздействием для последующего элемента.

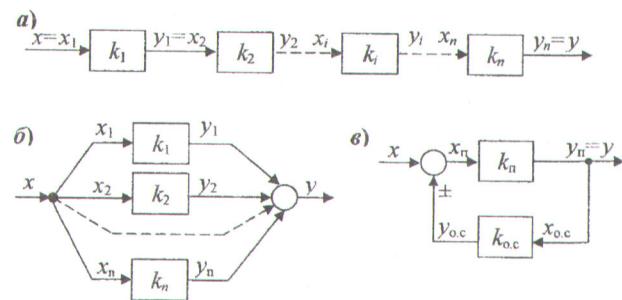


Рисунок 2.6 — Типовые соединения линейных элементов:

последовательное (а); параллельное (б);
встречно-параллельное (с обратной связью) (в)

Если элементы линейны и в статике характеризуются передаточными коэффициентами k_i , то передаточный коэффициент эквивалентного элемента равен

$$k_3 = y/x = \prod_{i=1}^n k_i. \quad (2.66)$$

Таким образом, общий передаточный коэффициент последовательно

соединенных линейных элементов равен произведению передаточных коэффициентов этих элементов. Размерность общего передаточного коэффициента равна произведению размерностей коэффициентов.

Параллельным соединением называют такое соединение, при котором на вход всех элементов поступает одно и то же воздействие, а их выходные величины (с соответствующими знаками) суммируются (рисунок 2.6, б). Согласно этому определению

$$x = x_1 = x_2 = \dots = x_i = \dots = x_n; \quad (2.67)$$

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_i + \dots + y_n. \quad (2.68)$$

Подставляя в (2.68) уравнения статики отдельных элементов

$$y_i = k_i x_i, \quad (2.69)$$

получим

$$y = (k_1 + k_2 + \dots + k_i + \dots + k_n) x. \quad (2.70)$$

Отсюда следует, что *эквивалентный передаточный коэффициент параллельно соединенных линейных элементов равен сумме передаточных коэффициентов элементов*:

$$k_{\text{п}} = \sum_{i=1}^n k_i \quad (2.71)$$

Отметим, что суммирование сигналов y_i в одной точке возможно лишь в том случае, если они имеют одинаковую размерность. Поэтому коэффициенты всех параллельно включенных элементов и коэффициент $k_{\text{п}}$ всегда имеют одну и ту же размерность.

Встречно-параллельным соединением двух элементов (соединением с обратной связью) называют такое соединение, при котором выходной сигнал первого элемента поступает на вход второго, а выходной сигнал второго элемента с соответствующим знаком суммируется с общим входным сигналом (рисунок 2.6, в). Первый элемент, в котором направление передачи сигнала совпадает с направлением передачи общего сигнала, называют *элементом прямой цепи*. Второй элемент, у которого направление переда-

чи сигнала противоположно направлению передачи общего сигнала, называют *элементом обратной связи*.

В зависимости от знака сигнала обратной связи различают положительные и отрицательные обратные связи. Если сигнал обратной связи $y_{\text{o.c.}}$ суммируется (на схеме знак «+») с общим входным сигналом x , то обратная связь является *положительной*. Если сигнал обратной связи вычитается из общего сигнала (на схеме знак «-»), то обратная связь является *отрицательной*.

Рассмотрим статические свойства соединения с обратной связью. Пусть элементы прямой и обратной связи линейны и характеризуются коэффициентами $k_{\text{п}}$ и $k_{\text{o.c.}}$. Тогда согласно определению понятия обратная связь можно записать уравнения:

— прямой цепи

$$y = k_{\text{п}} x_{\text{п}}; \quad (2.72)$$

— обратной связи

$$y_{\text{o.c.}} = k_{\text{o.c.}} y; \quad (2.73)$$

— и узла суммирования

$$x_{\text{п}} = x \mp y_{\text{o.c.}} \quad (2.74)$$

Подставляя выражение (2.73) в (2.74), а затем выражение (2.74) в (2.72), получим уравнение статики всего соединения с обратной связью:

$$y = x k_{\text{п}} / (1 \pm k_{\text{п}} k_{\text{o.c.}}). \quad (2.75)$$

Отсюда эквивалентный передаточный коэффициент равен

$$k_{\text{п}} = k_{\text{п}} / (1 \pm k_{\text{п}} k_{\text{o.c.}}), \quad (2.76)$$

где знак «+» соответствует отрицательной обратной связи, а знак «-» положительному. Формула (2.76) выражает одно из фундаментальных правил ТАУ: *эквивалентный передаточный коэффициент элемента, охваченного отрицательной обратной связью, равен коэффициенту прямой цепи, разделенному на единицу плюс произведение коэффициентов прямой и обратной связей*.

Размерность эквивалентного передаточного коэффициента равна размерности коэффициента k_n . Произведение коэффициентов $k_n k_{o.c}$ всегда безразмерно.

Из выражения (2.76) следует, что отрицательная обратная связь уменьшает эквивалентный коэффициент, а положительная — увеличивает. Если при положительной обратной связи произведение коэффициентов $k_n k_{o.c} = 1$, то коэффициент k_3 возрастает до бесконечности, а если $k_n k_{o.c} > 1$, то положительная обратная связь преобразует соединение в инвертор (элемент, изменяющий знак входного сигнала) с эквивалентным коэффициентом k_3 .

Анализируя формулу (2.76), можно показать, что отрицательная обратная связь уменьшает отклонения выходной величины, возникающие в исходной прямой цепи из-за нестабильности коэффициента k_n в $(1 + k_n k_{o.c})$. Нестабильность самого коэффициента $k_{o.c}$ обратной связью не компенсируется.

Соединение с отрицательной обратной связью обладает еще одним свойством: при достаточно большом значении произведения $k_n k_{o.c}$ эквивалентный передаточный коэффициент практически не зависит от коэффициента k_n . Действительно, при $k_n k_{o.c} \gg 1$

$$k_3 \approx k_n / k_n k_{o.c} = 1/k_{o.c}. \quad (2.77)$$

Это свойство широко используется при конструировании высокостабильных устройств из элементов с меняющимися коэффициентами.

Таким образом, отрицательная обратная связь всегда уменьшает проявление нестабильности параметров охваченного элемента и оказывает стабилизирующее действие на передаточные свойства прямой цепи.

Заметим, что в случаях, когда статические характеристики отдельных элементов нелинейны, нельзя применять формулы (2.66), (2.71), (2.76) и эквивалентные характеристики соединений можно определить только графическими построениями.

Выражения для эквивалентных передаточных функций типовых соеди-

нений можно получить так же, как выражения (2.66), (2.71) и (2.76) для передаточных коэффициентов.

Эквивалентная передаточная функция последовательного соединения из n элементов равна произведению n передаточных функций элементов:

$$W_s(s) = Y(s) / X(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s). \quad (2.78)$$

Соответственно, эквивалентная АФЧХ последовательного соединения также равна произведению:

$$W_s(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) e^{j\Phi_i(\omega)}. \quad (2.79)$$

Эквивалентная АЧХ этого соединения может быть получена как модуль произведения (2.79) и равна произведению отдельных АЧХ:

$$A_s(\omega) = |W_s(j\omega)| = \prod_{i=1}^n A_i(\omega), \quad (2.80)$$

и эквивалентная ФЧХ — как аргумент произведения и равна сумме ФЧХ:

$$\Phi_s(\omega) = \arg W_s(j\omega) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\omega). \quad (2.81)$$

В соответствии с (2.80) эквивалентная ЛАЧХ может быть получена как сумма ЛАЧХ отдельных элементов, соединенных последовательно:

$$L_s(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega). \quad (2.82)$$

При параллельном соединении n элементов эквивалентная передаточная функция равна сумме n передаточных функций элементов:

$$W_s(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (2.83)$$

Как сумма могут быть найдены и такие эквивалентные характеристики параллельного соединения, как $W_s(j\omega)$, $A_s(t)$ и $w_s(t)$.

Наконец, для соединения с обратной связью эквивалентная передаточная функция, аналогично (2.76), равна

$$W_3(s) = W_n(s) / [1 \pm W_n(s) W_{o,c}(s)], \quad (2.84)$$

где знак «+» соответствует отрицательной обратной связи, а знак «-» — положительной.

Нетрудно убедиться, что при больших значениях передаточного коэффициента прямой цепи эквивалентная передаточная функция встречного параллельного соединения с отрицательной обратной связью, аналогично (2.77), принимает вид

$$W_3(s) \approx 1/W_{o,c}(s). \quad (2.85)$$

Соотношение (2.85) выражает свойство так называемой *пределной системы*, динамические свойства которой определяются только свойствами звена обратной связи.

2.8 Векторно-матричная форма описания многомерных элементов

Современные системы управления сложными технологическими объектами часто содержат элементы с несколькими входными и несколькими выходными переменными. Такие элементы называют *многомерными*.

Многомерными элементами являются прежде всего сами объекты управления. Например, электрический генератор переменного тока имеет две выходные переменные — напряжение и частоту и две входные — напряжение возбуждения и частоту вращения ротора.

Многомерными элементами могут быть и другие части систем управления — например, сложные управляющие устройства в виде микроЭВМ, выполняющих роль многоканальных регуляторов.

В приведенном примере выходными переменными многомерного элемента являются реальные физические величины, которые, как правило, поддаются измерению. Однако в качестве выходных переменных могут фигурировать некоторые абстрактные переменные, например, производные от реальных выходных переменных, не имеющие конкретного физи-

ческого смысла, и тогда даже элемент с одним входом и одним выходом (но описываемый дифференциальным уравнением выше первого порядка) может рассматриваться как многомерный.

Математическое описание передаточных свойств любых линейных многомерных элементов может быть осуществлено в двух различных видах: при помощи рассмотренных выше динамических характеристик (дифференциальных уравнений, временных, передаточных и частотных функций), записанных для реальных входных и выходных переменных; при помощи дифференциальных уравнений в форме Коши, записанных для абстрактных выходных переменных (переменных состояния). Для краткости обозначим первый способ описания ВВ (вход-выход), а второй — ПС (переменные состояния).

Способ описания «вход-выход». Пусть имеется многомерный элемент (рисунок 2.7, а) с m входными переменными x_1, x_2, \dots, x_m и n измеряемыми (наблюдаемыми) выходными переменными $y_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_n$. В общем случае каждая входная переменная связана с каждой выходной переменной (на рисунке показаны лишь связи переменных x_k и y_l с остальными).

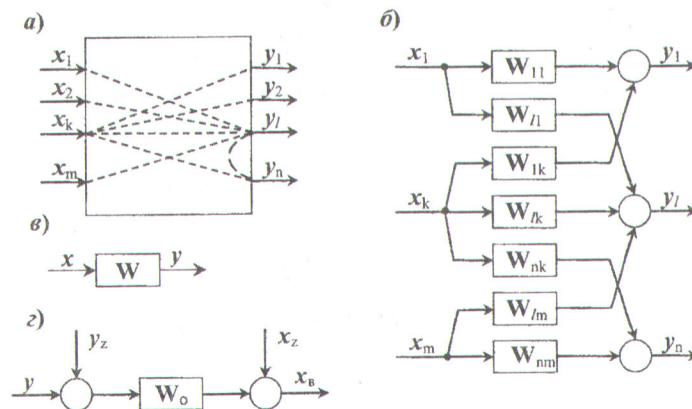


Рисунок 2.7 – Модели «вход-выход» многомерного элемента

Если взаимосвязи по всем каналам $x_k — y_l$ линейны или линеаризованы,

то в общем случае элемент можно описать следующей системой n неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n D_{il}(p) y_i(t) = \sum_{k=1}^m K_{ik}(p) x_k(t) \quad (i = 1; 2; \dots; n), \quad (2.86)$$

где $D_{il}(p)$ и $K_{ik}(p)$ — выходные и входные дифференциальные операторы вида (2.27) и (2.28).

Систему (2.86) можно записать более компактно — в виде одного векторного дифференциального уравнения

$$D(p)y(t) = K(p)x(t), \quad (2.87)$$

где $y(t)$ и $x(t)$ — векторы выходных и входных переменных, представленные в виде матриц-столбцов $y = [y_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_n]^T$ и $x = [x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m]^T$, а $D(p)$ и $K(p)$ — матрицы операторов $D_{il}(p)$ и $K_{ik}(p)$, имеющие размеры соответственно (nxn) и (mxm) .

У большинства реальных конструктивных элементов каждая выходная переменная y_l зависит только от входных переменных x_k и не связана уравнениями с другими выходными переменными. В этом случае матрица D диагональная. Если же хотя бы между двумя выходными переменными существует внутренняя связь (на рисунке 2.7, а — связь между y_l и y_n), то матрица D уже недиагональная.

Запишем векторное дифференциальное уравнение (2.87) в изображениях по Лапласу, полагая при этом начальные условия нулевыми:

$$D(s)y(s) = K(s)x(s). \quad (2.88)$$

Теперь можно определить *матрицу передаточных функций (передаточную матрицу)* элемента:

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{nl}(s) & \dots & W_{nm}(s) \end{bmatrix} = D^{-1}(s)K(s) = \frac{\tilde{D}(s)K(s)}{|D(s)|}, \quad (2.89)$$

где $D^{-1}(s)$ — матрица, обратная по отношению к $D(s)$, $\tilde{D}(s) = [\tilde{D}_{il}(s)]$ — присоединенная матрица для $D(s)$; $\tilde{D}_{il}(s)$ — алгебраические дополнения

элементов $D_{il}(s)$.

Элементы матрицы $W(s)$ представляют передаточные функции $W_{lk}(s)$ по отдельным каналам $x_k \rightarrow y_l$. В частном случае, когда матрица $D(s)$ диагональная, т.е. когда в левой части каждого уравнения системы (2.86) содержится только одно слагаемое с переменной y_l , передаточные функции по отдельным каналам можно найти более просто — пользуясь определением понятия передаточной функции.

$$W_{lk}(s) = y_l(s)/x_k(s) = K_{lk}(s)/D_{lk}(s) \quad (l = 1; 2; \dots; n). \quad (2.90)$$

Согласно принципу суперпозиции каждая выходная переменная элемента может рассматриваться как сумма (рисунок 2.7, б):

$$y_l(s) = \sum_{k=1}^m W_{lk}(s)x_k(s), \quad (l = 1; 2; \dots; n). \quad (2.91)$$

Пользуясь введенной передаточной матрицей многомерного элемента, его схему можно заменить другой (рисунок 2.7, в), которой соответствует операторное уравнение

$$y(s) = W(s)x(s). \quad (2.92)$$

Матрицы, элементами которых служат весовые функции $w_{lk}(t)$ или переходные функции $h_{lk}(t)$, называются соответственно *весовой* $w(t)$ или *переходной* $h(t)$ матрицами. Весовая и передаточная матрицы связаны соотношением, аналогичным формуле (2.47):

$$W(s) = L\{w(t)\} = \int_0^\infty w(t)e^{-st} dt. \quad (2.93)$$

Если все воздействия приложены к элементу одновременно в момент $t = 0$, то аналогично интегралу свертки (2.41) можно записать

$$y(t) = \int_0^t w(t-\vartheta)x(\vartheta)d\vartheta \quad (2.94)$$

или в скалярной форме

$$y_l(t) = \sum_{k=1}^m \int_0^t w_{lk}(t-\vartheta)x_k(\vartheta)d\vartheta \quad (l = 1; 2; \dots; n). \quad (2.95)$$

Способ описания в переменных состояния. Рассмотрим сущность способа применительно к задаче описания многомерного объекта управле-

ния, учитывая, что при описании объектов управления выходные переменные принято обозначать символом x , а входные (управляющие) — y (рисунок 2.7, г). Математическую модель объекта представляют в виде двух уравнений — уравнения состояния и уравнения выхода.

Уравнение состояния линейного объекта отражает его динамические свойства и записывается в виде векторного дифференциального уравнения в форме Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + By(t) + z(t), \quad (2.96)$$

где $x(t)$ — вектор состояния с компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, называемыми *переменными состояния* объекта; $y(t)$ — вектор управления с компонентами $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$; $z(t)$ — вектор возмущений $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$, действующих на входе объекта; $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ — матрицы постоянных коэффициентов, зависящих от конструктивных параметров объекта.

Векторное уравнение (2.96) эквивалентно системе n скалярных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij}y_j(t) + z_i(t) \quad (i=1; 2; \dots; n). \quad (2.97)$$

При описании электрических и механических объектов, обладающих способностью накапливать энергию, в качестве переменных состояния часто принимают токи через индуктивности, напряжения на емкостях, перемещения и скорости движения масс. Как известно, именно эти величины определяют накопленную энергию (магнитную, электрическую, потенциальную, кинетическую) и характеризуют, следовательно, инерционные свойства объекта. Для одномерного объекта n -го порядка переменными состояния могут служить выходной сигнал и его производные до $(n-1)$ -й включительно.

Однако в общем случае переменные состояния могут и не иметь конкретного физического смысла — они будут формальными, абстрактными переменными, лишь удовлетворяющими уравнениям состояния.

В некоторых частных случаях переменные состояния оказываются свя-

занными между собой соотношением

$$x_i(t) = x_{i+1}(t) \quad (i=1; 2; \dots; n-1), \quad (2.98)$$

и тогда они называются *фазовыми переменными*.

n -мерное пространство, координатами которого служат переменные состояния x , называют *пространством состояния*, а рассматриваемый способ описания — соответственно *методом пространства состояний*.

Полная математическая модель линейного многомерного объекта, кроме уравнений состояния, содержит еще так называемое *уравнение выхода* или *уравнение наблюдения*, связывающее переменные состояния (промежуточные переменные) и управляющие воздействия с выходными измеряемыми (наблюдаемыми) переменными x_B :

$$x_B(t) = Cx(t) + Dy(t) + g(t), \quad (2.99)$$

или в скалярной форме

$$x_{Bi}(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^m d_{ij}y_j(t) + g_i(t) \quad (i=1; 2; \dots; l), \quad (2.100)$$

где $x_B(t) = [x_{B1}(t), x_{B2}(t), \dots, x_{Bl}(t)]^T$ — l -мерный вектор выходных переменных объекта; $g(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_l(t)]^T$ — l -мерный вектор возмущений, действующих на выходе объекта; $C = [c_{ij}]_{l \times n}$, $D = [d_{ij}]_{l \times m}$ — матрицы постоянных коэффициентов, характеризующие безынерционное влияние переменных состояния и управляющие воздействия на выход объекта.

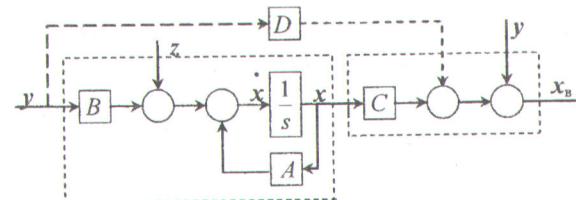


Рисунок 2.8 – Модель многомерного объекта в переменных состояния

Матрица выхода C отражает статические передаточные свойства как самого объекта, так и измерительного устройства, с помощью которого получаются выходные сигналы x_B . Поэтому матрицу C называют еще матри-

цей наблюдения, а в вектор возмущений g включают и шумы, возникающие в измерительном устройстве.

Модели объекта, записанной при помощи переменных состояния в виде уравнений (2.96) и (2.99), соответствует алгоритмическая схема, представленная на рисунке 2.8. В звене, стоящем между x и \dot{x} , выполняется операция

$$\dot{x} = (1/s)I\dot{x}, \quad (2.101)$$

где $1/s$ – оператор интегрирования; I – единичная матрица.

Из уравнений состояния (2.96) и выхода (2.99) может быть получено следующее матричное уравнение статики многомерного линейного объекта:

$$x_B = K_y y - K_B z + g, \quad (2.102)$$

где $K_y = D - CA^{-1}B$ и $K_B = CA^{-1}$ – матрицы передаточных коэффициентов объекта соответственно по каналам управления и возмущения.

С помощью переменных состояния можно представить в виде модели (2.96), (2.99) объект, имеющий один вход и один выход и описываемый передаточной функцией

$$W(s) = \frac{y(s)}{y(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (m = n-1). \quad (2.103)$$

При одном из возможных вариантов указанного представления матрицы, входящие в уравнения (2.96), (2.99), имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_n}{a_0}; & \frac{-a_{n-1}}{a_0}; & \dots & \dots & \frac{-a_1}{a_0} \end{bmatrix}_{n \times n}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ a_0 \end{bmatrix}_{n \times 1}; \quad C^T = \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1}; \quad (2.104)$$

$$D = 0.$$

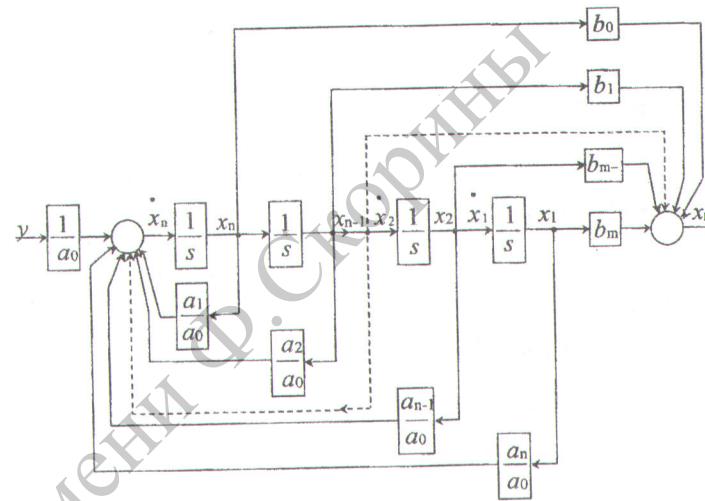


Рисунок 2.9 — Модель динамического объекта (2.103) в переменных состояния

Соответствующая матрицам (2.104) алгоритмическая схема показана на рисунке 2.9. При этом переменные состояния объекта связаны соотношением (2.98), т.е. являются фазовыми.

Если в передаточной функции (2.103) полиномы числителя и знаменателя имеют одинаковый порядок, т.е. $m = n$, то матрица $D = b_0 / a_0 \neq 0$. Но при этом матрицы A , B , C имеют вид, отличный от (2.104), а переменные состояния уже не удается выразить как фазовые.

Покажем, что объекту с передаточной функцией (2.103) в пространстве состояний действительно соответствуют матрицы (2.104). Преобразуем дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x_B(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) y(t) \quad (m < n) \quad (2.105)$$

к нормальной форме Коши (2.96) или (2.97). Для этого введем вспомогательную переменную $x_1(t)$ и запишем уравнение (2.105) в виде пропорции:

$$x_B(t) / (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) = y(t) / (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) = x_1(t). \quad (2.106)$$

Очевидно, что соотношению (2.105) соответствуют два уравнения:

$$(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x_1(t) = x_B(t), \quad (2.107)$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x_1(t) = y(t). \quad (2.108)$$

Введем обозначения

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = x_3(t), \dots, \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \quad (2.109)$$

тогда вместо уравнения (2.108) получим

$$\dot{x}_n(t) = -a_0^{-1} [a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + \dots + a_n x_1(t)] + a_0^{-1} y(t). \quad (2.110)$$

Объединяя последнее уравнение с выражениями (2.98), получим систему уравнений в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t), & (i=1; 2; \dots; n-1), \\ \dot{x}_n(t) = -a_0^{-1} [a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + \dots + a_n x_1(t)] + a_0^{-1} y(t) \end{cases} \quad (2.111)$$

Применяя соотношения (2.109) к уравнению (2.107), найдем выражение для выходной переменной

$$x_B(t) = b_0 x_{m+1}(t) + b_1 x_m(t) + \dots + b_m x_1(t). \quad (2.112)$$

Нетрудно заметить, что именно при матрицах вида (2.104) полученные уравнения (2.111) и (2.112) эквивалентны уравнениям состояния (2.96) и выхода (2.99).

От модели объекта, записанной по способу ПС, можно перейти к описанию по способу ВВ. Например, матричная передаточная функция объекта между вектором управления $y(t)$ и вектором выхода x_B , согласно уравнениям (2.96) и (2.99), равна (при $z(t) = 0$ и $g(t) = 0$)

$$W_0(s) = x_B(s) / y(s) = C(sI - A)^{-1} B + D. \quad (2.113)$$

Изменение вектора состояния $x(t)$ во времени при известном векторе управления $y(t)$ определяется следующим решением неоднородного уравнения (2.96):

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\vartheta)By(\vartheta)d\vartheta, \quad (2.114)$$

где $x(0)$ — начальное положение вектора $x(t)$ в момент $t = 0$; $\Phi(t) = [\Phi_{ij}(t)]_{n \times n}$ — *переходная (фундаментальная) матрица*, определяющая так называемую фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$x(t) = Ax(t);$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \dots & \Phi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1}(t) & \dots & \Phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Каждый элемент $\Phi_{ij}(x)$ фундаментальной матрицы описывает процесс перехода i -й переменной состояния, когда j -я переменная состояния имеет начальное значение $x_j(0) = 1$.

Первое слагаемое в выражении (2.114) переходного процесса определяет свободную составляющую $x_{\text{св}}(t)$, зависящую только от начальных условий $x(0)$ и собственных свойств объекта, т.е. от матрицы A , а второе слагаемое — вынужденную составляющую $x_{\text{вын}}(t)$, зависящую как от собственных свойств объекта (матриц A и B), так и от входных воздействий (вектора $y(t)$).

Через переходную матрицу $\Phi(t)$ можно выразить матричную весовую функцию $w(t)$ для выходного вектора x_B (при $D = 0$):

$$w(t) = C\Phi(t)B. \quad (2.116)$$

Свободную и вынужденную составляющие вектора $x(t)$ можно определить с помощью преобразования Лапласа. Продемонстрируем этот способ на примере определения свободной составляющей. Однородное дифференциальное уравнение, описывающее свободное движение, имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.117)$$

соответствующее ему преобразованное уравнение —

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) \quad \text{или} \quad x(s) = (sI - A)^{-1}x(0), \quad (2.118)$$

отсюда

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) = L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}x(0)\} = e^{At}x(0). \quad (2.119)$$

Из сравнения выражения (2.119) с первым слагаемым в формуле (2.114),

характеризующим $x_{cb}(t)$, следует, что фундаментальная матрица всегда имеет вид

$$\Phi(t) = e^{At}. \quad (2.120)$$

Элементы матрицы $\Phi(t)$ можно определить разложением матричной экспоненциальной функции (2.120) в степенной ряд

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \quad (2.121)$$

Собственные динамические свойства объекта можно оценить и без решения уравнения (2.117) — по собственным значениям λ матрицы A , которые определяются по ее характеристической матрице

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & ; & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & ; & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & ; & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.122)$$

Эти собственные значения отыскиваются как корни характеристического уравнения матрицы

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (2.123)$$

левая часть которого представляет собой многочлен степени n относительно λ

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0 \quad (2.124)$$

или

$$(c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n)(-1)^n = 0. \quad (2.125)$$

Собственные значения λ_i матрицы A совпадают с полюсами s_i передаточной функции (2.113) объекта. Это утверждение следует из известного свойства определителя квадратной матрицы

$$|A - \lambda I| = (-1)^n |\lambda I - A|. \quad (2.126)$$

2.9 Элементарные операции аналогового и цифрового моделирования

Для экспериментального исследования динамических свойств систем управления широко применяется машинное моделирование, осуществляемое на различных видах ЭВМ. Существует два основных метода машинного моделирования: метод аналогового моделирования, реализуемый на АВМ, и метод цифрового моделирования, реализуемый на ЦВМ.

При аналоговом моделировании решение динамической задачи воспроизводится в виде электрического переходного процесса, адекватного свойствам исследуемой системы управления.

Результат решения наблюдают на экране осциллографа или регистрируют с помощью записывающих приборов.

Цифровое моделирование заключается в выполнении определенной последовательности вычислительных процедур, соответствующих численному решению дифференциальных уравнений системы. Результат решения получается на экране дисплея или выводится на печатающее устройство.

При аналоговом и цифровом моделировании систем управления наиболее широко применяется *методика структурного моделирования*, согласно которой в машинной модели воспроизводится физическая структура исследуемой системы, расчлененная на элементарные математические операции (интегрирование, умножение на постоянный коэффициент, суммирование и др.). Эти элементарные операции реализуются при аналоговом моделировании на операционных усилителях, а при цифровом — соответствующими программными блоками.

Как было показано в 2.8, любая сложная динамическая система n -го порядка, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением (2.105) или передаточной функцией (2.103), может быть представлена в виде структурной схемы, состоящей только из интеграторов, сумматоров и блоков умножения сигналов на постоянный коэффициент (рисунок 2.9).

Простейшим элементом аналоговой модели является потенциометр (рисунок 2.10, а), умножающий входное напряжение u_x на постоянный коэффициент α :

$$u_y = \alpha u_x, \quad (2.127)$$

где $\alpha = r_2 / r_1 = 0...1$.

Основным элементом при аналоговом моделировании является *операционный (решающий) усилитель* — электронный усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления ($k = 10^4...10^6$), охваченный отрицательной обратной связью. Характер математических операций, выполняемых таким усилителем, зависит от операторных сопротивлений $Z_{bx}(s)$ и $Z_{oc}(s)$, включенных на входе и в обратную связь усилителя. Передаточная функция операционного усилителя, связывающая входное и выходное напряжения, равна

$$W(s) = u_y(s) / u_x(s) = -Z_{oc}(s) / Z_{bx}(s), \quad (2.128)$$

где знак «минус» указывает, что одновременно с математическим преобразованием входного сигнала усилитель меняет его полярность на противоположную.

Так, если на входе и в обратную связь включены активные сопротивления R_1 и R_2 (рисунок 2.10, б), то операционный усилитель выполняет функции *масштабного блока* — умножает входной сигнал на постоянный коэффициент

$$k_{bx} = -r_2 / r_1, \quad (2.129)$$

который можно изменять в широких пределах.

В частном случае, когда $r_1 = r_2$ и $k_{bx} = -1$, масштабный усилитель используется как *инвертор* — только для изменения полярности входного сигнала.

Если на входе стоит резистор R_1 , а обратная связь образована емкостью C с операторным сопротивлением $Z_{oc}(s) = 1/sC$ (рисунок 2.10, д), то операторный усилитель является *интегратором* с передаточной функцией

$$W(s) = Z_{oc}(s) / Z_{bx}(s) = -(1/sC) / R_1 = -1/R_1 s C. \quad (2.130)$$

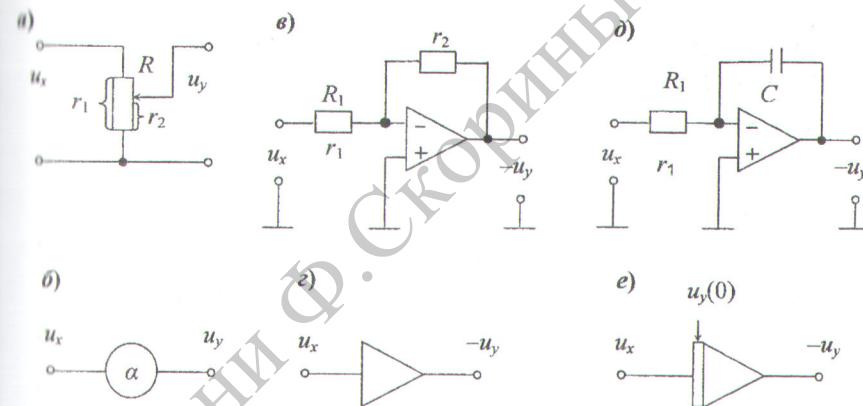


Рисунок 2.10 – Операционные элементы аналоговых моделей:
потенциометр (а); операционный усилитель (б);
операционный усилитель интегрирующий (д);
соответствующие условные обозначения элементов (в, г, е)

Цифровое моделирование непрерывных систем основано на дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.105) — приближенной замене их разностными уравнениями, связывающими между собой дискретные значения $x(t_i) = x(i\Delta t)$ и $y(t_i) = y(i\Delta t)$ входного и выходного сигналов $x(t)$ и $y(t)$. При этом непрерывная независимая переменная $0 < t < \infty$ заменяется дискретной переменной $t_i = 0; 1\Delta t; 2\Delta t; \dots; i\Delta t; \dots; \infty$. Переход к дискретным значениям сигнала $x(t)$ и дискретному времени может быть осуществлен с помощью идеального ключа (рисунок 2.11, а), который через равные интервалы времени Δt на короткое мгновение замыкается и выдает дискретные значения $x_i = x(i\Delta t)$ и $y_i = y(i\Delta t) = kx_i$ (рисунок 2.11, б). В разностных уравнениях вместо обычных дифференциалов dy и dx , используемых в обыкновенных дифференциальных уравнениях, применяют разности:

$$dy(t) \approx \Delta y(t_i) = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y_i - y_{i-1}, \quad (2.131)$$

$$dx(t) \approx \Delta x(t_i) = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x_i - x_{i-1}, \quad (2.132)$$

а вместо производных по времени — отношение конечных приращений (2.131) и (2.132) к шагу дискретизации по времени Δt . Поэтому элементарным операциям непрерывного дифференцирования

$$y(t) = dx(t)/dt \quad (2.133)$$

и интегрирования

$$dy(t) = x(t)dt \quad (2.134)$$

в дискретной форме будут соответствовать разностные уравнения

$$y_i = (x_i - x_{i-1})/\Delta t, \quad (2.135)$$

$$y_i = y_{i-1} + x_i \Delta t. \quad (2.136)$$

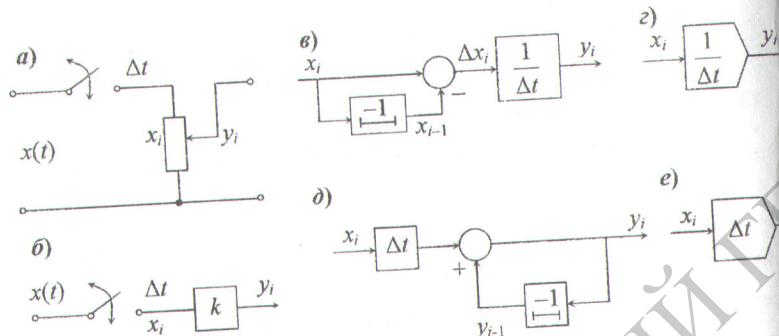


Рисунок 2.11 — Операционные элементы цифровых моделей

На схемах цифрового моделирования уравнения дискретного дифференцирования (2.135) и интегрирования (2.136) изображают в виде полных схем вычислений (рисунок 2.11, б, д) или в условном виде (рисунок 2.11, е, е').

Как видим, для цифрового моделирования операции дифференцирования или интегрирования требуется выполнение лишь арифметических операций суммирования, умножения на постоянный коэффициент и запоминания предыдущего значения сигнала на один шаг Δt , которые легко программируются. Процедура запоминания или задержки дискретных зна-

чений реализуется при программировании вычислений с помощью *опператора присваивания*

$$y_i := y_{i-1}, \quad (2.137)$$

согласно которому в ячейке памяти происходит пошаговая замена предыдущего значения на последующее.

Формула (2.136) и схема на рисунке 2.11, д соответствуют алгоритму приближенного численного интегрирования непрерывного сигнала $x(t)$, представленного своими дискретными значениями $x(t_i) = x_i$, по наиболее простому методу — методу Эйлера (вариант обратной разности или прямоугольников с упреждением). Поскольку в этом алгоритме каждое последующее значение выражается через предыдущее, он называется *рекуррентным*.

Приближенное решение исходных дифференциальных уравнений с помощью их цифровых моделей дает удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда шаг интегрирования Δt достаточно мал по сравнению с постоянными времени исследуемой системы и темпом изменения сигналов $x(t)$ и $y(t)$ во времени.

Например, для дифференциального уравнения первого порядка с постоянной времени $T = a_0/a_x$ шаг интегрирования рекомендуется принимать равным

$$\Delta t \leq (0,1 \div 0,2)T. \quad (2.138)$$

2.10 Правила преобразования алгоритмических схем и сигнальных графов

Для оценки точности, устойчивости и качества управления замкнутых систем необходимо знать их уравнения статики и динамики. Уравнение динамики замкнутой системы можно получить на основе совокупности уравнений отдельных элементов, образующих систему, путем последовательного исключения промежуточных переменных. Наиболее удобным для решения этой задачи объединения математических моделей элементов является *метод структурных преобразований*, согласно которому по структуре системы с помощью нескольких простых правил находят ее общую (эквивалентную) передаточную функцию, а затем — соответствующее уравнение динамики.

Информация о структуре системы и передаточных свойствах ее элементов может быть задана в виде обычной алгоритмической схемы или в виде сигнального графа.

Сигнальный граф системы управления представляет собой ориентированный граф — совокупность дуг, изображающих отдельные звенья и указывающих направление передачи сигнала, и вершин, соответствующих входным и выходным сигналам звеньев. Отдельному звену алгоритмической схемы, изображаемому прямоугольником, на сигнальном графике системы соответствует стрелка, соединяющая вершины x и y (рисунок 2.12, а). Около стрелки указывается передаточная функция звена. Соответствие между изображениями типовых соединений двух элементов на алгоритмических схемах и сигнальных графах показано на рисунке 2.12, б, в, г. Если к вершине подходят несколько дуг, то соответствующий ей сигнал равен сумме всех выходных сигналов этих дуг. Если из вершины исходят несколько дуг, то входные сигналы всех дуг одинаковы и равны сигналу данной вершины. При необходимости изображения отдельного сигнала одной

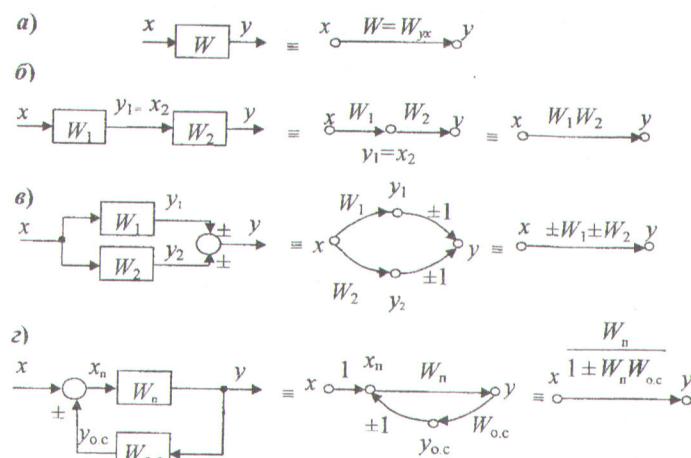
из суммируемых дуг вводят дополнительную дугу с $W(s)$ (графы на рисунке 2.12, в и г).

Знак, с которым сигнал вводится на алгоритмической схеме в сумматор, на сигнальном графике учитывается вместе с передаточной функцией дуги, вследствие чего сигналы всех дуг, подходящих к вершине, складываются со знаком плюс.

Граф системы управления строят по ее алгоритмической схеме, заменяя каждое звено (прямоугольник) дугой, а каждый сумматор (кружок) — вершиной (кружком меньшего диаметра).

При этом узлы разветвления сигналов, используемые на алгоритмических схемах, на графах оказываются совмещеными с вершинами.

Для упрощения (свертывания) сложных алгоритмических схем и сигнальных графов применяют три главных правила преобразования, с помощью которых определяют эквивалентные передаточные функции типовых соединений звеньев: (2.78), (2.83), (2.84).



Алгоритмические схемы

Сигнальные графы

Рисунок 2.12 — Алгоритмические схемы и сигнальные графы

С помощью этих правил удается преобразовать любую исходную алго-

ритмическую схему, не содержащую перекрестных связей, к одноконтурной схеме (рисунок 2.13, а).

Алгоритмическую схему замкнутой системы управления (и саму систему) называют *одноконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке образуется цепь, не содержащая параллельных соединений и обратных связей. Цепь, полученная при размыкании замкнутой системы (рисунок 2.13, а) между точками А и В, не содержит параллельных соединений и обратных связей.

Получаемая при размыкании одноконтурной системы цепь последовательно соединенных элементов, стоявших внутри замкнутого контура, называется *разомкнутым контуром системы* (рисунок 2.13, б).

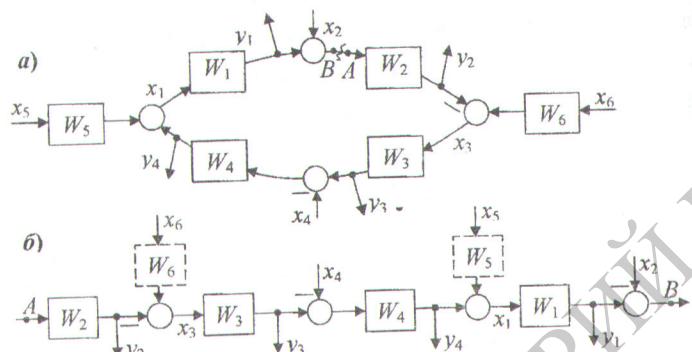


Рисунок 2.13 — Алгоритмические схемы замкнутой одноконтурной системы (а) и ее разомкнутого контура (б)

В соответствии с этим определением *передаточная функция разомкнутого контура* $W_{pk}(s)$ одноконтурной системы равна произведению передаточных функций всех элементов, стоящих внутри контура системы. Передаточные функции элементов, стоящих вне замкнутого контура, никогда не входят в произведение $W_{pk}(s)$. Например, для системы на рисунке 2.13, а

$$W_{pk}(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s) W_4(s). \quad (2.139)$$

Передаточные функции $W_5(s)$ и $W_6(s)$ не входят в произведение (2.139), так как эти элементы стоят вне замкнутого контура.

Передаточная функция разомкнутого контура является одной из важнейших характеристик замкнутой системы управления. От нее зависят устойчивость и показатели качества процесса управления. Она обязательно входит в выражение передаточной функции замкнутой системы.

В общем случае на замкнутую систему управления могут влиять несколько внешних воздействий (задающих и возмущающих), а при анализе и оценке ее свойств часто возникает необходимость рассматривать несколько выходных переменных. Например, если в системе (рисунок 2.13, а) четыре внешних воздействия (x_5, x_2, x_6, x_4) и четыре выходных переменных (y_1, y_2, y_3, y_4), для каждой пары «вход–выход» замкнутой системы может быть записана своя передаточная функция по следующему правилу:

Передаточная функция $\Phi_{lk}(s)$ одноконтурной системы между k -м входом x_k и l -м выходом y_l равна передаточной функции прямой цепи $W_{lk}(s)$, деленной на единицу плюс передаточная функция разомкнутого контура, т.е.

$$\Phi_{lk}(s) = y_l(s)/x_k(s) = W_{lk}(s)/(1 + W_{pk}(s)), \quad (2.140)$$

при этом предполагается, что обратная связь в системе отрицательная. Знак обратной связи в одноконтурной системе устанавливают с учетом всех перемен знака, происходящих в сумматорах при прохождении сигнала по разомкнутому контуру.

Например, для системы на рисунке 2.12, а передаточная функция по каналу x_5 – y_3 равна

$$\Phi_{35}(s) = \frac{y_3(s)}{x_5(s)} = \frac{-W_5(s)W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_{pk}(s)}, \quad (2.141)$$

где $W_{pk}(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s) W_4(s)$.

При записи (2.141) учтено, что в схеме на рисунке 2.13, а знак сигнала внутри контура изменяется только один раз (в сумматоре после звена W_2).

т. е. обратная связь отрицательная. Эта перемена знака происходит в прямой цепи и учтена в числите (2.141) знаком «минус».

Передаточная функция по любому из каналов $x_k - y_i$ записывается по правилу (2.140) независимо от остальных каналов — в предположении, что остальные входные воздействия равны нулю.

Если исходная алгоритмическая схема многоконтурная и содержит **перекрестные связи** (рисунок 2.14, а), то для ее свертывания к одноконтурной приходится применять, кроме трех главных правил (2.78), (2.83), (2.84), вспомогательные правила структурных преобразований (таблица 2.4).

Действительно, ни для одного из трех типовых соединений, содержащих по три элемента ($W_1 - W_2 - W_4$, $W_2 - W_3 - W_5$, $W_1 - W_2 - W_6$), образующих схему на рисунке 2.14, а, нельзя сразу применить главные правила, так как начало или конец одного соединения оказались бы при этом внутри другого соединения. Поэтому приходится эти перекрещивающиеся контуры предварительно «развязывать» — устранять перекрестность различными путями.

Так, пользуясь вспомогательным правилом № 3 (таблица 2.4), можно перенести узел разветвления с входа на выход звена W_3 , добавив одновременно перед звеном W_6 обратную функцию W_3^{-1} . С помощью правила № 5 можно сумматор перенести на выход звена W_2 , включив последовательно с W_5 звено W_2 , а затем по правилу № 2 поменять местами сумматоры A и B . В итоге получится схема без перекрестных связей (рисунок 2.14, б), которую легко свернуть по главным правилам. Передаточные функции двух внутренних соединений данной схемы:

$$W_{1,2,4}(s) = W_1(s) W_2(s) - W_4(s); \quad (2.142)$$

$$W_{3,2,5}(s) = W_3(s)(1 - W_3(s)W_5(s)W_2(s)). \quad (2.143)$$

Теперь схему можно рассматривать как одноконтурную с передаточной функцией замкнутого контура

$$W_{p,k}(s) = W_{1,2,4}(s) W_{3,2,5}(s) W_6(s)/W_3(s) \quad (2.144)$$

Передаточная функция замкнутой системы (рисунок 2.14, б) по каналу $x - y$ согласно правилу (2.140) равна

$$\Phi_{yx}(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{W_{1,2,4}(s)W_{3,2,5}(s)}{1 + W_{p,k}(s)} \quad (2.145)$$

или с учетом выражений (2.142), (2.143), (2.144)

$$\Phi_{yx} = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s) - W_3(s)W_4(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_6(s) - W_2(s)W_3(s)W_5(s) - W_4(s)W_6(s)}. \quad (2.146)$$

Таблица 2.4 — Вспомогательные правила структурных преобразований

Операция	Исходная схема	Преобразованная схема
1 Перестановка узлов разветвления		
2 Перестановка сумматоров		
3 Перенос узла разветвления через звено вперед		
4 Перенос узла разветвления через звено назад		
5 Перенос сумматора через звено вперед		
6 Перенос сумматора через звено назад		

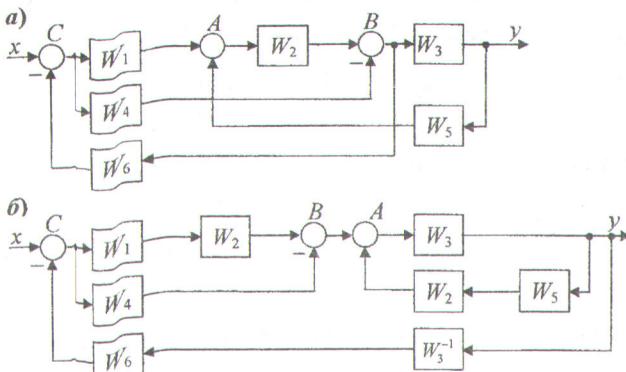


Рисунок 2.14 — Пример структурных преобразований алгоритмической схемы

Для многоконтурных схем, более сложных, чем рассмотренная, процедуры предварительных переносов и последовательного свертывания оказываются достаточно трудоемкими. Поэтому для таких схем целесообразно использовать формулу Мейсона

$$\Phi_{ik}(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{i=1}^m W_{ik(i)}(s) \Delta_i(s), \quad (2.147)$$

где $W_{ik(i)}(s)$ — передаточная функция i -го прямого канала, связывающего вход x_k с выходом y_i , m — число таких каналов; $\Delta(s)$ — специальный полином, который определенным образом характеризует совокупность всех замкнутых цепей системы, содержащих обратные связи, и вычисляется как сумма передаточных функций разомкнутых контуров этих цепей и произведений передаточных функций разомкнутых контуров пар и троек несоприкасающихся друг с другом цепей с обратными связями:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i W_i(s) + \sum_{i,j} W_i(s)W_j(s) - \sum_{i,j,r} W_i(s)W_j(s)W_r(s) + \dots \quad (2.148)$$

Полином $\Delta(s)$ составляется по правилу, аналогичному (2.148), но только для цепей с обратными связями, не соприкасающихся с 1-м прямым

каналом. Знаки всех сигналов прямых каналов и обратных связей учитываются в формулах (2.147) и (2.148) перед соответствующими передаточными функциями.

Формула Мейсона особенно удобна для применения, когда структура системы представлена в виде сигнального графа. Проиллюстрируем использование формулы на примере системы, алгоритмическая схема которой приведена на рисунке 2.14, а.

Соответствующий ей сигнальный граф показан на рисунке 2.15, а, причем знаки сигналов перед сумматорами C и B учтены на граве вместе с передаточными функциями W_6 и W_4 . Для наглядности на рисунке 2.15, б, в отдельно изображены графы двух прямых каналов и трех замкнутых цепей. Это дает возможность, пользуясь формулой Мейсона, получить сразу в окончательном виде передаточную функцию по каналу $x-y$, которая полностью совпадает с передаточной функцией (2.146), полученной с помощью предварительных переносов и последовательным свертыванием. Так как все контуры в данном примере соприкасаются (имеют общие ветви или вершины), то парные произведения и триады в формуле отсутствуют. Нет также в сигнальном графе (рисунок 2.15, а) контуров, не соприкасающихся с прямыми каналами, поэтому $\Delta_1(s) = 1$ и $\Delta_2(s) = 1$.

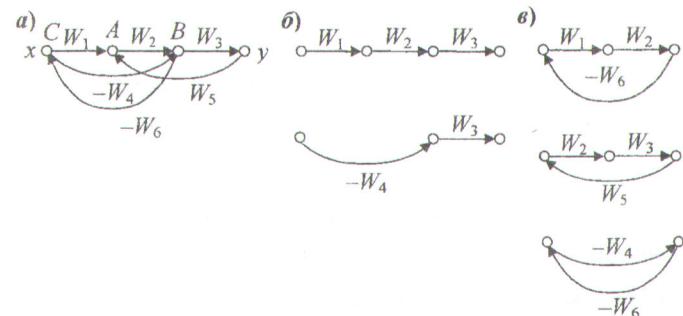


Рисунок 2.15 — Сигнальный граф системы (а) и образующие его прямые каналы (б) и замкнутые контуры (в)

После определения передаточных функций между всеми m входами x_k и одним из выходов y_ℓ можно на основании принципа суперпозиции записать уравнение динамики замкнутой системы для рассматриваемого выхода y_ℓ :

$$y_\ell(s) = \sum_{k=1}^m x_k(s) \Phi_{\ell k}(s). \quad (2.149)$$

Так как у одноконтурной системы знаменатели всех передаточных функций $\Phi_{\ell k}(s)$ одинаковы, то уравнение (2.149) для нее можно записать в таком виде

$$y_\ell(s)[1 + W_{p,k}(s)] = \sum_{k=1}^m x_k(s) W_{\ell k}(s), \quad (2.150)$$

где $W_{p,k}(s)$ — передаточная функция разомкнутого контура.

Выражение в квадратных скобках в левой части уравнения (2.150) представляет собой *собственный оператор* системы. Если приравнять его к нулю, то получим *характеристическое уравнение одноконтурной системы* в обобщенном виде:

$$1 + W_{p,k}(s) = 0. \quad (2.151)$$

Выражению (2.151) соответствует следующее правило: *характеристическое уравнение замкнутой одноконтурной системы представляет собой приравненную к нулю сумму единицы и передаточной функции разомкнутого контура, если эта функция — полином*.

Если передаточная функция разомкнутого контура предварительно записана в виде отношения полиномов $K(s)$ и $D(s)$, то характеристическое уравнение одноконтурной системы будет иметь вид

$$D(s) + K(s) = 0. \quad (2.152)$$

Для многоконтурных систем характеристическое уравнение получается приравниванием к нулю полинома (2.148). Например, для системы на рисунке 2.14, а характеристическое уравнение

$$\Delta(s) = 1 + W_1(s)W_2(s)W_6(s) - W_2(s)W_3(s)W_5(s) - W_4(s)W_6(s) = 0. \quad (2.153)$$

Контрольные задания и вопросы:

1 В чем заключается свойство односторонности передачи воздействий отдельным элементом (например, электрическим четырехполюсником)?

2 Какие типовые воздействия используются при изучении динамики элементов и систем?

3 Поясните понятия переходного и установившегося режима на графике процесса $y(t)$, возникшего на выходе статического элемента после ступенчатого воздействия на его вход.

4 Как классифицируются элементы систем управления по виду статических характеристик?

5 Как из дифференциального уравнения элемента получить его уравнение статики? Найдите из дифференциального уравнения общего вида (2.24) выражение для передаточного коэффициента.

6 Как получить в общем случае переходную функцию $h(t)$ из дифференциального уравнения?

7 Как связаны друг с другом переходная и весовая функции?

8 Как из дифференциального уравнения элемента получить его передаточную функцию?

9 Продемонстрируйте на простейшем электрическом четырехполюснике типа RC или RL методику получения передаточной функции, основанную на понятии операторного сопротивления.

10 Как из передаточной функции получить выражение для АФХ?

11 Постройте график $W(j\omega)$ произвольного вида и укажите на нем величины $A(\omega)$ и $\phi(\omega)$.

12 По каким правилам определяются эквивалентные передаточные коэффициенты для последовательного, параллельного и встречнопараллельного соединения линейных элементов? Запишите соответствующие формулы эквивалентных коэффициентов для случая двух соединенных элементов.

3 Типовые динамические звенья и характеристики точности систем управления

3.1 Классификация звеньев

Функциональные элементы, используемые в автоматических системах, могут иметь самые различные конструктивное выполнение и принципы действия. Однако общность математических выражений, связывающих входные и выходные величины различных функциональных элементов, позволяет выделить ограниченное число так называемых типовых алгоритмических звеньев. Каждому типовому алгоритмическому звену соответствует определенное математическое соотношение между входной и выходной величинами. Если это соотношение является элементарным (например, дифференцирование, умножение на постоянный коэффициент), то и звено называется *элементарным*.

Алгоритмические звенья, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядка, получили название *типовых динамических звеньев*. Это понятие и связанные с ним приемы анализа автоматических систем были предложены в 1938 г. А. В. Михайловым. В дальнейшем методика анализа, основанная на расчленении автоматической системы на типовые звенья, широко вошла в практику инженерных расчетов и в настоящее время является доминирующей.

Типовые динамические звенья являются основными составными частями алгоритмических структур непрерывных линейных систем управления, поэтому знание их характеристик существенно облегчает анализ таких систем.

Классификацию типовых звеньев удобно осуществлять, рассматривая различные частные формы дифференциального уравнения

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t). \quad (3.1)$$

Значения коэффициентов уравнения (3.1) и названия для наиболее часто встречающихся звеньев приведены в таблице 3.1.

Отметим ряд общих закономерностей. Звенья, у которых коэффициенты $a_2 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, обладают статизмом, т.е. однозначной связью между входной и выходной переменными в статическом режиме. Поэтому к их названиям часто добавляют выражение *статическое* или *позиционное*. К этим звеньям относятся № 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12. Звенья, у которых $b_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, обладают *инерционностью (замедлением)*. К ним относятся звенья № 2, 3, 4. У звеньев № 1, 5 и 7 только два коэффициента не равны нулю. Они являются простейшими или элементарными. Все остальные типовые звенья могут быть образованы из элементарных путем последовательного, параллельного и встречно-параллельного соединения.

Таблица 3.1 — Значения коэффициентов уравнения типовых звеньев

	Наименование звена	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	Примечания
1	Безинерционное (пропорциональное)	0	0	1	0	k	
2	Инерционное 1-го порядка (апериодическое)	0	T	1	0	k	
3	Инерционное 2-го порядка (апериодическое)	T^2_2	T_1	1	0	k	$T_1 \geq 2T_2$
4	Инерционное 2-го порядка (колебательное)	T^2_2	T_1	1	0	k	$T_1 < 2T_2$
5	Идеальное интегрирующее	0	1	0	0	k	
6	Реальное интегрирующее	T	1	0	0	k	
7	Идеальное дифференцирующее	0	0	1	k	0	
8	Реальное дифференцирующее	0	T	1	k	0	
9	Изодромное (пропорционально-интегрирующее)	0	1	0	k_1	k	
10	Форсирующее (пропорционально-дифференцирующее)	0	0	1	k_1	k	

Продолжение таблицы 3.1

Наименование звена	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	Примечания
11 Интегро-дифференцирующее с преобладанием интегрирующих свойств	0	T	1	k_1	k	$\frac{k_1}{k} < T$
12 Интегро-дифференцирующее с преобладанием дифференцирующих свойств	0	T	1	k_1	k	$\frac{k_1}{k} > T$

Если один из коэффициентов левой части уравнения (3.1) отрицательный, то звено будет неустойчивым и неминимально-фазовым (пример в 3.3).

3.2 Безынерционное звено

Безынерционное звено является простейшим среди всех типовых звеньев. Оно передает сигнал со входа на выход мгновенно, без искажений его формы. В звене может происходить только усиление или ослабление мгновенных значений входной величины. Связь между мгновенными значениями входной величины $x(t)$ и выходной величины $y(t)$ описывается алгебраическим уравнением

$$y(t) = kx(t). \quad (3.2)$$

Передаточные свойства звена определяются одним параметром — передаточным коэффициентом k . При единичном ступенчатом воздействии $x(t) = 1(t)$, приложенном в момент $t = 0$, выходная величина мгновенно изменяется и принимает значение k (рисунок 3.1, а). Переходная функция звена имеет вид

$$h(t) = k1(t), \quad (3.3)$$

а импульсная переходная (рисунок 3.1, б)

$$w(t) = k\delta(t). \quad (3.4)$$

Уравнение звена в операционной форме

$$Y(s) = kX(s), \quad (3.5)$$

отсюда передаточная функция

$$W(s) = Y(s)/X(s) = k. \quad (3.6)$$

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) звена описывается функцией

$$W(j\omega) = k, \quad (3.7)$$

которой на комплексной плоскости соответствует одна точка на действительной оси (рисунок 3.1, е). Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) представляет собой прямую, параллельную оси частот (рисунок 3.1, в)

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k. \quad (3.8)$$

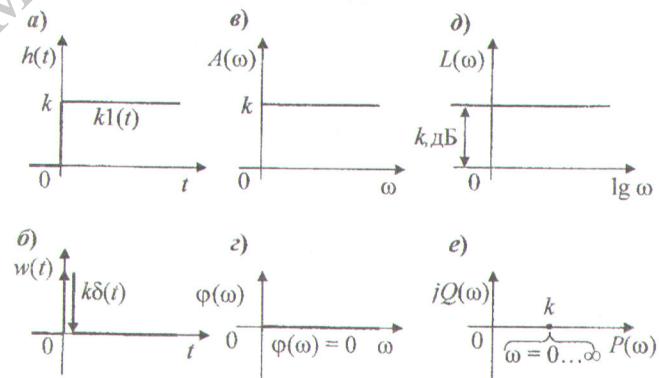


Рисунок 3.1 — Характеристика безынерционного звена

Это означает, что *сигналы любой частоты (от нуля до бесконечности) проходят через безынерционное звено с одинаковым отношением амплитуд выходной и входной величин, равным k .*

Выражение для фазовой частотной характеристики (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg(0/k) = 0 \quad (3.9)$$

показывает, что безынерционное звено не создает фазовых сдвигов между

входной и выходной величинами (рисунок 3.1, г). Это и оправдывает название звена.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) безынерционного звена

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k \quad (3.10)$$

также, как и его АЧХ, является прямой линией, параллельной оси абсцисс (рисунок 3.1, д).

На алгоритмических схемах безынерционное звено изображают в виде прямоугольника, внутри которого указывают буквенное обозначение или числовое значение передаточного коэффициента k (рисунок 3.2, а).

Аналоговой моделью безынерционного звена служит операционный усилитель (рисунок 3.2, б), используемый в режиме масштабного усиления с коэффициентом $k = \alpha k_{\text{ex}}$. При цифровом моделировании безынерционному звено соответствует блок умножения дискретных значений входного сигнала x_i на постоянный коэффициент k (рисунок 3.2, в).

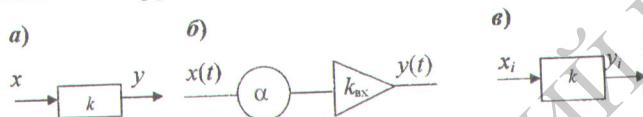


Рисунок 3.2 — Примеры безынерционного звена

Следует отметить, что понятие безынерционного звена является продуктом математической идеализации. На самом деле все реальные конструктивные элементы автоматических систем обладают некоторой инерционностью, так как передача энергии со входа на выход элемента не может осуществляться мгновенно. Однако, если инерционность того или иного элемента на два—три порядка меньше, чем у остальных элементов рассматриваемой системы, то его считают безынерционным звеном. Так, например, при описании и анализе системы управления тепловым объектом

инерционность которого характеризуется, как правило, постоянной времени от нескольких десятков до тысяч секунд, датчик температуры (термопару, термосопротивление) можно рассматривать как безынерционное звено.

3.3 Инерционные звенья первого порядка

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (3.11)$$

где k — передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статическом режиме; T — постоянная времени, характеризующая инерционность звена.

Переходную функцию звена можно найти как сумму общего и частного решений уравнения (3.11):

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})I(t). \quad (3.12)$$

Применяя методы аналитической геометрии, нетрудно убедиться в том, что касательная к кривой $h(t)$ (рисунок 3.3, а) в точке $t = 0$ отсекает на горизонтальной прямой $h = k$ отрезок, равный постоянной времени T .

Переходная функция при $t = T$ равна $0,632k$, а при $t = 3T$ достигает значения $0,95 k$. В приближенных расчетах обычно считают, что при $t = 3T$ переходный процесс практически закончился.

Импульсная переходная функция звена может быть получена, как известно, путем дифференцирования функции $h(t)$. Для инерционного звена первого порядка импульсная функция имеет вид (рисунок 3.3, б).

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} I(t). \quad (3.13)$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (3.11) преобразование Лапласа, получим уравнение динамики звена в операционной форме

$$(Ts + 1)Y(s) = kX(s). \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.14) находим передаточную функцию звена

$$W(s) = Y(s)/X(s) = k/(Ts + 1). \quad (3.15)$$

Подставляя в передаточную функцию $s = j\omega$, получим амплитудно-фазовую функцию

$$W(j\omega) = k/(Tj\omega + 1). \quad (3.16)$$

Умножая числитель и знаменатель функции (3.16) на выражение $(1 - jT\omega)$, сопряженное со знаменателем, можно избавиться от величины j в знаменателе и представить амплитудно-фазовую функцию в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \operatorname{Re} W(j\omega) = k/(1 + T^2\omega^2); \\ Q(\omega) &= \operatorname{Im} W(j\omega) = -kT\omega/(1 + T^2\omega^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

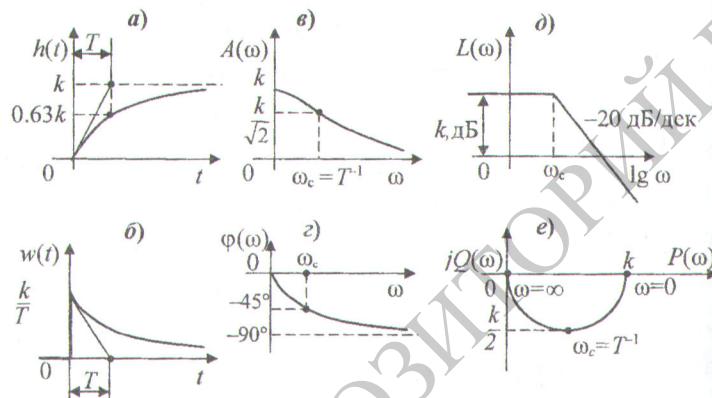


Рисунок 3.3 — Характеристики инерционного звена первого порядка

Выражения (3.18) можно рассматривать как уравнение АФХ $W(j\omega)$, заданное в параметрической форме в системе координат $P(\omega)$ и $jQ(\omega)$. Роль

третьей переменной (параметра) играет частота ω . Если выразить мнимую составляющую $Q(\omega)$ через действительную $P(\omega)$, то можно убедиться, что амплитудно-фазовая характеристика представляет собой полуокружность с центром в точке $(k/2; jQ)$ и диаметром, равным k (рисунок 3.3, е).

Распределение точек, соответствующих различным значениям ω вдоль кривой $W(j\omega)$, зависит от величины постоянной времени T . На графике показаны характерные точки $\omega = 0$, $\omega = \infty$ и $\omega = T^{-1}$.

Выражение для АЧХ можно получить по формулам (2.59) или (2.61). Для рассматриваемого звена проще использовать формулу (2.61):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |k| / |Tj\omega + 1| = k / \sqrt{1 + T^2\omega^2}. \quad (3.19)$$

Из графика функции $A(\omega)$ (рисунок 3.3, б), видно, что гармонические сигналы низкой частоты ($\omega < \omega_c$) пропускаются звеном хорошо — с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к передаточному коэффициенту k . Сигналы высокой частоты ($\omega > \omega_c$) плохо пропускаются звеном: отношение амплитуд существенно меньше коэффициента k . Чем больше постоянная времени T , т.е. чем больше инерционность звена, тем меньше АЧХ вытянута вдоль оси частот (уже полоса пропускания). Таким образом, инерционное звено первого порядка по своим частотным свойствам является фильтром низких частот. В практических расчетах ширину полосы пропускания ω_n звеньев и систем определяют по ординате $A(\omega_n) = (0,05 \dots 0,10) k$. Для инерционного звена первого порядка $\omega_n = (20 \dots 10) \omega_c$.

ФЧХ инерционного звена первого порядка согласно формуле (2.60) равна

$$\varphi(\omega) = \arctg [Q(\omega)/P(\omega)] = -\arctg \omega T. \quad (3.20)$$

График функции (3.20) показан на рисунке 3.3, г. Чем больше частота одиночного сигнала, тем больше отставание по фазе выходной величины от входной. Максимально возможное отставание равно 90° . При частоте

$\omega_c = 1/T$ сдвиг фаз равен -45° .

Рассматриваемое звено является *минимально-фазовым*. Фазовый сдвиг, создаваемый этим звеном, меньше, чем у любого другого звена с такой же амплитудной характеристикой. Например, у неустойчивого инерционного звена первого порядка

$$W(j\omega) = k/(Tj\omega - 1) \quad (3.21)$$

АЧХ не отличается от характеристики (3.19), а фазовая, согласно формуле (2.62), равна

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega T. \quad (3.22)$$

При изменении частоты ω от 0 до ∞ фазовый сдвиг (3.22) изменяется от -180° до -90° .

Рассмотрим теперь ЛАЧХ звена. Точная ЛАЧХ описывается выражением

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}. \quad (3.23)$$

В практических расчетах используют приближенную или асимптотическую характеристику $L(\omega)$, представляющую собой ломаную в виде двух асимптот (рисунок 3.3, δ). Первая асимптота (низкочастотная) получается при малых частотах, когда величиной $T^2 \omega^2$ в выражении (3.23) можно пренебречь и принять, что

$$L(\omega) \approx L_{n.c}(\omega) = 20 \lg k. \quad (3.24)$$

Низкочастотная асимптота от частоты не зависит и представляет собой прямую, параллельную оси частот и отстоящую от нее на расстоянии $20 \lg k$.

Вторая асимптота (высокочастотная) заменяет точную характеристику при больших частотах, когда $T^2 \omega^2 \gg 1$, и единицу под корнем в формуле (3.23) можно не учитывать. Выражение для этой асимптоты имеет вид

$$L(\omega) \approx L_{v.c}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega. \quad (3.25)$$

Эта асимптота зависит от частоты. В логарифмической системе координат она представляет собой прямую, имеющую отрицательный наклон и про-

ходящую через точку с координатами $\omega = T^{-1}$, $L(\omega) = 20 \lg k$.

Подставляя в формулу (3.25) два значения частоты ω_1 и $\omega_2 = 10\omega_1$, можно убедиться, что приращение высокочастотной асимптоты, приходящееся на одну декаду, равно -20 дБ.

Значение *сопрягающей частоты* ω_c , при которой пересекаются обе асимптоты, найдем из условия $L_{n.c}(\omega_c) = L_{v.c}(\omega_c)$:

$$20 \lg k = 20 \lg k - 20 \lg T\omega_c \quad (3.26)$$

отсюда

$$\omega_c = 1/T. \quad (3.27)$$

Можно показать, что наибольшая ошибка, получающаяся от приближенной замены точной характеристики (3.24) двумя асимптотами, равна 3 дБ (при частоте ω_c). На алгоритмических схемах инерционное звено первого порядка представляют либо в виде модели «вход-выход» (рисунок 3.4, a), либо в виде модели в переменных состояния (рисунок 3.4, b).

При аналоговом моделировании рассматриваемое звено реализуют при помощи схемы набора (рисунок 3.4, c). Коэффициенты аналоговой модели (при единичном масштабе времени) равны:

$$\alpha_1 = k/T, \alpha_2 = 1/T. \quad (3.28)$$

Цифровая модель звена может быть реализована в виде блок-схемы (рисунок 3.4, e), соответствующей модели в переменных состояния (рисунок 3.4, b) и содержащей цифровой интегратор (см. 2.9) с шагом интегрирования Δt .

Для обеспечения удовлетворительной точности моделирования отдельно-го инерционного звена шаг интегрирования должен быть

$$\Delta t \leq (0,1 \dots 0,2)T. \quad (3.29)$$

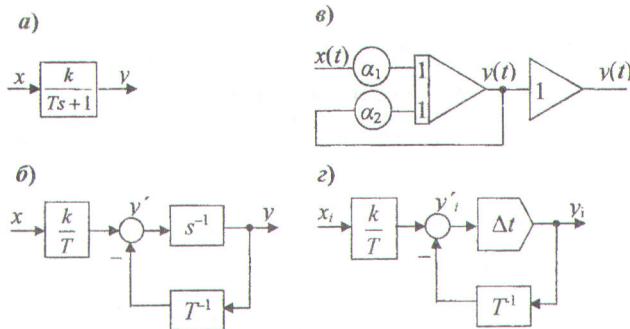


Рисунок 3.4 — Модели инерционного звена первого порядка

Инерционными звеньями первого порядка являются конструктивные элементы, которые могут накапливать и передавать энергию или вещества. В электрических элементах накопителем энергии электрического поля служит конденсатор, а магнитного поля — индуктивность.

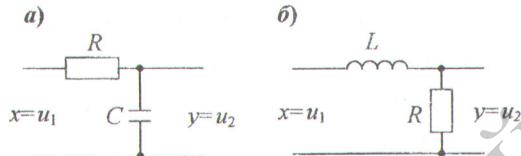


Рисунок 3.5 — Инерционные звенья первого порядка

Простейшим примером такого элемента является электрический пассивный четырехполюсник (рисунок 3.5, a), состоящий из резистора сопротивлением R (Ом) и конденсатора емкостью C (Ф). Выходная величина четырехполюсника (напряжение u_2) после подачи на его вход постоянного напряжения u_1 изменяется пропорционально величине накапливаемого в емкости заряда. В первые моменты времени заряд растет быстро (рисунок 3.3, a), а затем, по мере приближения напряжения u_2 на обкладках конденсатора к входному напряжению u_1 ток заряда становится все меньше, и скорость возрастания напряжения u_2 постепенно падает до нуля.

Параметры передаточной функции (3.15) применительно к рассматриваемому четырехполюснику равны: $k = 1$; $T = RC$ (с).

Свойствами инерционного звена первого порядка обладают также электрические элементы с индуктивностью L (Гн), у которых выходной сигнал пропорционален току через индуктивность. Простейшим примером такого элемента является цепь, изображенная на рисунке, 3.5, б. Передаточный коэффициент цепи $k = 1$, а постоянная времени $T = L/R$ (с).

В механических элементах потенциальная энергия накапливается в пружинах и других упругих элементах, а кинетическая — в движущихся массах.

3.4 Инерционные звенья второго порядка

Дифференциальному уравнению звена

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t) \quad (3.30)$$

соответствует уравнение динамики в изображениях по Лапласу (или в операционной форме)

$$(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)Y(s) = kX(s) \quad (3.31)$$

и передаточная функция

$$W(s) = Y(s) / X(s) = k / (T_2^2 s^2 + T_1 s + 1). \quad (3.32)$$

Характеристическое уравнение звена

$$T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0 \quad (3.33)$$

имеет два корня

$$s_{1,2} = (-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}) / 2T_2^2 \quad (3.34)$$

Общее решение дифференциального уравнения, определяющее свободное движение звена, согласно выражению (2.37) имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}. \quad (3.35)$$

Характер переходного процесса звена зависит от вида корней (3.34), которые могут быть действительными или комплексными.

Если $T_1 > 2T_2$, то оба корня действительные. Обозначим их

$$s_1 = -1/T_3; s_2 = -1/T_4, \quad (3.36)$$

где T_3 и T_4 — некоторые условные постоянные времени, причем $T_3 > T_4$.

При $T_1 >> 2T_2$ переходная функция звена имеет монотонный, апериодический характер. Поэтому звено в данном случае называется *апериодическим звеном второго порядка*.

При $T_1 \geq 2T_2$ знаменатель передаточной функции (3.32) можно разложить на два множителя и представить функцию в следующих двух эквивалентных формах:

$$W(s) = k / (T_3 s + 1)(T_4 s + 1); \quad (3.37)$$

$$W(s) = \frac{T_3}{T_3 - T_4} \frac{k}{T_3 s + 1} - \frac{T_4}{T_4 - T_3} \frac{k}{T_4 s + 1}, \quad (3.38)$$

согласно которым инерционное звено второго порядка (рисунок 3.6, а) можно представить как последовательное (рисунок 3.6, б) или параллельное (рисунок 3.6, в) соединение двух инерционных звеньев первого порядка.

Если $T_1 < 2T_2$, то корни уравнения (3.33) комплексные

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \quad (3.39)$$

где

$$\alpha = T_1 / 2T_2^2; \beta = \sqrt{4T_2^2 - T_1^2} / 2T_2^2.$$

Решение (3.35) в этом случае содержит гармонические составляющие, звено называют *колебательным* (рисунок 3.6, г).

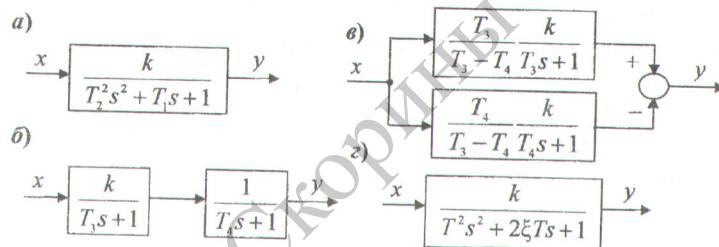


Рисунок 3.6 — Алгоритмические схемы инерционных звеньев второго порядка

При $T_1 = 0$ оба корня будут мнимыми, а переходная функция будет представлять собой незатухающую синусоиду. Инерционное звено второго порядка с $T_1 = 0$ называется *идеальным колебательным* или *консервативным*.

Наряду с общими признаками (статизм, инерционность) апериодическое и колебательное звенья имеют и существенные различия. Рассмотрим в отдельности характеристики этих звеньев.

Переходная функция *апериодического звена второго* порядка может быть получена сложением общего решения (3.35) с частным решением, соответствующим вынужденной составляющей при $x(t) = l(t)$.

Переходная функция имеет вид

$$h(t) = C_1 e^{-t/T_3} + C_2 e^{-t/T_4} + k l(t). \quad (3.40)$$

Подставляя начальные условия

$$h(0) = 0 \text{ и } h'(0) = 0 \quad (3.41)$$

в выражение (3.40), находим

$$C_1 = -k T_3 l(t)/(T_3 - T_4); C_2 = k T_4 l(t)/(T_3 - T_4). \quad (3.42)$$

Тогда переходная функция

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4} \right) l(t). \quad (3.43)$$

Временные характеристики $h(t)$ и $w(t)$ апериодического звена показаны на рисунке 3.7, *a*, *b*. В соответствии с представлением апериодического звена второго порядка в виде последовательного соединения двух инерционных звеньев первого порядка (рисунок 3.6, *б*) все его частотные характеристики (рисунок 3.7, *в...е*) могут быть получены по аналогичным характеристикам звеньев первого порядка, приведенным в 3.3, по правилам умножения комплексных (векторных) величин.

Апериодическое звено второго порядка также, как и звено первого порядка, хорошо пропускает сигналы низкой частоты и плохо — сигналы высокой частоты.

Дифференциальное уравнение колебательного звена записывают обычно в следующем виде:

$$T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (3.44)$$

где $T = T_2$ — постоянная времени, характеризующая инерционность звена, $\xi = T_1/2T_2$ — относительный коэффициент демпфирования, характеризующий колебательность звена ($0 \leq \xi \leq 1$). Передаточная функция колебательного звена

$$W(s) = Y(s)/X(s) = k/(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1). \quad (3.45)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения равны

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = -(\xi/T) \pm j\sqrt{1-\xi^2}/T, \quad (3.46)$$

где $\alpha = \xi/T$ — коэффициент затухания; $\beta = \sqrt{1-\xi^2}/T$ — угловая частота затухающих колебаний, рад/с.

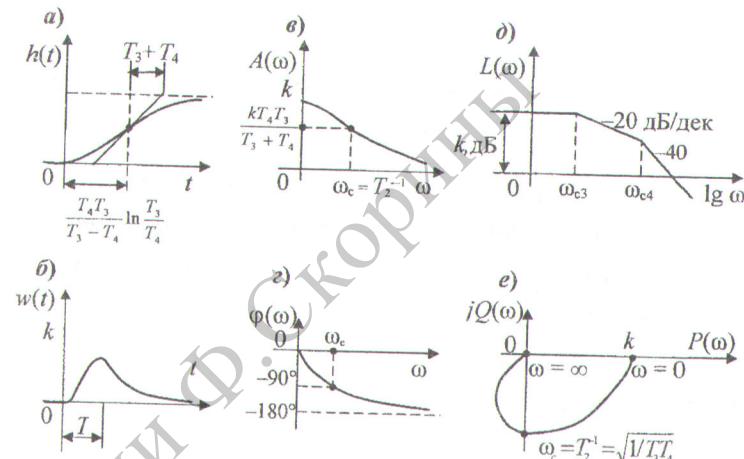


Рисунок 3.7 — Характеристики апериодического звена второго порядка

Подставляя в общее решение (3.35) значения комплексных корней (3.46) и складывая его с частным решением $k1(t)$ получим переходную функцию колебательного звена

$$h(t) = C_1 e^{(-\alpha + j\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha - j\beta)t} + k1(t). \quad (3.47)$$

С помощью формулы Эйлера (2.15) можно функцию (3.47) преобразовать к виду

$$h(t) = Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + k1(t). \quad (3.48)$$

Используя начальные условия $h(0)=0$ и $h'(0)=0$, найдем

$$C = -k1(t)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/\beta = -k1(t)/\sqrt{1-\xi^2}; \quad (3.49)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\beta/\alpha) = \arcsin \beta T = \arccos \xi. \quad (3.50)$$

Окончательно переходная функция может быть записана в следующей форме:

$$h(t) = k \left[1 - \frac{1}{\beta T} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right] k1(t). \quad (3.51)$$

Свободная составляющая переходной функции (рисунок 3.8, *а*) представляет собой синусоиду, амплитуда которой убывает по экспоненциальному

огибающей (пунктирная линия). Период затухающих колебаний равен

$$T_3 = 2\pi/\beta = 2\pi T / \sqrt{1-\xi^2}. \quad (3.52)$$

Чем больше коэффициент ξ и меньше постоянная T , тем быстрее затухают колебания. Если коэффициент демпфирования $\xi = 0$ (что соответствует $T_1 = 0$), то на выходе звена после подачи единичного ступенчатого воздействия возникают незатухающие колебания с частотой $\omega_0 = T^{-1}$.

Скорость затухания колебательных переходных процессов принято оценивать *степенью затухания*

$$\psi = (A_1 - A_3)/A_1 = 1 - A_3/A_1, \quad (3.53)$$

представляющей собой отношение разности двух соседних амплитуд к первой из них. Чем ближе величина ψ к единице, тем быстрее затухают колебания.

Степень затухания ψ зависит от соотношения действительной и мнимой частей комплексного корня. Действительно, если в выражение для огибающей в формуле (3.51) подставить два значения t , отличающиеся на период затухающих колебаний $T_3 = 2\pi/\beta$, то можно получить

$$\psi = 1 - e^{-2\pi\alpha/\beta} = 1 - e^{-\pi/\mu}. \quad (3.54)$$

Отношение $\mu = \beta/\alpha$ называют *степенью колебательности*. Используя выражение (3.46), можно установить связь между степенью колебательности μ и коэффициентом демпфирования ξ :

$$\mu = \sqrt{1 - \xi^2} / \xi. \quad (3.55)$$

Определим зависимость максимального значения h_{\max} переходной функции от коэффициента демпфирования ξ . Дифференцируя выражение (3.51) по t и приравнивая производную нулю, получим

$$t_{\max} = \pi/\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}; \quad (3.56)$$

$$h_{\max} = h(t_{\max}) = k(1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}). \quad (3.57)$$

АФХ колебательного звена (рисунок 3.8, *e*) описывается функцией

$$W(j\omega) = k [T^2(j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1]. \quad (3.58)$$

Ей соответствуют АЧХ (рисунок 3.8, *c*)

$$A(\omega) = k / \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \quad (3.59)$$

и ФЧХ (рисунок 3.8, *z*).

$$\Phi(\omega) = -\arctg[2\xi T\omega / (1 - T^2\omega^2)]. \quad (3.60)$$

АЧХ при частоте

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.61)$$

имеет максимум (резонансный пик), равный

$$A_{\max} = A(\omega_{\max}) = k / 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.62)$$

Максимум существует, если $1 - 2\xi^2 > 0$, т.е. если $\xi < 0,707$. Из выражений (3.61) и (3.62) следует: чем меньше коэффициент ξ , тем ближе резонансная частота $\omega_p = \omega_{\max}$ к собственной частоте незатухающих колебаний $\omega_0 = 1/T$ и тем больше резонансный пик. Таким образом, по графику АЧХ (рисунок 3.8, *c*) видно, что колебательное звено, как и все инерционные звенья, хорошо пропускает сигналы низкой частоты и плохо — сигналы высокой частоты; если частота гармонического входного сигнала близка к частоте собственных колебаний звена, то отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного больше передаточного коэффициента k .

Инерционными звеньями второго порядка являются обычно такие конструктивные элементы автоматических систем, которые содержат два накопителя энергии или вещества. Если в одном из них накапливается потенциальная энергия, а в другом — кинетическая, то элемент системы может об-

ладать колебательными свойствами. Колебательность элемента зависит от условий обмена энергии между указанными накопителями: если канал передачи энергии обладает существенным сопротивлением (электрическим или механическим), то в нем происходит заметное поглощение или рассеивание энергии, и элемент близок по своим свойствам к апериодическому звену второго порядка; если же потери энергии при обмене незначительны, то процесс обмена будет иметь колебательный характер.

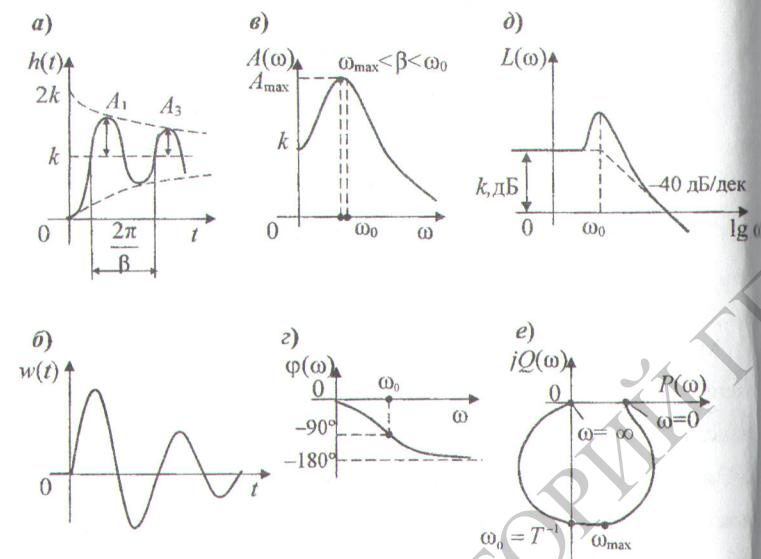


Рисунок 3.8 — Характеристики колебательного звена второго порядка

Мерой потерь энергии в канале передачи служит коэффициент демпфирования ξ : чем меньше потери, тем меньше ξ ; в пределе, когда сопротивление канала равно нулю и потерь нет, коэффициент $\xi = 0$. При этом элемент сохраняет в себе неизменным первоначальный запас энергии, и колебательный процесс обмена энергией между накопителями не затухает.

Классическим примером инерционного звена второго порядка является

четырехполюсник, состоящий из резистора R , индуктивности L и конденсатора C (рисунок 3.9). Коэффициенты дифференциальных уравнений (3.30) и (3.44) для этого четырехполюсника равны:

$$k = 1; T_2 = T = \sqrt{LC}; T_1 = 2\xi T = RC; \xi = R\sqrt{C/L}/2. \quad (3.63)$$

При $R = 0$ параметры $T_1 = 0$ и $\xi = 0$, и четырехполюсник становится идеальным колебательным контуром.

В заключение отметим **общие свойства статических (позиционных) звеньев**.

1) в установившемся режиме выходная переменная у звена однозначно связана с входной x уравнением статики

$$y = k; \quad (3.64)$$

2) передаточный коэффициент звена связан с передаточной функцией соотношением

$$k = W(s)|_{s=0}; \quad (3.65)$$

3) звенья являются фильтрами низких частот (кроме безынерционного), т. е. хорошо пропускают низкочастотные сигналы и плохо — высокочастотные; в режиме гармонических колебаний они создают отрицательные фазовые сдвиги.

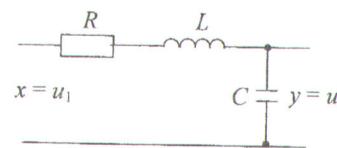


Рисунок 3.9 — Инерционное звено второго порядка

3.5 Интегрирующие звенья

Различают два вида интегрирующих звеньев: идеальные и реальные. Общей особенностью интегрирующих звеньев является пропорциональность выходной величины интегралу входной величины. Причем, у идеального интегрирующего звена пропорциональность существует в любой момент времени после подачи ступенчатого воздействия, а у реального — только после завершения переходного процесса в звене.

Идеальное интегрирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy(t)}{dt} = kx(t). \quad (3.66)$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от конструктивных параметров звена и имеет размерность

$$[k] = [y]/[x][t]. \quad (3.67)$$

Уравнению (3.66) равносильно интегральное соотношение

$$y(t) = k \int_0^t x(\theta) d\theta + y(0), \quad (3.68)$$

которое в явной форме выражает зависимость выходной величины от входной и объясняет название звена: звено интегрирует входной сигнал.

Подставляя в соотношение (3.68) $x(\theta) = 1(t)$, можно получить переходную функцию

$$h(t) = k 1(t), \quad (3.69)$$

график которой показан на рисунке 3.10, *a*.

Импульсная переходная функция звена (рисунок 3.10, *b*) имеет вид

$$w(t) = k 1(t). \quad (3.70)$$

Передаточная функция идеального интегрирующего звена

$$W(s) = k/s. \quad (3.71)$$

АФХ звена

$$W(j\omega) = k/j\omega = -jk/\omega \quad (3.72)$$

на комплексной плоскости изображается в виде прямой, совпадающей с мнимой осью (рисунок 3.10, *e*). АЧХ

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k\omega \quad (3.73)$$

представляет собой гиперболу (рисунок 3.10, *v*), которая при $\omega \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Этую особенность можно условно (по аналогии со статическими звеньями) объяснить наличием передаточного коэффициента, равного бесконечности.

При увеличении частоты значения $A(\omega)$ стремятся к нулю. Это свойство сближает интегрирующие звенья с инерционными.

ФЧХ идеального интегрирующего звена

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-k/\omega}{0} = -90^\circ \quad (3.74)$$

показывает, что сдвиг фаз, создаваемый звеном, на всех частотах одинаков и равен -90° (рисунок 3.9, *z*).

ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega \quad (3.75)$$

представляет собой прямую с наклоном -20 дБ/декаду (рисунок 3.10, *d*).

Примером такого звена является интегратор на основе операционного усилителя [10].

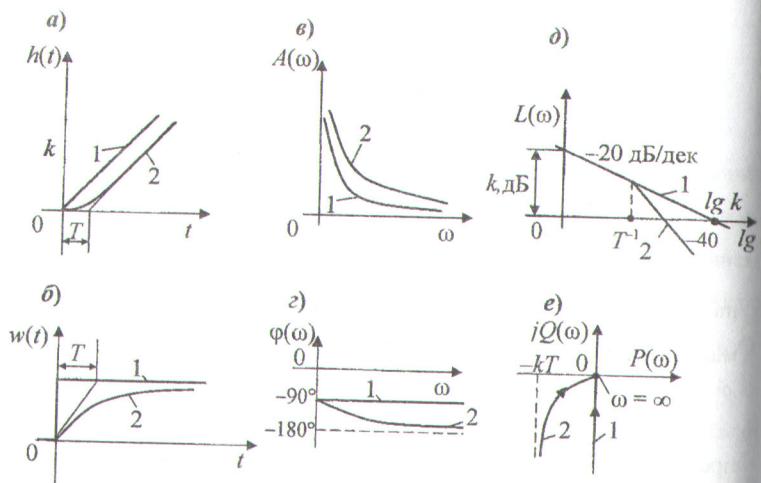


Рисунок 3.10 — Характеристики идеального (1) и инерционного (2) интегрирующих звеньев

Инерционное интегрирующее звено описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kx(t), \quad (3.76)$$

а его передаточная функция

$$W(s) = k / (Ts + 1)s. \quad (3.77)$$

Нетрудно заметить, что звено с передаточной функцией (3.77) может рассматриваться как последовательное соединение двух элементарных звеньев: идеального интегрирующего с передаточной функцией $1/s$ и статического инерционного звена первого порядка с постоянной времени T и передаточным коэффициентом k . Поэтому все частотные характеристики инерционного интегрирующего звена могут быть получены по характеристикам этих простых звеньев по соответствующим правилам перемножения комплексных (векторных) величин.

Свойствами идеального интегрирующего звена обладает при некоторых

условиях инерционное звено первого порядка. Например, апериодическая RC -цепь (рисунок 3.5, a) при частотах входного воздействия $\omega > \omega_c = 1/T$ может приближенно рассматриваться как интегрирующее звено. Действительно, если в частотной функции (3.16) пренебречь единицей в знаменателе, то она совпадет с функцией (3.72).

Общие свойства и особенности интегрирующих звеньев:

- 1) после подачи ступенчатого входного воздействия $x(t) = x_0 1(t)$ выходная переменная $y(t)$ неограниченно возрастает и по окончании переходного процесса изменяется по линейному закону

$$y(t) = kx_0 t. \quad (3.78)$$

При снятии входного воздействия выходная переменная сохраняет достигнутое значение, поэтому интегрирующие звенья можно использовать в качестве запоминающих элементов (элементов с памятью);

- 2) в передаточную функцию обязательно входит сомножитель $1/s$, поэтому

$$W(s)_{s=0} \neq k, \text{ а } W(0) = \infty; \quad (3.79)$$

- 3) интегрирующие звенья, как и инерционные статические, являются фильтрами низких частот; в режиме гармонического колебания они вносят отрицательные фазовые сдвиги.

3.6 Дифференцирующие звенья

Дифференцирующие звенья могут быть идеальными (безынерционными) и реальными (инерционными). Мгновенное значение выходной величины **идеального дифференцирующего звена** пропорционально в каждый момент времени мгновенному значению производной входной величины:

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.80)$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от конструктивных параметров звена и имеет размерность

$$[k] = [y][t]/[x] \quad (3.81)$$

Переходная функция звена получается непосредственно из уравнения (3.80) подстановкой и дифференцированием единичной ступенчатой функции:

$$h(t) = k\delta(t). \quad (3.82)$$

График переходной функции идеального дифференцирующего звена показан на рисунке 3.11, а.

Импульсная переходная функция (рисунок 3.11, б)

$$w(t) = k\delta'(t)/dt. \quad (3.83)$$

Передаточная функция звена

$$W(s) = ks. \quad (3.84)$$

Амплитудно-фазовая функция

$$W(j\omega) = kj\omega \quad (3.85)$$

совпадает с положительной частью мнимой оси (рисунок 3.11, в).

АЧХ (рисунок 3.11, г)

$$A(\omega) = k\omega \quad (3.86)$$

показывает: чем больше частота входного сигнала, тем больше амплитуда выходного сигнала. Эта особенность дифференцирующих звеньев вытекает непосредственно из основного уравнения (3.80): чем быстрее изменяется во времени сигнал $x(t)$, тем больше его производная в правой части и выходной сигнал $y(t)$.

Сдвиг фаз, создаваемый идеальным дифференцирующим звеном, на всех частотах одинаков и равен (рисунок 3.11, д)

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{k\omega}{0} = +90^\circ. \quad (3.87)$$

ЛАЧХ звена — прямая линия с наклоном +20 дБ/декаду, проходящая через точку с координатами $L(\omega) = 0$ (рисунок 3.11, д)

$$L(\omega) = 20 \lg k\omega. \quad (3.88)$$

Примером такого звена является дифференциатор на основе операционного усилителя [10].

Инерционное дифференцирующее звено представляет собой последовательное соединение идеального дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка. Его уравнение

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}, \quad (3.89)$$

передаточная функция

$$W(s) = ks/(Ts + 1). \quad (3.90)$$

Временные характеристики $h(t)$ и $w(t)$ инерционного дифференцирующего звена изображены на рисунке 3.11, а и б. Аналитические выражения для частотных характеристик инерционного дифференцирующего звена (рисунок 3.11, б—е) можно получить по соответствующим функциям идеального дифференцирующего и инерционного звена первого порядка.

Инерционными дифференцирующими звеньями являются электрические цепи (рисунок 3.12); они описываются передаточной функцией вида (3.90), причем $k = T = RC$ (а) и $k = T = L/R$ (б).

Особенности дифференцирующих звеньев:

- При подаче на вход звена ступенчатого воздействия на его выходе возникает большой кратковременный импульс, а затем по окончании переходного процесса выходная переменная становится равной нулю. Если входной сигнал не изменяется во времени, то выходной равен нулю. Если же входной сигнал $x(t)$ возрастает по линейному закону $x(t) = a_1 t$, то выходной

$$y(t) = a_1 = \text{const.} \quad (3.91)$$

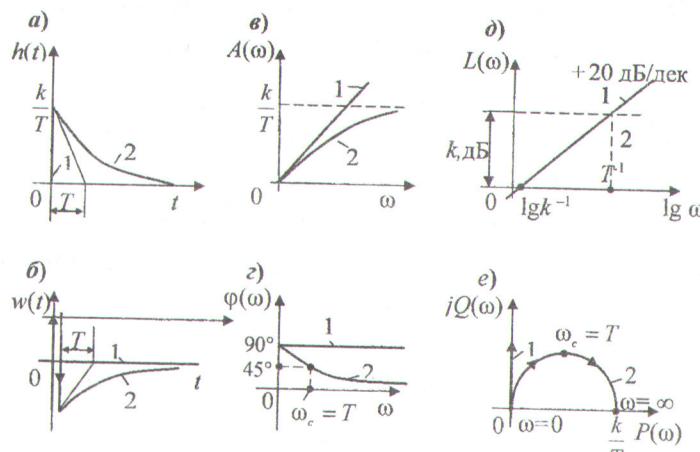


Рисунок 3.11 — Характеристики идеального (1) и инерционного (2) дифференцирующих звеньев

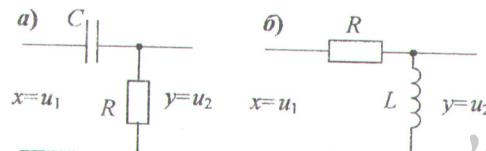


Рисунок 3.12 — Дифференцирующие звенья

2) В передаточную функцию всегда входит сомножитель s , поэтому

$$W(s)|_{s=0} = 0 \quad (3.92)$$

и дифференцирующие звенья в статике не передают входные сигналы.

3) Дифференцирующие звенья являются фильтрами верхних частот, т. е. хорошо пропускают высокочастотные сигналы и плохо — низкочастотные. Они вносят положительные фазовые сдвиги.

3.7 Звено запаздывания

Звено запаздывания так же, как безынерционное статическое звено, передает сигнал со входа на выход без искажения его формы. Однако все мгновенные значения входной величины выходная величина принимает с некоторым отставанием (запаздыванием). Способностью задерживать сигнал во времени, не изменяя его формы, обладают многие элементы промышленных автоматических систем. В первую очередь к таким элементам относятся транспортирующие устройства (конвейеры, ленточные питатели, трубопроводы), при помощи которых подают различные материалы (сырье, топливо, реагенты) в технологические аппараты. Запаздыванием часто обладают и сами технологические аппараты.

Уравнение звена запаздывания

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (3.93)$$

где τ — длительность запаздывания.

Уравнение (3.93) не является дифференциальным и относится к классу особых уравнений со смешанным (запаздывающим) аргументом. Оно указывает, что выходной сигнал $y(t)$ повторяет все изменения входного сигнала $x(t)$, но с отставанием на время τ .

Подставляя в уравнение звена $x(t) = I(t)$, можно получить его переходную функцию

$$h(t) = I(t - \tau), \quad (3.94)$$

Подставляя $x(t) = \delta(t)$, — импульсную

$$w(t) = \delta(t - \tau). \quad (3.95)$$

Обе эти временные характеристики показаны на рисунке 3.13, а и б. Применяя теорему запаздывания (таблица 2.2), можно записать уравнение (3.93) в изображениях по Лапласу:

$$Y(s) = X(s)e^{-\tau s}. \quad (3.96)$$

Отсюда передаточная функция звена

$$W(s) = Y(s)/X(s) = e^{-\tau s}. \quad (3.97)$$

АФХ звена

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau \quad (3.98)$$

представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рисунок 3.13, e).

Сравнивая выражение (3.98) с показательной формой записи АФХ общего вида (2.56), легко установить, что для рассматриваемого звена АЧХ (рисунок 3.13, e)

$$A(\omega) = 1 = \text{const} \quad (3.99)$$

и ФЧХ (рисунок 3.13, ε)

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau. \quad (3.100)$$

Звенья запаздывания в большинстве случаев ухудшают устойчивость систем и делают их трудно управляемыми.

Если звено запаздывания входит в контур системы управления, то характеристическое уравнение системы будет уже не простым алгебраическим, а трансцендентным. Решение и анализ трансцендентных уравнений связаны с большими трудностями, поэтому часто в практических расчетах трансцендентную передаточную функцию (3.97) раскладывают в ряд Пада и, учитывая только два или три члена ряда, приближенно заменяют ее дробной рациональной функцией

$$W(s)e^{-\tau s} \approx (1 - 0,5\tau s)/(1 + 0,5\tau s) \quad (3.101)$$

или

$$W(s) = e^{-\tau s} \approx \frac{1 - 0,5\tau s + 0,83\tau^2 s^2}{1 + 0,5\tau s + 0,83\tau^2 s^2}. \quad (3.102)$$

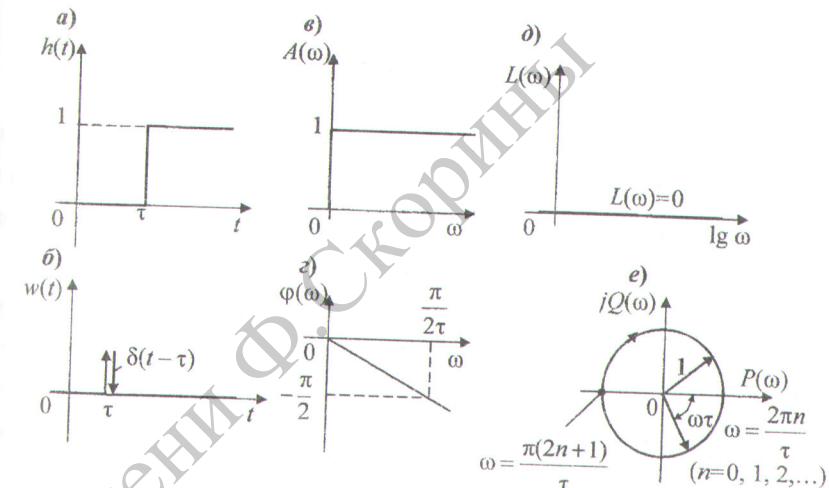


Рисунок 3.13 — Характеристики звена запаздывания

Таким образом, звено запаздывания отличается следующими характерными особенностями:

1) оно передает любые входные сигналы без искажения их формы, но задерживает их на интервал τ ; в установившемся режиме (при $t > \tau$) выходной сигнал

$$y = x; \quad (3.103)$$

2) как и для других статических (позиционных) звеньев, передаточная функция звена

$$W(s)|_{s=0} = k = 1; \quad (3.104)$$

3) по свойствам АЧХ звено запаздывания эквивалентно безынерционному: пропускает высокочастотные и низкочастотные сигналы с одинаковым отношением амплитуд, равным единице. По свойствам ФЧХ оно эквивалентно инерционным звеньям: создает отрицательный фазовый сдвиг, пропорциональный запаздыванию τ и частоте ω .

3.8 Передаточные функции типовой одноконтурной системы

Под типовой одноконтурной системой регулирования будем понимать систему, обобщенная алгоритмическая схема которой представлена на рисунке 3.14, а). Объект управления характеризуется одной выходной переменной x , которую требуется стабилизировать на заданном уровне u . На стабилизируемую переменную x через соответствующие передаточные функции влияют возмущения z_3 и z_2 , действующие непосредственно на выход объекта. Отклонения x_B и y_B , вызываемые этими возмущениями, компенсируются в системе целенаправленными изменениями управляющего воздействия u , которое создается регулятором W_p' и поступает на вход объекта через регулирующий орган W_{po} .

На входе регулятора с передаточной функцией W_p' действует сигнал рассогласования u_e . Этот сигнал формируется в результате сравнения (алгебраического суммирования) сигналов u_3 и u_x , пропорциональных соответственно задающему воздействию u и управляемой величине x . Сигнал u_3 вырабатывается датчиком W_d , а сигнал u_x формируется в задающем элементе W_3 .

Для анализа и расчета типовой системы (рисунок 3.14, а) удобно пользоваться преобразованной алгоритмической схемой (рисунок 3.14, б), в которой датчик отнесен к регулятору, и условно принято, что во входном сумматоре сравниваются непосредственно физические величины u и x . Сигнал ошибки ε имеет, следовательно, ту же размерность, что и величины u и x , поэтому по значению ε можно прямо судить о точности системы. Шум при этом также оказывается выраженным в единицах измерения x — в виде эквивалентного сигнала $x_{ш}$, который учитывает случайные флуктуации в задающем и измерительном элементах, а также в канале обратной связи. Односторонняя связь в схеме называется единичной.

При переходе от исходной схемы (рисунок 3.14, а) к эквивалентной

единичной обратной связью (рисунок 3.14, б) использовано правило 6 (таблица 2.4) о переносе сумматора назад и учтено, что задающий элемент и датчик — обычно безынерционные звенья с передаточными коэффициентами k_3 и k_d , причем всегда $k_3 = 1/k_d$. Очевидно, что при этом задатчик оказывается присоединенным к регулятору с передаточной функцией

$$W_p(s) = k_3 W'_p(s). \quad (3.105)$$

Регулирующий орган с W_{po} отнесен на преобразованной схеме к объекту:

$$W_o(s) = W_{po}(s) W'_o(s). \quad (3.106)$$

Возмущения z_2 и z_3 соответствуют эквивалентные внешние воздействия y_B и x_B на вход и выход объекта, выраженные в единицах измерения управляющего воздействия u и управляемой величины x .

Зададим передаточные функции и уравнение динамики типовой одноконтурной системы, схема которой изображена на рисунке 3.14, б.

Передаточная функция системы по задающему воздействию имеет вид

$$\Phi_{uu}(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{x(s)}{x_m(s)} = \frac{W_p(s) W_o(s)}{1 + W_p(s) W_o(s)}, \quad (3.107)$$

по возмущающему воздействию

$$\Phi_{xb}(s) = \frac{x(s)}{y_B(s)} = \frac{W_o(s)}{1 + W_p(s) W_o(s)}. \quad (3.108)$$

Согласно принципу суперпозиции общее изменение выходной величины x , возникающее при совместном действии входов u и y_B , равно сумме изменений, создаваемых каждым воздействием в отдельности. Отсюда *уравнение динамики системы* в краткой записи

$$x(s) = u(s) \Phi_{uu}(s) + y_B(s) \Phi_{xb}(s) \quad (3.109)$$

или в развернутом виде

$$x(s) = u(s) \frac{W_p(s) W_o(s)}{1 + W_p(s) W_o(s)} + y_B(s) \frac{W_o(s)}{1 + W_p(s) W_o(s)}. \quad (3.110)$$

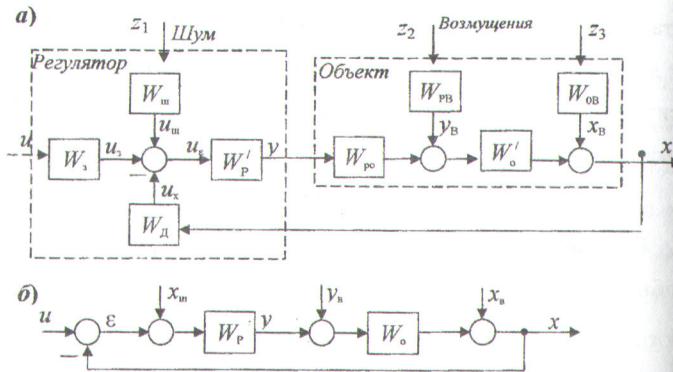


Рисунок 3.14 — Алгоритмические схемы типовой одноконтурной системы

Часто при расчете систем передаточные функции и уравнение динамики записывают не для управляемой величины x , а для сигнала ошибки (поправки к измеренному значению управляемой величины)

$$\varepsilon = u - x, \quad (3.11)$$

который также может рассматриваться как сумма двух составляющих:

$$\varepsilon = \varepsilon_u + \varepsilon_b, \quad (3.12)$$

где ε_u , ε_b — составляющие сигнала ошибки, обусловленные изменениями соответственно задающего и возмущающего воздействий. Для каждой составляющей **сигнала ошибки** можно записать **передаточные функции**, связывающие эти составляющие с соответствующими внешними воздействиями. **Передаточная функция системы** (рисунок 3.14, б) по задающему воздействию согласно правилу (2.140) равна

$$\Phi_{eu}(s) = \frac{\varepsilon_u(s)}{u(s)} = \frac{1}{1 + W_p(s)W_o(s)}, \quad (3.13)$$

а передаточная функция по возмущающему воздействию

$$\Phi_{eb}(s) = \frac{\varepsilon_b(s)}{y_b(s)} = \frac{-W_o(s)}{1 + W_p(s)W_o(s)}. \quad (3.14)$$

Уравнение динамики системы, записанное для сигнала ошибки имеет вид

$$\varepsilon(s) = \varepsilon_u(s) + \varepsilon_b(s) = u(s)\Phi_{eu}(s) + y_b(s)\Phi_{eb}(s) \quad (3.115)$$

или

$$\varepsilon(s) = u(s) \frac{1}{1 + W_p(s)W_o(s)} + y_b(s) \frac{-W_o(s)}{1 + W_p(s)W_o(s)}. \quad (3.116)$$

Если в системе (рисунок 3.14, а) заданы характеристики возмущения z_3 (вместо y_b), то в числители передаточных функций (3.108) и (3.114), входящих в уравнения (3.110) и (3.116), следует подставлять функцию $W_{o,b}$ (вместо W_o).

Рассмотрим **типовые алгоритмы управления** (законы регулирования), применяемые в линейных автоматических системах.

Простейший закон регулирования реализуется при помощи безынерционного звена с передаточной функцией

$$W_p(s) = y(s)/\varepsilon(s) = k_n = k_p \quad (3.117)$$

Согласно выражению (3.117) управляющее воздействие и в статике и в динамике пропорционально сигналу ошибки ε . Поэтому такой закон регулирования называется **пропорциональным** (П).

Преимущества П-регулятора — простота и быстродействие, недостатки — ограниченная точность (особенно при управлении объектами с большой инерционностью и запаздыванием).

Закон регулирования, которому соответствует передаточная функция

$$W_p(s) = k_p/s = k_p/T_{in}s, \quad (3.118)$$

называется **интегральным** (И). При интегральном законе регулирования управляющее воздействие u в каждый момент времени пропорционально интегралу от сигнала ошибки ε . Поэтому И-регулятор реагирует главным образом на длительные отклонения управляемой величины от заданного значения. Кратковременные отклонения таким регулятором сглаживаются.

Преимущества интегрального закона — лучшая (по сравнению с про-

порциональным законом) точность в установившихся режимах, недостатки — худшие свойства в переходных режимах (меньшее быстродействие и большая колебательность).

Сопоставив (3.118) с (2.49) можно заметить, что интегрирующий регулятор обладает астатизмом первого порядка. Поэтому типовая система управления (рисунок 3.14) будет обладать астатизмом v -го порядка, если ее регулятор содержит v интегрирующих звеньев.

Наибольшее распространение в промышленной автоматике получил *пропорционально-интегральный* (ПИ) закон регулирования

$$W_p(s) = k_n + k_i s = k_p + k_p T_{iu} s = k_p(T_{iu}s + 1)/T_{iu}. \quad (3.119)$$

Благодаря наличию интегральной составляющей ПИ-закон регулирования обеспечивает высокую точность в установившихся режимах, а при определенном соотношении коэффициентов k_n и k_i обеспечивает хорошие показатели и в переходных режимах.

Наилучшее быстродействие достигается при *пропорционально-дифференциальному* (ПД) законе регулирования

$$W_p(s) = k_n + k_d s = k_p + k_p T_{du} s. \quad (3.120)$$

ПД-регулятор реагирует не только на величину сигнала ошибки, но и на скорость его изменения. Благодаря этому при управлении достигается эффект упреждения. Недостатком пропорционально-дифференциального закона регулирования является ограниченная точность.

Наиболее гибким законом регулирования (в классе линейных законов) является *пропорционально-интегрально-дифференциальный* (ПИД) закон

$$W_p(s) = k_n + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p \frac{T_{iu}s + 1 + T_{iu}T_{du}s^2}{T_{iu}s} \quad (3.121)$$

или

$$W_p(s) = k_p \frac{(T_{iu}s + 1)(T_{du}s + 1)}{T_{iu}s} = k_p \frac{T_{iu} + T_{du}}{T_{iu}} + \frac{k_p'}{T_{iu}s} + k_p' T_{du}s, \quad (3.122)$$

который сочетает в себе преимущества более простых законов

(3.117)...(3.120).

Коэффициенты и постоянные времени, входящие в передаточные функции типовых регуляторов, называются *настроочными параметрами* и имеют следующие наименования: k_n , k_i , k_d — коэффициенты пропорциональной, интегральной и дифференциальной части; k_p , k'_p — передаточные коэффициенты регулятора; T_{iu} , T'_iu — постоянные времени интегрирования; T_d , T'_d — постоянные времена дифференцирования.

Параметры, входящие в различные записи (3.121) и (3.122) ПИД-закона, связаны между собой соотношениями:

$$k_n = k_p = k'_p(T'_{iu} + T'_{du})/T_{iu}; \quad k_i = k_p/T_{iu} = k'_p T'_{iu}; \quad k_d = k_p T_{du} = k'_p T'_{du}; \quad (3.123)$$

из которых следует, что $k_p \neq k'_p$; $T_{iu} \neq T'_{iu}$; $T_{du} = T'_{du}$.

3.9 Точность статических и астатических систем управления при типовых воздействиях

Общие понятия о точности управления. Назначение любой автоматической системы управления — изменение выходной величины $x(t)$ в соответствии с изменениями задающего воздействия $u(t)$. В большинстве случаев эта задача системы заключается в поддержании равенства

$$x(t) = u(t) \quad (3.124)$$

при любых изменениях задающего и возмущающих воздействий.

При анализе точности различают две функции системы: воспроизведение задающего воздействия и подавление (компенсацию) возмущений.

Из-за инерционности объекта и регулятора обе эти функции выполняются любой реальной системой с погрешностью: в каждый момент времени после внешнего воздействия существует разность

$$\varepsilon(t) = x(t) - u(t), \quad (3.125)$$

характеризующая точность системы. Чем меньше мгновенные значения сиг-

нала ошибки $\varepsilon(t)$, тем больше (лучше) точность системы.

Из формул (3.113) ... (3.116) следует одно из важнейших правил ТАУ: *в типовой одноконтурной системе, состоящей из объекта $W_o(s)$ и регулятора $W_p(s)$, полная ошибка регулирования $\varepsilon(t)$ и ее составляющие и в статике и в динамике обратно пропорциональны выражению $(1 + W_p(s)W_o(s))$, т.е. точность регулирования тем лучше, чем больше усиливательные свойства регулятора.*

Вычисление мгновенных значений сигнала ошибки и его составляющих при произвольном законе изменения внешних воздействий представляет собой сложную задачу. Поэтому точность систем принято оценивать по значениям ε_s и ε_b в статическом и установившемся динамическом режимах работы системы. Соответственно различают статическую и динамическую точности.

Статическая точность. В статическом режиме ошибки возникают только в статической системе, а в астатической системе они равны нулю, поэтому статическую точность оценивают только при анализе статических систем.

Статической системой управления называется система, объект и регулятор которой являются статическими элементами, т. е.

$$W_o(0) = k_o \text{ и } W_p(0) = k_p. \quad (3.126)$$

Подставляя в уравнения динамики (3.110) и (3.116) одноконтурной системы (рисунок 3.14, б) $s = 0$ и учитывая выражения (3.126) получим уравнения статики статической системы: для управляемой величины

$$x = u \frac{k_p k_o}{1 + k_p k_o} + y_b \frac{k_o}{1 + k_p k_o}; \quad (3.127)$$

для сигнала ошибки

$$\varepsilon = u \frac{1}{1 + k_p k_o} + y_b \frac{-k_o}{1 + k_p k_o}. \quad (3.128)$$

Если вместо возмущения y_b задано z_3 (рисунок 3.14, а), то в числителе

вторых слагаемых уравнений (3.127) и (3.128) следует подставлять передаточный коэффициент k_{ob} , характеризующий канал $z_3 - x$.

Первое слагаемое в правой части уравнения (3.128) характеризует статическую ошибку по задающему воздействию, второе — статическую ошибку по возмущению. Обе эти ошибки тем больше, чем больше внешние воздействия, и тем меньше, чем больше знаменатель $(1 + k_p k_o)$. Следовательно, точность статической системы тем лучше, чем больше передаточный коэффициент разомкнутого контура.

Точность статической системы принято оценивать **коэффициентом статизма**

$$S = \Delta u_s / \Delta x_p, \quad (3.129)$$

где Δx_p — отклонение управляемой величины x от заданного значения, создаваемое возмущением $y_b = y_{bo}$ при разомкнутом контуре регулирования; Δu_s — отклонение управляемой величины, создаваемое тем же возмущением y_{bo} в замкнутой системе. Коэффициент статизма показывает, во сколько раз отклонение выходной величины управляемого объекта меньше отклонения этой величины неуправляемого объекта (при одном и том же значении возмущающего воздействия) считается удовлетворительным $S = 0,1 \dots 0,01$.

Динамическая точность. Динамическую точность систем оценивают по величине сигнала ошибки в установившемся динамическом режиме, который наступает после окончания переходного процесса. В этом режиме управляемая величина и сигнал ошибки имеют только вынужденную составляющую.

В зависимости от свойств системы и от точки приложения внешнего воздействия вынужденная составляющая сигнала ошибки либо равна постоянной величине, либо неограниченно возрастает. Постоянную вынужденную составляющую можно определить при помощи теоремы о конечном значении оригинала. Возрастающую вынужденную составляющую находят при помощи метода коэффициентов ошибок.

На рисунке 3.15 приведены графики переходных процессов в статической ($v = 0$) и астатических ($v = 1$, $v = 2$) системах при ступенчатом и линейном изменении задающего сигнала [4].

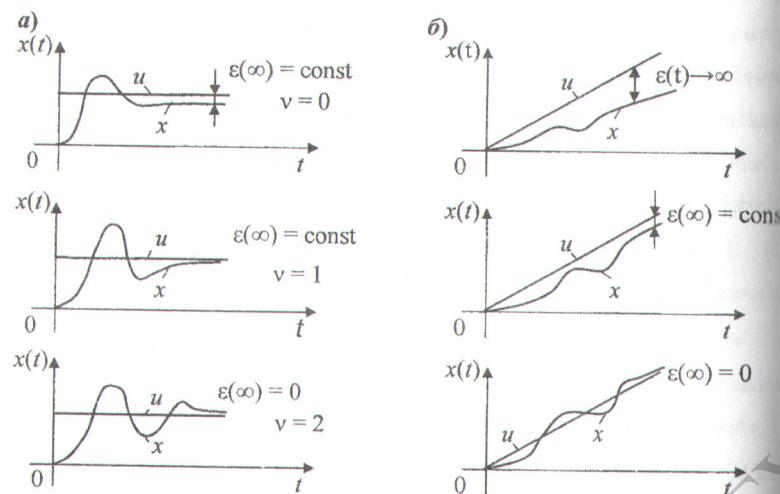


Рисунок 3.15 — Переходные процессы в статической и астатической системах при ступенчатом (а) и линейном (б) изменении задающего воздействия

Контрольные задания и вопросы

- Получите из уравнения (3.1) уравнение статики позиционных звеньев и выразите их передаточный коэффициент k через коэффициенты a_2 и b_1 .
- Как будет изменяться выходной сигнал $y(t)$ безынерционного звена, если на его вход подать линейное воздействие? Постройте график $y(t)$.
- Как влияет безынерционное звено на амплитуду и фазу синусоидального входного сигнала?
- Напишите передаточную функцию инерционного звена первого порядка.

5 Как проходят через инерционное звено первого порядка гармонические сигналы низкой и высокой частоты?

- Напишите передаточную функцию идеального интегратора.
- В чем сходство и отличие частотных свойств интегрирующих и инерционных статических звеньев?
- Напишите передаточную функцию идеального дифференциатора.
- Почему дифференцирующие звенья плохо пропускают медленно меняющиеся входные сигналы?
- Постройте график выходного сигнала $y(t)$ звена запаздывания при подаче на его вход линейного воздействия.
- Напишите передаточную функцию звена запаздывания.
- Как изображаются отдельное звено W и его сигналы x и y на алгоритмической схеме и сигнальном графике системы?
- Напишите выражения для эквивалентных передаточных функций типовых соединений из двух элементов.
- Что такое разомкнутый контур системы и чему равна его передаточная функция?
- Запишите передаточную функцию ПИ-регулятора.
- Как влияет передаточный коэффициент разомкнутого контура на статическую и динамическую точность систем?
- Какая система называется астатической? От наличия каких типовых звеньев в контуре системы зависит ее астатизм?

4 Устойчивость линейных систем

4.1 Понятие, виды и общее условие устойчивости

Одной из важнейших характеристик автоматической системы управления наряду с точностью является устойчивость. Причем, если показатели точности определяют степень полезности и эффективности системы, то от устойчивости зависит работоспособность системы.

Свободное движение линейной или линеаризованной системы описывается однородным дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_n x(t) = 0, \quad (4.1)$$

где $x(t)$ — свободная составляющая выходной величины системы.

Вынужденная составляющая выходной величины, зависящая от вида внешнего воздействия и правой части дифференциального уравнения (2.24), на устойчивость системы не влияет.

Движение, которое система совершает согласно (4.1), по Ляпунову называется невозмущенным движением. Однако на практике система будет неизбежно испытывать случайные воздействия, не учтенные в уравнении (4.1). Как бы малы и кратковременны ни были эти воздействия, они приводят к тому, что в некоторый момент времени $t = t_0$ координаты и скорости точек системы получают (по отношению к их значениям в невозмущенном движении) малые, но не равные нулю, приращения, которые по Ляпунову называются *начальными возмущениями*, а последующее движение системы — *возмущенным движением*. Наличие возмущений может оказаться на характеристиках движения системы двояко. Если при малых возмущениях какая-нибудь из этих характеристик будет в возмущенном движении мало отличаться от того значения, которое она должна иметь в невозмущенном движении, то, согласно Ляпунову,

невозмущенное движение является по отношению к этой характеристике устойчивым. Если же при сколько угодно малом (но не равным нулю) возмущении значение рассматриваемой характеристики будет в возмущенном движении со временем все более и более отклоняться от ее значения в невозмущенном движении, то невозмущенное движение является по отношению к этой характеристике неустойчивым. Условия, при выполнении которых рассматриваемое движение является устойчивым движением, называют условиями (критериями) устойчивости.

Для определения понятия «устойчивость» в качестве типового начального возмущения возьмем дельта-функцию. Тогда временной характеристикой системы будет весовая функция, от характера изменения которой во времени зависит устойчивость системы.

Система является *устойчивой*, если ее весовая функция $w(t)$ переходного процесса с течением времени стремится к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0. \quad (4.2)$$

Очевидно, что при этом выходная величина системы будет стремиться к вынужденной составляющей, определяемой внешним воздействием и правой частью уравнения (2.24). Устойчивость в смысле условия (4.2) принято называть *асимптотической*.

Если весовая функция при $t \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \infty, \quad (4.3)$$

то система *неустойчива*.

Наконец, если при $t \rightarrow \infty$ $w(t)$ не стремится ни к нулю, ни к бесконечности, то система *нейтральна* (консервативна).

Найдем общее условие, при котором система, описываемая уравнением (4.1), устойчива. Решение уравнения (4.1) равно сумме:

$$w(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{s_k t}, \quad (4.4)$$

где C_k — постоянные, зависящие от начальных условий; s_k — корни характеристического уравнения

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (4.5)$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными ($s_k = \alpha_k$), мнимыми ($s_k = j\beta_k$) и комплексными

$$s_k = \alpha_k \pm j\beta_k, \quad (4.6)$$

причем комплексные корни всегда попарно сопряжены между собой: если есть корень с положительной мнимой частью, то обязательно существует корень с такой же по модулю, но отрицательной мнимой частью.

Весовая функция (4.4) при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю только в том случае, если каждое слагаемое вида $C_k e^{\alpha_k t} \rightarrow 0$. Характер этой функции времени зависит от вида корня s_k . Рассмотрим все возможные случаи расположения корней s_k на комплексной плоскости (рисунок 4.1) и соответствующие им функции $w(t)$, графики которых показаны внутри окружностей.

Каждому действительному корню $s_k = \alpha_k$ в решении (4.4) соответствует слагаемое вида

$$w_k(t) = C_k e^{\alpha_k t}. \quad (4.7)$$

Если $\alpha_k < 0$ (корень s_1), то функция (4.7) при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Если $\alpha_k > 0$ (корень s_3), то функция (4.7) неограниченно возрастает. Если $\alpha_k = 0$ (корень s_2), то эта функция при $t \rightarrow \infty$ остается конечной, постоянной, не равной нулю — система нейтральна или консервативна. Такая система неасимптотически устойчива.

Каждой паре сопряженных комплексных корней $s_k = \alpha_k + j\beta_k$ и $s_{k+1} = \alpha_k - j\beta_k$ в решении (4.4) соответствуют два слагаемых, которые могут быть объединены в одно слагаемое

$$w_k(t) = 2C_k e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t + \psi_k). \quad (4.8)$$

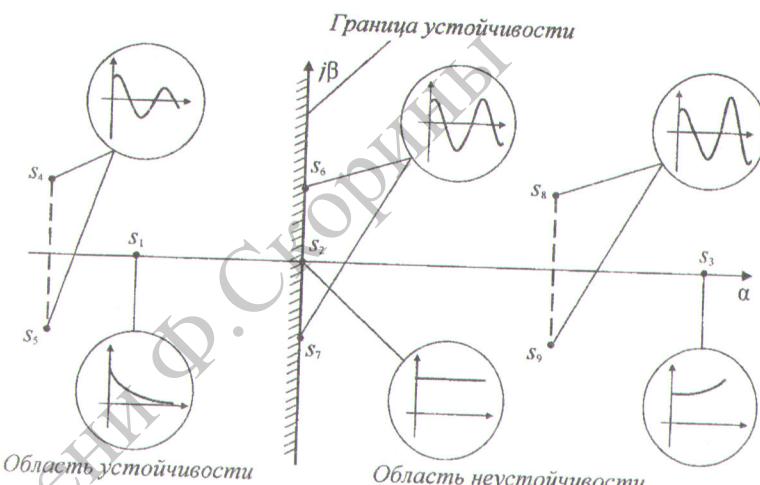


Рисунок 4.1 — Влияние корней характеристического уравнения системы на составляющие ее свободного движения

Функция (4.8) представляет собой синусоиду с частотой β_k и амплитудой, изменяющейся во времени по экспоненте. Если действительная часть двух комплексных корней $\alpha_k < 0$ (рисунок 4.1, корни s_4 и s_5), то колебательная составляющая (4.8) будет затухать. Если $\alpha_k > 0$ (корни s_8 и s_9), то амплитуда колебаний будет неограниченно возрастать. Наконец, если $\alpha_k = 0$ (корни s_6 и s_7 , т.е. если оба сопряженных корня — мнимые $s_k = j\beta_k$, $s_{k+1} = -j\beta_k$), то $w_k(t)$ представляет собой незатухающую синусоиду с частотой β_k . Если среди корней характеристического уравнения (4.5) имеются ℓ равных между собой корней s_k , то в решении (4.4) вместо ℓ слагаемых вида $C_k e^{\alpha_k t}$ появится одна составляющая

$$w(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{\ell-1} t^{\ell-1}) e^{\alpha_k t}. \quad (4.9)$$

Учитывая, что функция вида $e^{-\alpha t}$ при любом α убывает быстрее, чем возрастают слагаемые вида t^ℓ , можно доказать, что и в случае кратности корней решение (4.4) будет стремиться к нулю только при отрицательности

действительной части кратных корней s_l .

На основании проведенного анализа можно сформулировать **общее условие устойчивости**: для асимптотической устойчивости линейной автоматической системы управления необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными.

При этом действительные корни рассматриваются как частный случай комплексных корней, у которых мнимая часть равна нулю. Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то система будет неустойчивой.

Устойчивость системы зависит только от вида корней характеристического уравнения и не зависит от характера внешних воздействий на систему. Устойчивость есть внутреннее свойство системы, присущее ей вне зависимости от внешних условий.

Используя геометрическое представление корней (4.6) на комплексной плоскости (рисунок 4.1) в виде векторов или точек, можно дать **вторую формулировку общего условия устойчивости** (эквивалентную основной): для асимптотической устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения находились в левой полуплоскости.

Если хотя бы один корень находится в правой полуплоскости, то система будет неустойчивой.

Мнимая ось $j\beta$ является границей устойчивости в плоскости корней. Если характеристическое уравнение имеет одну пару чисто мнимых корней ($s_k = j\beta_k, s_{k+1} = -j\beta_k$), а все остальные корни находятся в левой полуплоскости, то в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания с угловой частотой $\omega = |\beta_k|$. В этом случае говорят, что система находится на *колебательной границе устойчивости*.

Сформулированное выше условие для оценки устойчивости линейных

систем было распространено на линеаризованные нелинейные системы А. М. Ляпуновым в 1892 г. [9].

Таким образом, для суждения об устойчивости линейной системы достаточно определить лишь знаки действительных частей корней характеристического уравнения.

В теории автоматического управления разработан ряд правил, с помощью которых можно судить о знаках корней, не решая характеристическое уравнение и не находя числовые значения самих корней. Эти правила называются *критериями устойчивости*.

Критерии асимптотической устойчивости могут быть алгебраическими и частотными. Алгебраические критерии устанавливают необходимые и достаточные условия отрицательности корней в форме ограничений, накладываемых на определенные комбинации коэффициентов характеристического уравнения. Частотные критерии определяют связь между устойчивостью системы и формой частотных характеристик системы.

При анализе устойчивости систем управления обычно решают одну или несколько задач: 1) оценивают, устойчива или нет система при заданных параметрах; 2) определяют допустимый по условию устойчивости диапазон изменения некоторых незаданных параметров системы; 3) выясняют, может ли система при заданной структуре быть в принципе устойчивой.

4.2 Алгебраические критерии устойчивости

Наиболее распространены в инженерной практике критерии Гурвица и Рауса.

Критерий Гурвица был сформулирован и доказан в 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем, который разработал свой критерий, решая чисто математическую задачу — задачу исследования устойчивости

решений линейного дифференциального уравнения. Гурвиц обратился к этой задаче по просьбе словацкого ученого А. Стодолы, занимавшегося вопросами регулирования турбин. Применительно к задачам теории управления критерий Гурвица можно сформулировать так:

автоматическая система, описываемая характеристическим уравнением

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (4.10)$$

устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны все определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ вида

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2i-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{i-2} a_i \end{vmatrix}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

Если хотя бы один из определителей (4.11), называемых определителями Гурвица, отрицателен, то система неустойчива.

Таблицы (4.11), по которым вычисляют определители Гурвица, составляют следующим образом: на главной диагонали записывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_i (в порядке возрастания индекса), затем в каждом столбце выше диагональных коэффициентов записывают коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а ниже — с последовательно убывающими индексами; на место коэффициентов с индексами, которые больше n или меньше нуля, проставляют нули. При этом каждая i -я таблица получается квадратной, размером $i \times i$.

Так как последний столбец главного определителя содержит всегда только один элемент a_n , отличный от нуля, то согласно известному свойству определителей

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (4.12)$$

Если главный определитель $\Delta_n = 0$, а все остальные определите-

положительны, то система находится на границе устойчивости. С учетом выражения (4.12) это условие распадается на два:

$$a_n = 0 \text{ и } \Delta_{n-1} = 0. \quad (4.13)$$

Условию $a_n = 0$ соответствует один нулевой корень, т.е. апериодическая граница устойчивости, а условию $\Delta_{n-1} = 0$ — пара мнимых корней, т.е. колебательная граница устойчивости.

Нетрудно доказать, что для устойчивости систем не выше четвертого порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определитель Δ_{n-1} были положительными.

Критерий Гурвица целесообразно применять для анализа устойчивости систем не выше пятого порядка. При $n > 5$ вычисление определителей становится громоздким.

Критерий Рауса, предложенный в 1877 г. английским математиком Э. Дж. Раусом, целесообразно использовать при анализе устойчивости систем выше четвертого порядка.

Для этого из коэффициентов характеристического уравнения (4.10) составляют таблицу (таблица 4.1), в первой строке ($i = 1$) которой записаны коэффициенты уравнения с четными индексами, во второй ($i = 2$) — с нечетными индексами, в последующих строках ($i > 3$) поменяны коэффициенты Рауса, полученные как комбинации коэффициентов двух вышестоящих строк по формуле

$$r_{ik} = r_{i-2, k+1} - (r_{i-2, 1} r_{i-1, k+1}) / r_{i-1, 1}, \quad (4.14)$$

где i — номер строки, k — номер столбца.

Сам критерий формулируется так: *автоматическая система устойчива, если положительны все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса (включая a_0 и a_1)*.

Если не все коэффициенты столбца положительны, то система неустойчива. При этом число перемен знака среди этих коэффициентов

соответствует числу правых корней характеристического уравнения.

Таблица 4.1 — Коэффициенты Руаса

Строка	Столбец					
	1	2	3	...	k	...
1	$r_{11} = a_0$	$r_{12} = a_2$	$r_{13} = a_4$...	r_{1k}	...
2	$r_{21} = a_1$	$r_{22} = a_3$	$r_{23} = a_5$...	r_{2k}	...
3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	...	r_{3k}	...
...
i	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	...	r_{ik}	...
...
$n + 1$	$r_{n+1,1}$	$r_{n+1,2}$	$r_{n+1,3}$...	$r_{n+1,k}$...

Алгоритм вычисления коэффициентов (4.14) легко запрограммировать, поэтому критерий Руаса используют для анализа систем высокого порядка ($n > 5$) с помощью ЭВМ.

Преимуществом критериев Гурвица и Руаса является то, что с их помощью можно оценивать устойчивость как замкнутых, так и разомкнутых систем. Вывод об устойчивости при применении этих критериев делается применительно к той системе (замкнутой или разомкнутой), уравнение которой анализируется.

4.3 Критерий Михайлова

Критерий Михайлова относится к группе частотных критериев устойчивости. Он был сформулирован и обоснован в 1936 г. советским ученым А. В. Михайловым в работе «Гармонический метод в теории регулирования», которая получила высокую оценку и послужила началом

широкого применения частотных методов в теории автоматического управления.

Критерий Михайлова так же, как критерий Гурвица и Руаса, основан на анализе характеристического уравнения системы, поэтому с его помощью можно судить об устойчивости замкнутых и разомкнутых систем.

Пусть левая часть характеристического уравнения, называемая *характеристическим полиномом*, имеет вид

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4.15)$$

Подставим в этот полином вместо переменной s чисто мнимый корень, который в дальнейшем будем обозначать $j\omega$. Тогда получим функцию комплексной переменной

$$F(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n, \quad (4.16)$$

которую можно так же, как амплитудно-фазовую характеристику, представить в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (4.17)$$

Действительная часть $P(\omega)$ содержит только четные степени переменной ω :

$$P(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \quad (4.18)$$

и мнимая часть $Q(\omega)$ — только нечетные:

$$Q(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots \quad (4.19)$$

Каждому фиксированному значению переменной ω соответствует комплексное число, которое можно изобразить в виде вектора на комплексной плоскости. Если теперь изменять параметр ω от 0 до ∞ , то конец вектора $F(\omega)$ опишет некоторую линию (рисунок 4.2, а), которая называется *характеристической кривой* или *голографом Михайлова*. По виду этой кривой можно судить об устойчивости системы.

Формулировка критерия Михайлова: автоматическая система управления, описываемая уравнением n -го порядка, устойчива, если при

изменении ω от 0 до ∞ характеристический вектор системы $F(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол $\pi/2$, не обращаясь при этом в нуль.

Это означает, что характеристическая кривая устойчивой системы должна при изменении ω от 0 до ∞ пройти последовательно через n квадрантов. Из выражений (4.18) и (4.19) следует, что кривая $F(j\omega)$ всегда начинается в точке на действительной оси, удаленной от начала координат на величину a_n .

Характеристические кривые, соответствующие устойчивым системам (рисунок 4.2, б), имеют плавную спиралеобразную форму и уходят в бесконечность в том квадранте, номер которого равен порядку уравнения. Если характеристическая кривая проходит n квадрантов не последовательно или проходит меньшее число квадрантов, то система неустойчива (рисунок 4.2, в).

Если кривая $F(j\omega)$ проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости. Действительно, если характеристическое уравнение имеет один нулевой корень $s_k = 0$ (апериодическая граница устойчивости) или одну пару чисто мнимых корней $s = \pm j\beta_k$ (колебательная граница устойчивости), то функция $F(j\omega)$ при $\omega = 0$ или $\omega = \beta_k$ обратится в нуль. В практических расчетах удобно применять следствие из критерия Михайлова: система устойчива, если действительная и мнимая части характеристической функции $F(j\omega)$ обращаются в нуль поочередно (рисунок 4.2, г), т.е. если корни уравнений

$$P(\omega) = 0 \text{ и } Q(\omega) = 0 \quad (4.20)$$

перемежаются.

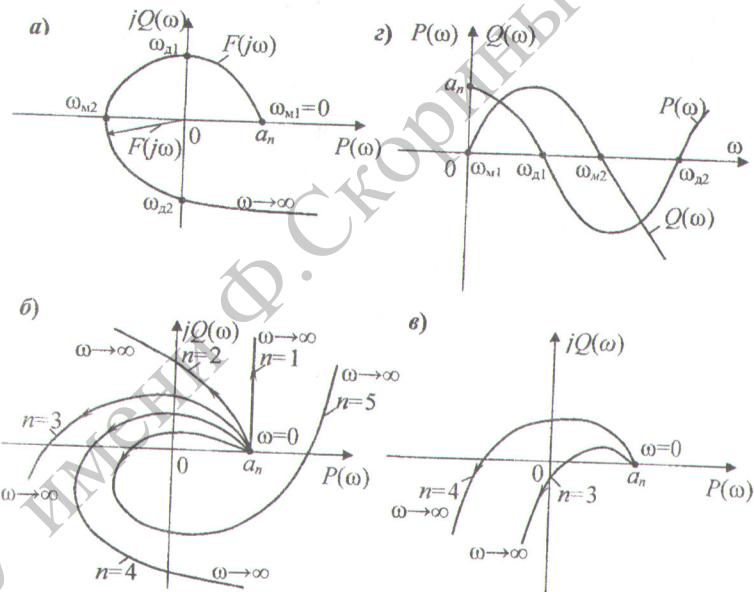


Рисунок 4.2 — Характеристические кривые (годографы) Михайлова

Это утверждение вытекает непосредственно из формулировки критерия Михайлова — из условия последовательного прохождения кривой $F(j\omega)$ через n квадрантов.

Критерий Михайлова удобно применять для анализа устойчивости систем высокого порядка ($n > 5$).

4.4 Критерий Найквиста

Критерий был сформулирован в 1932 г. американским физиком Х. Найквистом, занимавшимся исследованием свойств электронных усилителей с обратной связью. Позднее А. В. Михайлов обосновал этот критерий и показал возможность применения его для анализа

автоматических систем управления.

В отличие от критериев Гурвица, Рауса и Михайлова, которые основаны на анализе характеристического уравнения системы, критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутого контура системы. В этом заключается существенное преимущество критерия, так как построение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутого контура для большинства реальных систем оказывается проще, чем построение годографа Михайлова. Особенно упрощается это построение для одноконтурных систем, состоящих из типовых звеньев. А в тех случаях, когда неизвестно математическое описание одного или нескольких конструктивных элементов системы и оценка их свойств возможна только путем экспериментального определения частотных характеристик, критерий Найквиста является единственным пригодным.

Основная формулировка критерия Найквиста: *автоматическая система управления устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ разомкнутого контура не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$.* Эта формулировка справедлива для **систем, которые в разомкнутом состоянии устойчивы**. Таковыми являются большинство реальных систем, состоящих из устойчивых элементов.

На рисунке 4.3, *a* изображены амплитудно-фазовые характеристики разомкнутого контура, соответствующие трем различным случаям: система устойчива (кривая 1); система находится на колебательной границе устойчивости (кривая 2); система неустойчива (кривая 3).

Употребленное в формулировке критерия Найквиста понятие охвата точки имеет некоторую неопределенность, из-за чего в случаях сложной формы кривой $W(j\omega)$ могут возникнуть затруднения в суждении об устойчивости системы. Поэтому для большей ясности рекомендуется следующий прием. Надо проследить мысленно за движением вектора

$W_1(j\omega) = 1 + W(j\omega)$, вращающегося вокруг точки $(-1; j0)$ и скользящего по кривой $W(j\omega)$. Угол поворота вектора $W_1(j\omega)$, равный π , означает охват точки $(-1; j0)$, а угол, меньший π — не охват.

Для использования изложенного приема применительно к астатическим системам, которые содержат интегрирующее звено и амплитудно-фазовые характеристики которых начинаются в $-\infty$ на мнимой оси, характеристику $W(j\omega)$ предварительно дополняют в четвертом квадранте дугой окружности бесконечно большого радиуса.

Для суждения об устойчивости систем, имеющих АФХ сложной конфигурации, когда кривая АФХ пересекает действительную ось левее точки $(-1; j0)$ несколько раз, можно также использовать **правило переходов**, сформулированное советским ученым Я. З. Цыпкиным: АФХ не охватывает точку $(-1; j0)$, т.е. система устойчива, если при возрастании ω разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов АФХ через ось абсцисс слева от точки $(-1; j0)$ равна нулю.

Если АФХ начинается или заканчивается на отрезке $(-\infty; -1)$, то считают, что характеристика совершает полперехода. Частота, при которой амплитудная характеристика $A(\omega)$ [модуль функции $W(j\omega)$] принимает значение 1, называется *частотой среза* и обозначается ω_{cp} . Частоту, при которой фазовый сдвиг $\phi(\omega) = -\pi$, обозначают ω_π .

Пользуясь введенными обозначениями, можно записать условие нахождения системы на границе устойчивости:

$$\omega_{cp} = \omega_\pi \quad (4.21)$$

Частота, с которой система колебается на границе устойчивости, называется *критической* и обозначается ω_{kp} .

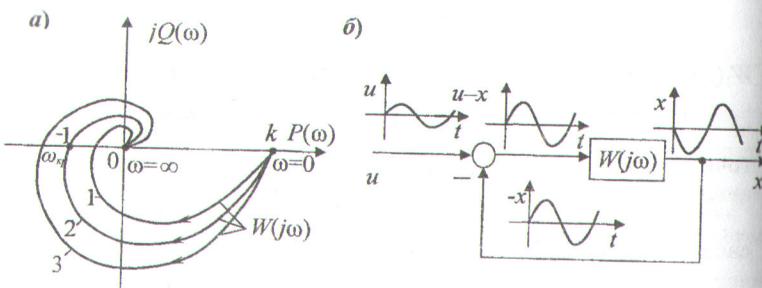


Рисунок 4.3 — Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутого контура (а) и физическая трактовка (б) критерия Найквиста

Физическая трактовка основной формулировки критерия Найквиста.

Предположим, что на входе системы (рисунок 4.3, б) действует гармонический сигнал $u(t) = u_m \sin \omega t$ с малой амплитудой u_m . Пусть частота ω равна частоте ω_π , при которой фазовый сдвиг $\phi(\omega)$, создаваемый звеном $W(j\omega)$, равен $-\pi$. Тогда сигнал обратной связи окажется в фазе с сигналом $u(t)$, и мгновенные значения сигналов будут суммироваться.

Если на частоте $\omega = \omega_\pi$ модуль $|W(j\omega_\pi)| = 1$, т.е. выполняется условие (5.21), то в контуре системы будут поддерживаться незатухающие колебания даже после исчезновения внешнего воздействия $u(t)$, т.е. система будет находиться на границе устойчивости. Характеристика $W(j\omega)$ при этом проходит через точку $(-1; j0)$. Если на частоте $\omega = \omega_\pi$ модуль $|W(j\omega_\pi)| < 1$, то после исчезновения внешнего воздействия колебания в контуре затухнут, т.е. система устойчива, характеристика не охватывает точку $(-1; j0)$. Если же модуль $|W(j\omega_\pi)| > 1$, то амплитуда сигналов в контуре будет неограниченно возрастать, т.е. система будет неустойчивой. Характеристика $W(j\omega)$ в этом случае охватит точку $(-1; j0)$.

Таким образом, особая роль точки $(-1; j0)$ заключается в том, что она, во-первых, соответствует превращению отрицательной обратной связи в

положительную, и во-вторых, является граничной между режимами усиления и ослабления сигналов звеном $W(j\omega)$.

Иногда на практике встречаются системы, в контуре которых имеется один или несколько неустойчивых элементов. Такие **системы в разомкнутом состоянии неустойчивы**. Для суждения об их устойчивости необходимо использовать **другую формулировку критерия Найквиста**: *автоматическая система управления устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ разомкнутого контура охватывает $l/2$ раз точку с координатами $(-1; j0)$, где l — число правых корней характеристического уравнения разомкнутого контура.*

Количество охватов при этом можно определять по правилу Цыпкина как разность между числом положительных и отрицательных переходов.

Данная формулировка критерия Найквиста является более общей, чем предыдущая. Действительно, если разомкнутая система устойчива (т. е. $l = 0$), то для устойчивости замкнутой системы АФХ $W(j\omega)$ должна точку $(-1; j0)$ охватывать нуль раз, т.е. не охватывать.

Из обеих формулировок следует, что для суждения об устойчивости системы необходимо предварительно установить устойчивость ее в разомкнутом состоянии. Обычно эта вспомогательная задача решается сравнительно легко, при помощи критерия Гурвица: для этого приравнивают к нулю знаменатель передаточной функции $W(s)$ разомкнутого контура и анализируют данное характеристическое уравнение.

Во многих практических случаях устойчивость разомкнутого контура может быть оценена без каких-либо вычислений непосредственно по виду входящих в контур звеньев.

Критерий Найквиста удобно использовать для анализа устойчивости систем, содержащих звено запаздывания. Если звено запаздывания включено последовательно с остальными звеньями (рисунок 4.4, а),

то амплитудно-фазовая функция разомкнутого контура может быть представлена как произведение

$$W(j\omega) = W'(j\omega)e^{-j\omega\tau}, \quad (5.22)$$

где $W'(j\omega)$ — эквивалентная амплитудно-фазовая функция остальных звеньев.

Характеристику $W(j\omega)$ строят следующим образом. Вначале строят кривую $W'(j\omega)$, а затем каждый вектор, соответствующий частоте ω , поворачивают на угол $\omega_i\tau$ (рисунок 4.4, б).

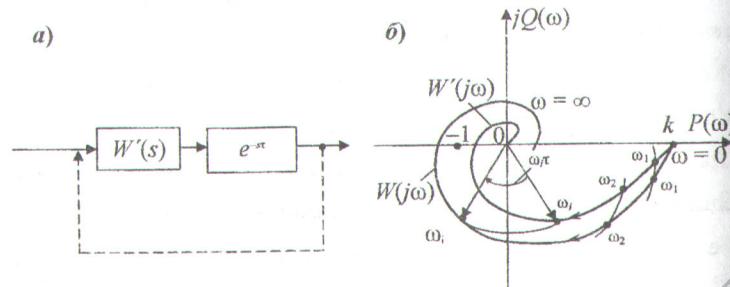


Рисунок 4.4 — Оценка устойчивости системы с запаздыванием:
структуре системы (а); АФХ разомкнутого контура (б)

Звенья запаздывания, как правило, ухудшают устойчивость систем.

Если разомкнутый контур системы образован последовательным соединением типовых динамических звеньев, то целесообразно частотную характеристику контура строить в логарифмической системе координат и об устойчивости системы судить по виду этой характеристики. При этом используют разновидность основной формулировки критерия Найквиста: система устойчива, если при достижении фазовой частотной характеристикой значения -180° логарифмическая амплитудная

характеристика будет отрицательной (рисунок 4.5, кривые 1). Действительно, если $L(\omega) < 0$, то $A(\omega) < 1$. Поэтому отрицательность $L(\omega)$ при $\phi(\omega_\pi) = -180^\circ$ свидетельствует о том, что АФХ разомкнутого контура не охватывает точку $(-1; j0)$.

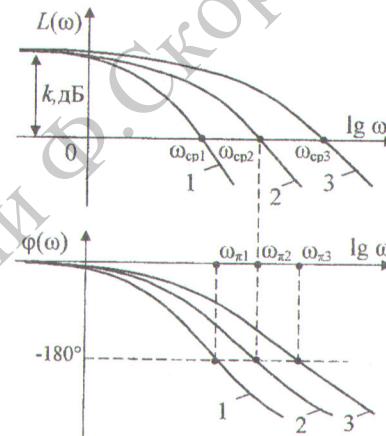


Рисунок 4.5 — Логарифмические частотные характеристики статических систем: 1 — устойчивой; 2 — находящейся на границе устойчивости; 3 — неустойчивой

Логарифмические частотные характеристики $L(\omega)$ и $\phi(\omega)$ разомкнутого контура находят суммированием ординат соответствующих характеристик отдельных звеньев. Фазовые характеристики отдельных звеньев строят либо по нескольким вычисленным точкам, либо при помощи специальных шаблонов. Амплитудные характеристики отдельных звеньев строят приближенно в виде совокупности прямолинейных отрезков, по правилам, изложенным в разделе 3.

Критерий Найквиста, применяемый в логарифмической системе координат, часто называют логарифмическим критерием.

Контрольные задания и вопросы

- 1 Дайте определение понятия «устойчивость движения» по Ляпунову.
- 2 Запишите соответствующее этому физическому определению математическое условие асимптотической устойчивости системы.
- 3 Сформулируйте общее условие устойчивости линейной системы. Объясните, почему действительные корни характеристического уравнения системы должны быть обязательно отрицательными.
- 4 Покажите (используя необходимое условие устойчивости), что одноконтурная статическая система с положительной обратной связью и передаточным коэффициентом $|k| > 1$ всегда неустойчива.
5. Какие типовые динамические звенья ухудшают структурную устойчивость одноконтурных систем и какие улучшают ее?
6. Как влияет общий передаточный коэффициент разомкнутого контура системы на ее устойчивость в замкнутом состоянии?

5 Оценка качества управления

5.1 Понятие и показатели качества управления

Качество автоматической системы, как и любого технического устройства, может быть оценено такими общепринятыми показателями, как масса системы, ее габариты, стоимость, надежность, долговечность и т. п. В совокупности эти общетехнические показатели характеризуют качество автоматической системы в широком смысле.

В теории автоматического управления и в практике автоматизации термины «качество системы», «качество управления» используют, как правило, в более узком смысле: рассматривают только статические и динамические свойства системы. Эти свойства предопределяют точность поддержания управляемой величины (выходной величины объекта) на заданном уровне в установившихся и переходных режимах, т. е. обеспечивают эффективность процесса управления. Для такого, более узкого понятия качества автоматической системы, охватывающего только ее статические и динамические свойства, применяют термин «качество управления», а сами свойства системы, выраженные в количественной форме, называют *показателями качества управления*.

Точность системы в установившихся режимах как одна из важнейших характеристик качества управления была рассмотрена в разделе 3.9. Здесь будут рассмотрены показатели качества, характеризующие точность системы в переходных режимах.

Точность системы в переходных режимах оценивают при помощи прямых и косвенных показателей. Прямые показатели определяют по графику переходного процесса, возникающего в системе при ступенчатом внешнем воздействии. Косвенные показатели качества определяют по распределению корней характеристического уравнения или по частотным характеристикам

системы.

К особой категории показателей качества относятся так называемые *интегральные оценки*, которые вычисляют либо непосредственно по переходной функции системы, либо по коэффициентам передаточной функции системы.

Точность системы в переходных режимах определяется величинами отклонений управляемой переменной $x(t)$ от заданного значения $u(t)$ и длительностью существования этих отклонений. Величина и длительность отклонений зависит от характера переходного процесса в системе. Характер переходного процесса, в свою очередь, зависит как от свойств системы, так и от места приложения внешнего воздействия.

При самой общей оценке качества обращают внимание прежде всего на форму переходного процесса. Различают следующие **типовыепереходные процессы** (рисунок 5.1): **колебательный** (кривая 1), **монотонный** (кривая 2) и **апериодический** (кривая 3).

Рассмотрим основные показатели качества управления применительно к типовой одноконтурной системе регулирования (рисунок 3.14, б).

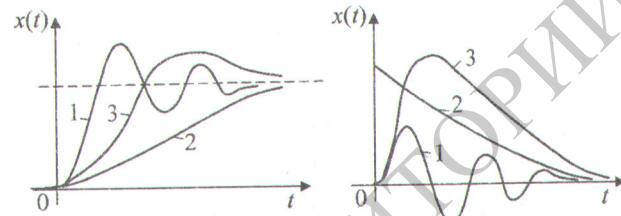


Рисунок 5.1 — Типовые переходные процессы: по заданию (а);
по возмущению (б)

Прямые показатели. На графиках переходных процессов, вызванных ступенчатым изменением задающего воздействия u (рисунок 5.2, а) и на возмущения y_v , действующего на входе объекта (рисунок 5.2, б), за-

чало отсчета для выходной величины $x(t)$ принято значение $x(-0)$, которое было до подачи ступенчатого воздействия.

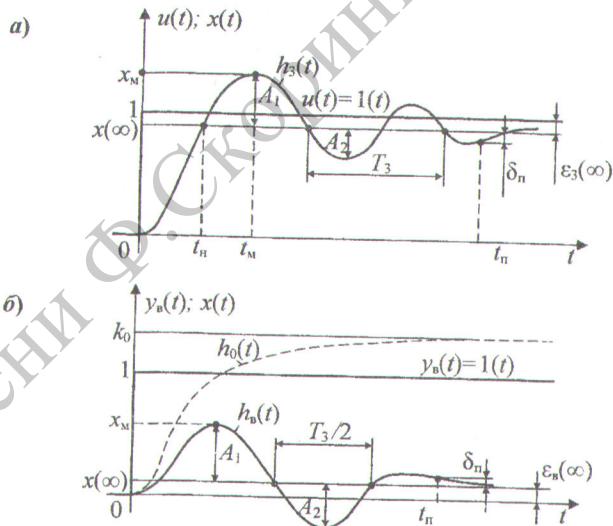


Рисунок 5.2 — Прямые показатели качества процесса регулирования:
по каналу задания (а); по каналу возмущения (б)

Одним из главных прямых показателей качества является *перерегулирование* $\sigma(\%)$, которое равно отношению первого максимального отклонения управляемой переменной $x(t)$ от ее установившегося значения $x(\infty)$ к этому установившемуся значению (рисунок 5.2, а):

$$\sigma = \frac{x_m - x(\infty)}{x(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{x(\infty)} \cdot 100. \quad (5.1)$$

Качество управления считается удовлетворительным, если перерегулирование не превышает 30...40 %.

Для переходных процессов, вызванных возмущающим воздействием y_v на входе объекта (рисунок 5.2, б), перерегулирование можно определять как отношение второго (отрицательного) максимального отклонения A_2 к пер-

вому максимальному отклонению A_1 ,

$$\sigma = \frac{A_2}{x_m - x(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100. \quad (5.2)$$

Показатель, вычисляемый по данной формуле для переходных процессов по каналу возмущения, называют также *колебательностью*. Другой важной характеристикой таких процессов служит *динамический коэффициент регулирования* R_d (%), который равен отношению первого максимального отклонения x_m к отклонению выходной переменной $x(t)$ нерегулируемого объекта, вызванному тем же возмущением, т. е.

$$R_d = \frac{x_m}{k_0} \cdot 100. \quad (5.3)$$

Коэффициент R_d показывает, насколько эффективно компенсирующее действие регулятора на объект.

Отметим, что и само первое максимальное отклонение x_m , возникающее от возмущения на входе объекта, является показателем качества. При формировании требований к системе указывают допустимое значение максимального отклонения (непосредственно в единицах измерения управляемой величины).

Длительность существования динамических отклонений управляемой величины $x(t)$ от ее нового установившегося значения $x(\infty)$ принято оценивать с помощью нескольких характерных моментов времени. Самым важным из этой группы показателей является *длительность переходного процесса (время регулирования)* t_n — интервал времени от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого отклонения управляемой величины $x(t)$ от ее нового установившегося значения $x(\infty)$ становятся меньше некоторого заданного числа δ_n , т. е. до момента, после которого выполняется условие $|x(t) - x(\infty)| \leq \delta_n$.

В промышленной автоматике величину δ_n принимают обычно равной 5% от установившегося значения $x(\infty)$ [$\delta_n = 0,05 x(\infty)$]. При оценке длительно-

сти переходных процессов, вызванных единичным возмущающим воздействием y_b на входе объекта (рисунок 5.2, б), величину δ_n можно принимать равной 5% от значения передаточного коэффициента объекта k_0 [$\delta_n = 0,05 k_0$], а для процессов, вызванных воздействием x_b на выходе объекта, — 5 % от начального отклонения $x(+0)$ [$\delta_n = 0,05 x(+0)$].

Дополнительными временными показателями качества являются (рисунок 5.2, а): время нарастания t_{n1} , время достижения первого максимума t_m и период затухающих колебаний T_3 . Эти показатели вместе с t_n характеризуют быстродействие системы регулирования.

Прямым показателем качества служит также *степень затухания*

$$\psi = (A_1 - A_3)/A_1 = 1 - A_3/A_1, \quad (5.4)$$

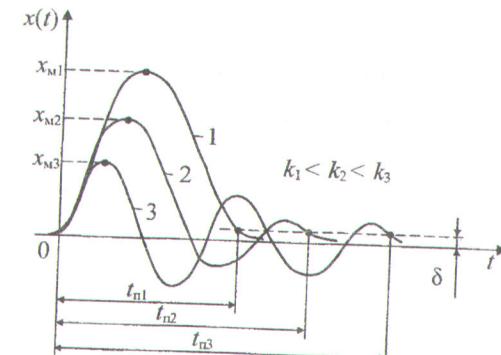


Рисунок 5.3 — Влияние передаточного коэффициента разомкнутого контура на показатели переходного процесса

где A_1 и A_3 — соседние максимальные отклонения (амплитуды) одного знака. Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если $\psi = 0,75 \dots 0,95$.

Колебательность системы можно оценивать, наряду с показателями σ и ψ , числом переходов N величины $x(t)$ через установленное значение $x(\infty)$ на интервале t_n .

Три главных показателя качества — перерегулирование σ , первое максимальное отклонение x_m и длительность t_n — тесно связаны между собой. Они зависят от всех параметров системы, но наиболее сильно — от передаточного коэффициента разомкнутого контура. Причем, с увеличением этого коэффициента максимальное отклонение по каналу возмущения всегда уменьшается, а перерегулирование и длительность переходного процесса, как правило, увеличиваются (рисунок 5.3). Отыскание оптимального компромисса между этими двумя противоречивыми тенденциями является одной из основных задач синтеза систем управления.

Рассмотренные прямые показатели качества удобно использовать в тех случаях, когда график переходного процесса $x(t)$ можно получить экспериментально в реальной системе регулирования или путем моделирования системы на ЭВМ. Если же такой возможности нет или она связана с определенными трудностями решения или моделирования дифференциальных уравнений высокого порядка, то пользуются косвенными показателями качества, которые вычисляются без построения графика переходного процесса, по коэффициентам уравнения или по частотным характеристикам системы.

Частотные показатели. Наиболее важными и одновременно удобными косвенными показателями являются *частотные показатели*, которые определяются по частотным характеристикам замкнутого и разомкнутого контура системы.

По амплитудной частотной характеристике $A(\omega)$ замкнутой системы по основному каналу $u \rightarrow x$ (рисунок 5.4) оценивают *частотный показатель колебательности* M , равный отношению максимума A_m характеристики к ее начальному значению $A(0)$:

$$M = A_m/A(0). \quad (5.5)$$

Чем больше это отношение, тем сильнее колебательность системы (тем больше перерегулирование σ) и, как следствие, больше длительность пере-

ходного процесса t_n . Качество системы считается обычно удовлетворительным, если показатель M находится в пределах 1,1...1,5.

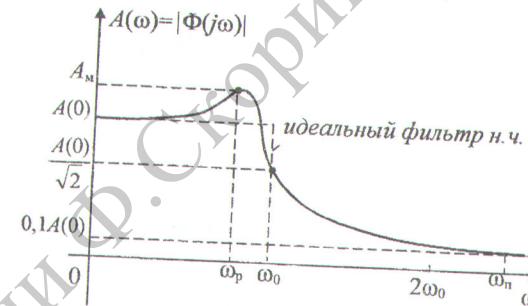


Рисунок 5.4 — Частотные показатели качества

Косвенными частотными показателями быстродействия системы служат характеристические частоты (рисунок 5.4): *резонансная частота* ω_p , частота незатухающих колебаний $\omega_0 \approx \omega_p$ и *частота пропускания* $\omega_n \approx 3\omega_0$.

По АФХ $W(j\omega)$ разомкнутого контура определяют *запас устойчивости по амплитуде* (рисунок 5.5, а)

$$\Delta A = 1 - A(\omega_n) \quad (5.6)$$

и *запас устойчивости по фазе* (рисунок 5.5, б)

$$\Delta\phi = \pi - |\phi(\omega_{cp})|, \quad (5.7)$$

которые вместе характеризуют удаленность кривой $W(j\omega)$ от критической точки $(-1, j0)$. При проектировании систем обычно задаются запасом по амплитуде $\Delta A \geq 0,5 \dots 0,6$ и по фазе $\Delta\phi \geq 30^\circ \dots 60^\circ$. При этом обеспечивается, как правило, и удовлетворительное качество процесса управления.

При решении задач синтеза систем запасы устойчивости удобней давать в логарифмических координатах (рисунок 5.5, б). В этом случае запас устойчивости по амплитуде определяют по выражению

$$\Delta L = 20 \lg A(\omega_n). \quad (5.8)$$

Указанным выше значениям ΔA соответствует $\Delta L \geq 6 \dots 8$ дБ.

Корневые показатели. Для косвенной оценки качества управления

используют также *корневые показатели*, определяемые по расположению на комплексной плоскости (рисунок 5.6, а) корней s_1, s_2, \dots, s_n характеристического уравнения замкнутой системы

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.9)$$

Наиболее общим корневым показателем качества является *среднее геометрическое значение модулей корней*

$$\alpha_0 = +\sqrt[n]{|s_1 s_2 \dots s_n|}, \quad (5.10)$$

которое легко вычисляется через крайние коэффициенты характеристического уравнения

$$\alpha_0 = +\sqrt[n]{a_n / a_0}. \quad (5.11)$$

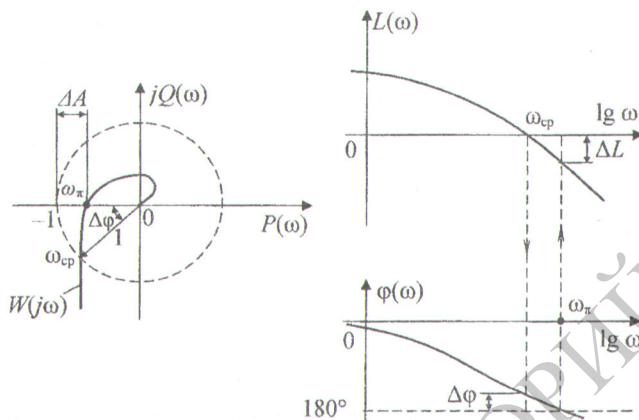


Рисунок 5.5 — Запасы устойчивости систем

Среднегеометрический корень α_0 определяет на действительной оси комплексной плоскости $\alpha - j\beta$ (рисунок 5.6, а) точку, являющуюся геометрическим центром всех корней характеристического уравнения. Величина α_0 имеет размерность c^{-1} и служит обобщенной мерой быстродействия системы: чем меньше показатель α_0 , тем ближе «созвездие» корней к мнимой оси и тем больше длительность переходного процесса.

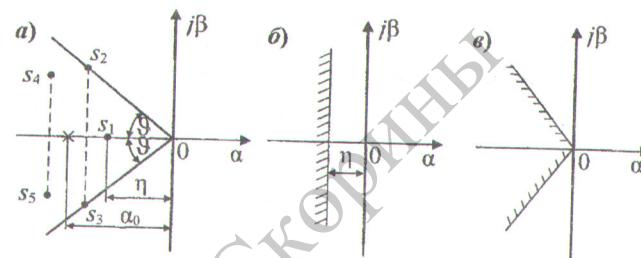


Рисунок 5.6 — Корневые показатели качества (а), область корней с заданной степенью устойчивости (б) или колебательности (в)

В чиситель подкоренного выражения в формуле (5.11) входит коэффициент a_n , который зависит от передаточного коэффициента k разомкнутого контура: для статических систем $a_n = 1 + k$, астатических $a_n = k$. Отсюда можно сделать вывод: чем больше коэффициент k , тем лучше быстродействие системы (при прочих равных условиях — одинаковой конфигурации «созвездия» корней).

Основное влияние на характер переходного процесса оказывают корни, расположенные ближе к мнимой оси, которые дают наиболее длительные составляющие переходного процесса и называются *доминирующими*.

Расстояние от мнимой оси до ближайшего к ней корня называется *степенью устойчивости* η . Если ближайший корень действительный (рисунок 5.6, а, корень s_1), то доминирующей составляющей переходного процесса будет экспонента с показателем степени $s_k = -\eta$

$$x_k(t) = C_k e^{-\eta t}, \quad (5.12)$$

если же ближайшими к мнимой оси являются два сопряженных комплексных корня, то доминирующей будет одна колебательная составляющая, которая затухает также по экспоненциальному закону (5.12). В обоих случаях длительность переходного процесса (для $\delta_n = 0,05 C_k$) определяется приближенной формулой

$$t_n \leq 3/\eta, \quad (5.13)$$

где знак равенства относится к случаю действительного доминирующего корня, а знак неравенства — к случаю комплексных доминирующих корней.

При выборе настроек параметров регулятора всегда стремятся скомпенсировать (исключить из уравнения) доминирующие (наименьшие корни), которым соответствуют наибольшие постоянные времени объекта, и тем самым улучшить быстродействие системы.

Колебательные свойства системы регулирования предопределяет та k -я пара комплексных корней $s_k = \alpha_k \pm j\beta_k$, для которой наибольшее отношение

$$\mu_k = |\beta_k| / |\alpha_k| \quad (5.14)$$

или наибольший угол ϑ между двумя симметричными лучами (рисунок 5.6, a). В данном случае такой парой, предопределяющей доминирующую колебательную составляющую переходного процесса, являются комплексные корни s_2 и s_3 .

Отношение μ_d мнимой части β к действительной части α доминирующей пары комплексных корней называют *степенью колебательности*.

В практических расчетах чаще используют *корневой показатель колебательности*

$$m_d = \alpha_k / \beta_k = 1/\mu_d, \quad (5.15)$$

также определяемый через доминирующую пару комплексных корней. При выборе настроек регуляторов стремятся получить значения $m_d = 0,2 \dots 0,5$.

Специальными математическими исследованиями установлено, что в системе любого порядка наиболее быстрый апериодический переходный процесс имеет место, когда все n корней равны между собой.

5.2 Интегральные показатели качества

Каждый из рассмотренных выше прямых и косвенных показателей качества характеризует только одно какое-либо свойство системы, один признак переходного процесса или частотной характеристики. Причем, все показатели связаны с настроенными параметрами регулятора сложными зависимостями, имеющими, как правило, противоречивый характер: изменение параметра приводит к улучшению одних показателей качества и к ухудшению других. Это обстоятельство существенно затрудняет выбор параметров регулятора. Поэтому в инженерной практике широко используются интегральные показатели или оценки качества.

Интегральные оценки представляют собой определенные интегралы по времени (в пределах от 0 до ∞) от некоторой функции управляемой переменной $x(t)$ [или сигнала ошибки $\varepsilon(t)$]:

$$Q = \int_0^{\infty} f_0[x(t), t] dt. \quad (5.16)$$

Подынтегральная функция f_0 выбирается таким образом, чтобы интеграл (5.16) лучше характеризовал качество системы и проще выражался через коэффициенты передаточной функции замкнутой системы. Чтобы интеграл был сходящимся, в функцию f_0 вводят не абсолютные значения $x(t)$ или $\varepsilon(t)$, а их отклонения от конечных, установившихся значений. Простейшей интегральной оценкой является *линейная интегральная оценка*

$$Q_a = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)] dt, \quad (5.17)$$

которая равна площади, заключенной между прямой $x(\infty)$ и кривой переходного процесса $x(t)$ (рисунок 5.7, a). Интегральная оценка (5.17) учитывает как величину динамических отклонений, так и длительность их существования. Поэтому *чем меньше оценка, тем лучше качество процесса управления*.

Разность под знаком интеграла (5.17) равна динамической или переходной составляющей сигнала ошибки:

$$x(\infty) - x(t) = u - \varepsilon(\infty) - x(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(\infty) = \varepsilon_n(t), \quad (5.18)$$

поэтому интегральную оценку (5.17) чаще определяют в таком виде

$$Q_n = \int_0^t \varepsilon_n(t) dt = \int_0^t [\varepsilon(t) - \varepsilon(\infty)] dt. \quad (5.19)$$

Интеграл (5.19) соответствует площади под кривой переходной составляющей сигнала ошибки, вызванной изменением задающего воздействия (рисунок 5.7, а) или возмущающего воздействия (рисунок 5.7, б). Площадь под кривой $\varepsilon_n(t)$ будет тем меньше, чем быстрее заканчивается переходный процесс и чем меньше отклонения сигнала $x(t)$ от u . Поэтому настроочные параметры регулятора необходимо выбирать таким образом, чтобы интегральная оценка была минимальна.

Недостатком линейной интегральной оценки Q_n является то, что ее можно применять только для заведомо не колебательных, апериодических переходных процессов. Интеграл (5.19), вычисленный для знакопеременной кривой 1, (рисунок 5.7, в) будет существенно меньше интеграла, вычисленного для апериодической кривой 2 (хотя качество переходного процесса 2 явно лучше).

В связи с этим для колебательных переходных процессов применяют такие интегральные оценки, знакопеременность подынтегральной функции которых тем или иным способом устранена.

Такими оценками являются, например, *модульная интегральная оценка*

$$Q_m = \int_0^t |\varepsilon_n(t)| dt \quad (5.20)$$

и ее модификация

$$Q'_m = \int_0^t |\varepsilon_n(t)| dt. \quad (5.21)$$

Оценка (5.21) придает больший вес тем значениям сигнала ошибки, которые имеют место в конце переходного процесса.

Оценки (5.20) и (5.21) можно использовать только при исследовании систем на моделях, так как их вычисление через коэффициенты передаточной функции без нахождения $\varepsilon_n(t)$ невозможно.

При анализе и синтезе систем регулирования с колебательными свойствами наиболее широко используется *квадратичная интегральная оценка*

$$Q_{KB} = \int_0^t \varepsilon_n^2(t) dt, \quad (5.22)$$

которая равна площади под кривой ε_n (рисунок 5.7, г).

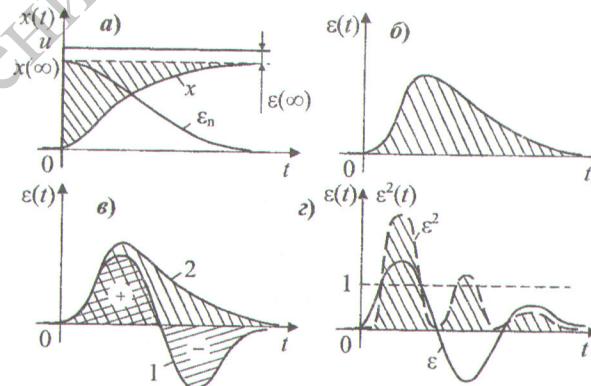


Рисунок 5.7 — Интегральные оценки качества

Квадратичная оценка (5.22) так же, как и линейная, учитывает величину и длительность отклонений. Однако из-за возведения сигнала $\varepsilon_n(t)$ в квадрат первые (большие) отклонения приобретают в конечном значении интеграла существенно больший вес, чем последующие (малые) отклонения. Поэтому минимальные значения оценки (5.22) всегда соответствуют колебательным процессам с малым затуханием.

С целью устранения этого недостатка применяют *улучшенную квадра-*

тичную оценку

$$Q_{KB} = \int_0^{\infty} [\varepsilon_n^2(t) + T_b^2 \varepsilon'_n(t)] dt, \quad (5.23)$$

которая, кроме самих отклонений, учитывает с весовым коэффициентом T_b^2 производную отклонений. Обычно весовой коэффициент T_b выбирают равным желаемому времени нарастания t_n или принимают в пределах

$$t_n/6 \leq T_b \leq t_n/3, \quad (5.24)$$

где t_n — желаемая длительность переходного процесса.

Преимуществом квадратичных оценок (5.22) и (5.23) является возможность их вычисления без предварительного отыскания переходного процесса непосредственно по коэффициентам передаточной функции замкнутой системы, записанной для сигнала ошибки в следующей стандартной форме:

$$\Phi_e(s) = \frac{\varepsilon(s)}{u(s)} = \frac{-\varepsilon(s)}{x_b(s)} = \frac{1}{1 + W_p(s) + W_o(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (5.25)$$

Для вычисления квадратичной оценки (5.22) необходимо предварительно найти изображение $\varepsilon(s)$ переходной составляющей $\varepsilon_n(t)$ сигнала ошибки, которое при единичном ступенчатом воздействии $u(t)$ или $x_b(t)$ равно

$$\varepsilon_n(s) = \frac{1}{s} [\Phi_e(s) - \Phi_e(0)]. \quad (5.26)$$

Далее изображение (5.26) записывают как отношение следующих полиномов:

$$\varepsilon_n(s) = \frac{c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + \dots + c_{n-1}}{d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n} = \frac{C(s)}{D(s)}. \quad (5.27)$$

Для вычисления квадратичной оценки (5.22) по изображению (5.27) используют равенство Парсеваля (2.23), которое в данном случае имеет вид

$$Q_{KB} = \int_0^{\infty} \varepsilon_n^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{C(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (5.28)$$

Значения интеграла (5.28) для стандартных подынтегральных выраже-

ний в виде отношения полиномов (5.27), степени которых равны n и $n-1$, удобно находить по общей формуле

$$Q_{KB} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|C(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(j\omega)}{|D(j\omega)|^2} d\omega = (-1)^{n+1} \frac{\Delta_o}{2d_0 \Delta}, \quad (5.29)$$

где

$$D(j\omega) = d_0 (j\omega)^n + d_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + d_{n-1} (j\omega)^1 + d_n; \\ V(j\omega) = |C(j\omega)|^2 = v_0 (j\omega)^{2(n-1)} + v_1 (j\omega)^{2(n-2)} + \dots + v_{n-2} (j\omega)^2 + v_{n-1}; \quad (5.30)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & \dots & \dots & 0 \\ d_1 & d_2 & d_4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & d_{n-2} & d_n \end{vmatrix}; \quad \Delta_o = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & \dots & \dots & v_{n-1} \\ d_0 & d_2 & d_4 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & d_{n-2} & d_n \end{vmatrix}. \quad (5.31)$$

Для получения коэффициентов полинома $V(j\omega)$ следует вначале найти квадрат модуля полинома $C(j\omega)$, а затем все слагаемые с четными степенями ω привести к виду с четными степенями $(j\omega)$, поменяв при необходимости знаки слагаемых.

Определитель Δ представляет собой старший определитель Гурвица, и поэтому при приближении системы к границе устойчивости определитель $\Delta \rightarrow 0$, а оценка $Q_{KB} \rightarrow \infty$.

Формулу (5.29) можно использовать и для вычисления улучшенной оценки (5.23). Необходимо лишь интеграл (5.23) разбить на два интеграла, а изображение производной привести к виду (5.27).

Следует отметить, что абсолютные значения любой интегральной оценки сами по себе не представляют интереса. Они служат лишь для сопоставления различных вариантов настройки одной и той же системы.

Все рассмотренные интегральные показатели используют не только для оценки качества, но и для определения оптимальных значений настроек параметров системы. Оптимальными считают такие значения, которые соответствуют минимуму интегрального показателя

$$Q \rightarrow \min. \quad (5.32)$$

Предположим, что необходимо найти оптимальные значения каких-либо двух параметров (например, k_i и T_i), входящих в передаточную функцию системы (5.25). Для этого надо с помощью формулы (5.29) выразить показатель Q как функцию параметров k_i и T_i :

$$Q = f(k_i, T_i), \quad (5.33)$$

а затем взять частные производные и приравнять их к нулю:

$$\begin{aligned} \partial Q(k_i, T_i) / \partial k_i &= 0; \\ \partial Q(k_i, T_i) / \partial T_i &= 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Решая систему (5.34), можно найти искомые оптимальные значения $k_{i\text{опт}}$ и $T_{i\text{опт}}$.

При сложном характере функции (5.33) задачу минимизации решают численными методами.

Отметим, что в некоторых случаях функция $Q(k_i, T_i)$ может не иметь минимума. Тогда варьируемые параметры выбирают по наименьшему значению интегрального показателя Q внутри или на границе области, задаваемой из других условий (запас устойчивости, точность в установившемся режиме и т.д.).

Контрольные задания и вопросы:

1 Какие свойства автоматической системы принято рассматривать при оценке ее качества?

2 По какой динамической характеристике системы регулирования оценивают прямые показатели качества? Какие из них характеризуют колебательность системы, а какие — ее быстродействие?

3 Какие из частотных показателей характеризуют колебательность системы, а какие — ее быстродействие?

4 Назовите два числовых параметра колебательного звена, характери-

зующих его динамические свойства.

5 Какие параметры графика переходного процесса учитываются интегральными оценками?

6 Какой из двух переходных процессов лучше — с большой интегральной оценкой или малой? Почему?

7 Для каких переходных процессов можно применять линейную интегральную оценку?

8 Почему для колебательных переходных процессов приходится применять модульные или квадратичные оценки?

6 Линейные системы при случайных воздействиях

6.1 Сущность статистического подхода к расчету систем управления

В предыдущих разделах функционирование систем управления рассматривалось при влиянии на них внешних воздействий регулярного типа. Качество систем оценивалось при типовых воздействиях, описываемых, определенными функциями времени (ступенчатая функция, дельта-функция и т.д.). Соответственно и параметры систем выбирались исходя из условия достижения того или иного показателя качества при конкретном внешнем воздействии.

В ряде случаев, когда реальные внешние воздействия достаточно близки к типовым, такой детерминистический подход к анализу и синтезу систем вполне оправдан и эффективен.

Однако для многих реальных систем управления внешние воздействия (задающие и возмущающие) являются случайными сигналами. Часто случайным образом изменяются параметры объектов управления (параметрические случайные возмущения). Случайную природу имеют и шумы, возникающие в измерительных устройствах систем управления.

Случайным сигналом называется сигнал, значения которого в каждый момент времени представляют собой случайную величину. В теории вероятностей случайную величину, изменяющуюся во времени, называют *случайным процессом*. Применяют также равносильные термины — «стochastic process» и «вероятностный процесс».

Случайный сигнал (процесс), в отличие от детерминированного, нельзя описать какой-либо одной конкретной функцией времени. Он представляет собой множество функций времени, обладающих некоторыми общими вероятностными свойствами. Конкретная функция $x(t)$, которая получает-

при экспериментальном наблюдении случайного сигнала на конечном интервале, называется *реализацией случайного сигнала*.

Свойства случайных сигналов можно описать только при помощи понятий теории вероятностей и математической статистики. В теории управления используются, например, такие статистические характеристики, как математическое ожидание (среднее значение), дисперсия (среднеквадратичное отклонение) и т. д.

Различают стационарные и нестационарные случайные сигналы. Статистические характеристики *стационарного сигнала* не изменяются во времени. Статистические свойства *нестационарного сигнала* с течением времени меняются.

Сущность статистического подхода к анализу и синтезу систем управления состоит в том, что при проектировании системы и оценке ее качества ориентируются не на самые «тяжелые» (но маловероятные) условия функционирования системы, а на некоторые средние, наиболее часто встречающиеся условия.

При действии случайных возмущений в системе никогда не наступает установившийся режим — она непрерывно переходит из одного состояния в другое. Управляемая величина $x(t)$ и сигнал ошибки $\varepsilon(t)$ также непрерывно изменяются и представляют собой случайные сигналы. Поэтому оценку точности системы можно производить только при помощи статистических характеристик — математического ожидания и дисперсии двух указанных сигналов.

В данном разделе будут рассматриваться только такие случаи, когда входные и выходные сигналы являются стационарными случайными сигналами, которые можно представлять в виде суммы постоянного математического ожидания и переменной центрированной составляющей. Поэтому сигнал ошибки согласно принципу суперпозиции также можно рассматривать как сумму постоянной и переменной составляющих, т. е.

$$\varepsilon(t) = m_e + \varepsilon^o(t). \quad (6.1)$$

Постоянную составляющую m_e сигнала ошибки вычисляют при помощи методов, изложенных в разделе 3, а переменную составляющую $\varepsilon^o(t)$ оценивают в среднем — по величине дисперсии D_{ε^o} , которая равна дисперсии самого сигнала ошибки:

$$D_{\varepsilon^o} = D_\varepsilon. \quad (6.2)$$

В качестве критерия оптимальности системы при случайных воздействиях принимают условие

$$D_\varepsilon \rightarrow \min. \quad (6.3)$$

Выбор критерия (6.3) целесообразен во всех случаях, когда потери, возникающие из-за неточного поддержания управляемой величины на заданном уровне, пропорциональны квадрату сигнала ошибки. Критерий (6.3), получивший наибольшее распространение в инженерной практике, обладает рядом преимуществ: он связан сравнительно простыми соотношениями с характеристиками системы и внешних воздействий; при часто встречающемся нормальном законе распределения случайного сигнала критерий (6.3) приводит к тем же результатам, что и другие, более сложные критерии.

Преимуществом критерия (6.3) является также то обстоятельство, что при нормальном законе распределения сигнала дисперсию сигнала можно связать с некоторыми другими статистическими показателями точности — вероятностью превышения сигналом ε определенного уровня ε_d , средним числом таких выбросов, средней длительностью выбросов. Например, при заданной вероятности превышения 0,003 и допустимом значении ε_d дисперсия сигнала ошибки

$$D_\varepsilon \leq \varepsilon_d^2/9 \text{ или } \sigma \leq \varepsilon_d/3. \quad (6.4)$$

Неравенства (6.4) выражают известное в теории вероятностей правило «трех сигма».

Среднее за единицу времени число выбросов, превосходящих значение ε_d

$$n(\varepsilon_d) = n_0 e^{-\varepsilon_d^2/2D_\varepsilon}, \quad (6.5)$$

где n_0 — параметр, характеризующий среднюю скорость изменения сигнала и равный среднему за единицу времени числу пересечений сигналом линии среднего значения.

Методы расчета систем, подверженных случайным воздействиям, составляют в теории управления отдельную ветвь, называемую *статистической динамикой*.

В статистической динамике различают три задачи расчета автоматических систем:

- *определение статистических характеристик выходных сигналов* (управляемой величины и сигнала ошибки) при полностью заданной структуре системы, заданных параметрах объекта и управляющего устройства и известных характеристиках внешних воздействий;

- *определение оптимальных параметров управляющего устройства* при заданной структуре системы, заданных параметрах объекта и известных характеристиках воздействий;

- *определение оптимальной структуры всей системы или только управляющего устройства* при известных характеристиках внешних воздействий.

6.2 Характеристики случайных сигналов

Математический аппарат анализа стационарных случайных сигналов основан на гипотезе эргодичности. Согласно гипотезе эргодичности статистические характеристики большого числа произвольно выбранных реализаций стационарного случайного сигнала совпадают со статистическими характеристиками одной реализации достаточно большой длины. Это означа-

ет, что усреднение по множеству реализаций стационарного случайного сигнала можно заменить усреднением по времени одной, достаточно длинной реализации. Тем самым существенно облегчается экспериментальное определение статистических характеристик стационарных сигналов и упрощается расчет систем при случайных воздействиях.

Определим основные статистические характеристики стационарного случайного сигнала, заданного в виде одной реализации в интервале $0 \leq t \leq T$ (рисунок 6.1, а).

Числовые характеристики. Числовыми характеристиками случайного сигнала являются среднее значение (математическое ожидание) и дисперсия.

Среднее значение сигнала на конечном интервале времени равно

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (6.6)$$

Если интервал усреднения (длину реализации T) устремить к бесконечности, то среднее по времени значение \bar{x}_T согласно гипотезе эргодичности будет равно *математическому ожиданию* m_x сигнала:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (6.7)$$

В дальнейшем для краткости знак предела перед интегралами по времени будем опускать. При этом либо вместо знака $=$ будем использовать знак \approx , либо под вычисляемыми статистическими характеристиками будем подразумевать их оценки.

В практических расчетах, когда конечная реализация задана в виде N дискретных значений, отделенных друг от друга равными промежутками времени $\Delta t = T/N$ (рисунок 6.1), среднее значение вычисляют по приближенной формуле

$$\bar{x} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (6.8)$$

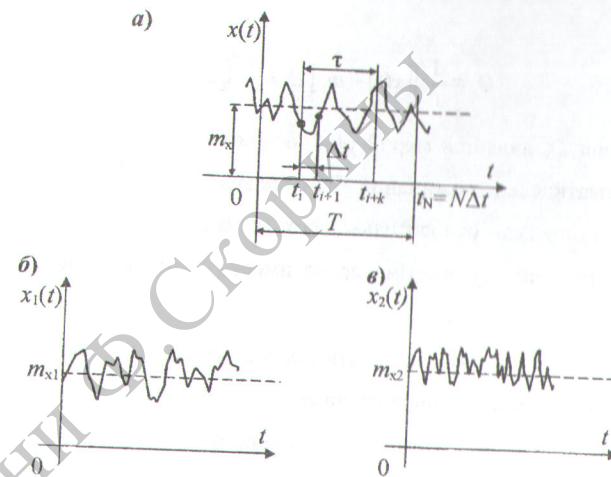


Рисунок 6.1 — Реализации случайных стационарных сигналов

Случайный стационарный сигнал можно рассматривать как сумму постоянной составляющей, равной среднему значению m_x , и переменной составляющей $x^o(t)$, соответствующей отклонениям случайного сигнала от среднего:

$$x^o(t) = x(t) - m_x. \quad (6.9)$$

Переменную составляющую $x^o(t)$ называют *центрированным случаем сигналом*.

Очевидно, что среднее значение центрированного сигнала всегда равно нулю.

Так как спектр сигнала $x(t)$ совпадает со спектром соответствующего центрированного сигнала $x^o(t)$, то во многих (но не всех!) задачах расчета автоматических систем можно вместо сигнала $x(t)$ рассматривать сигнал $x^o(t)$.

Дисперсия D_x стационарного случайного сигнала равна среднему значению квадрата отклонений сигнала от математического ожидания m_x , т. е.

$$D_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [x^0(t)]^2 dt. \quad (6.10)$$

Дисперсия D_x является мерой разброса мгновенных значений сигнала около математического ожидания. Чем больше пульсация переменной составляющей сигнала относительно его постоянной составляющей, тем больше дисперсия сигнала. Дисперсия имеет размерность величины x в квадрате.

Дисперсию можно рассматривать так же, как среднее значение мощности переменной составляющей сигнала.

Часто в качестве меры разброса случайного сигнала используют среднеквадратичное отклонение $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Для расчета автоматических систем имеет важное значение следующее свойство: *дисперсия суммы или разности независимых случайных сигналов $x(t) = x_1(t) \pm x_2(t)$ равна сумме дисперсий этих сигналов*, т. е.

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2}. \quad (6.11)$$

Математическое ожидание и дисперсия являются важными числовыми параметрами случайного сигнала, но они характеризуют его не полностью: по ним нельзя судить о скорости изменения сигнала во времени. Так, например, для случайных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (рисунок 6.1, б, в) математические ожидания и дисперсии одинаковые, но несмотря на это, сигналы явно отличаются друг от друга: сигнал $x_1(t)$ изменяется медленнее, чем сигнал $x_2(t)$.

Интенсивность изменения случайного сигнала во времени можно охарактеризовать одной из двух функций — корреляционной или функцией спектральной плотности.

Корреляционная функция. Корреляционной функцией $R_x(\tau)$ случайного сигнала $x(t)$ называется математическое ожидание произведений мгновенных значений центрированного сигнала $x^0(t)$, разделенных промежутком

времени τ , т. е.

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x^0(t) x^0(t + \tau) dt, \quad (6.12)$$

где τ — варьируемый сдвиг между мгновенными значениями сигнала (рисунок 6.1, а). Сдвиг τ варьируют от нуля до некоторого значения τ_m . Каждому фиксированному значению τ соответствует определенное числовое значение функции $R_x(\tau)$.

Корреляционная функция (называемая также автокорреляционной) характеризует степень корреляции (тесноту связи) между предыдущими и последующими значениями сигнала.

При увеличении сдвига τ связь между значениями $x(t)$ и $x(t + \tau)$ ослабевает, и ординаты корреляционной функции (рисунок 6.2, а) уменьшаются.

Это основное свойство корреляционной функции можно объяснить следующим образом. При малых сдвигах под знак интеграла (6.12) попадают произведения сомножителей, имеющих, как правило, одинаковые знаки, и поэтому большинство произведений будут положительными, а значение интеграла большим. По мере увеличения сдвига под знак интеграла будет попадать все больше сомножителей, имеющих противоположные знаки, и значения интеграла будут уменьшаться. При очень больших сдвигах ($\tau \rightarrow \infty$) сомножители $x^0(t)$ и $x^0(t + \tau)$ практически независимы, и число положительных произведений равно числу отрицательных произведений, а значение интеграла стремится к нулю.

Из приведенных рассуждений следует также, что корреляционная функция убывает тем быстрее, чем быстрее изменяется случайный сигнал во времени.

Из определения корреляционной функции следует, что она является четной функцией аргумента τ , т. е.

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau), \quad (6.13)$$

поэтому обычно рассматривают только положительные значения τ . Начальное значение корреляционной функции центрированного сигнала равно дисперсии сигнала, т. е.

$$R_x(0) = D_x. \quad (6.14)$$

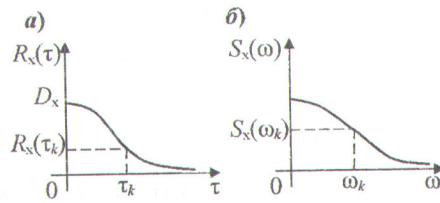


Рисунок 6.2 — Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) случайного сигнала

Равенство (6.14) получается из выражения (6.12) при подстановке $\tau = 0$.

Корреляционную функцию конкретного сигнала определяют по экспериментально полученной реализации этого сигнала. Если реализация сигнала получена в виде непрерывной диаграммной записи длиной T , то корреляционную функцию определяют при помощи специального вычислительного устройства — коррелятора (рисунок 6.3, а), реализующего формулу (6.12). Коррелятор состоит из блока задержки БЗ, блока умножения БУ и интегратора И. Для определения нескольких ординат $R_x(\tau_i)$ блок запаздывания поочередно настраивают на различные сдвиги τ_i .

Если же реализация представляет собой совокупность дискретных членов сигнала, полученных через равные промежутки Δt (рисунок 6.1, б) то интеграл (6.12) приближенно заменяют суммой

$$R_x(\tau) = R(k\Delta t) \approx \frac{1}{N - k} \sum_{i=1}^{N-k} x^o(i\Delta t) x^o(i\Delta t + k\Delta t), \quad (6.15)$$

которую вычисляют при помощи ЦВМ.

Для получения достаточно достоверной информации о свойствах

чайного сигнала длину реализации T и интервал дискретности Δt необходимо выбирать из условий:

$$T \geq (10 \div 20) T_{\text{н.ч}}, \Delta t \leq 0,5 T_{\text{в.ч}}, \quad (6.16)$$

где $T_{\text{н.ч}}$ и $T_{\text{в.ч}}$ — периоды соответственно самой низкочастотной и самой высокочастотной составляющих сигнала.

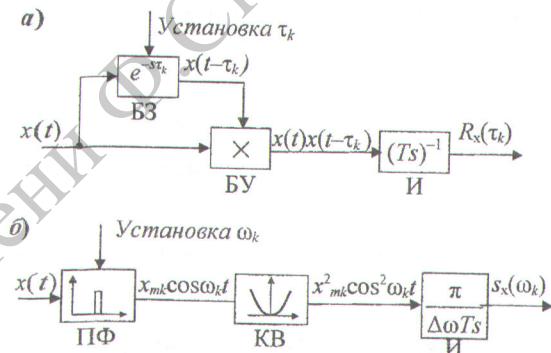


Рисунок 6.3 — Алгоритмические схемы вычисления ординат корреляционной функции (а) и спектральной плотности (б)

Спектральная плотность. Определим теперь спектральную характеристику стационарного случайного сигнала $x^o(t)$. Так как функция $x^o(t)$ не является периодической, она не может быть разложена в ряд Фурье (2.17).

С другой стороны, функция $x^o(t)$ из-за неограниченной длительности интегрируемая, и поэтому не может быть представлена интегралом Фурье (2.19). Однако, если рассматривать случайный сигнал на конечном интервале T , то функция $x_T(t)$ становится интегрируемой, и для нее существует прямое преобразование Фурье:

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.17)$$

Изображение по Фурье $X(j\omega)$ непериодического сигнала $x(t)$ характеризует распределение относительных амплитуд сигнала вдоль оси частот и

называется спектральной плотностью амплитуд, а функция $|X(j\omega)|^2$ характеризует распределение энергии сигнала среди его гармоник (см. 2.2).

Очевидно, что если разделить функцию $|X_T(j\omega)|^2$ на длительность T случайного сигнала, то она будет определять распределение мощности конечного сигнала $x^o_T(t)$ среди его гармоник. Если теперь устремить T к бесконечности, то функция $|X_T(j\omega)|^2$ будет стремиться к пределу

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} |X_T(j\omega)|^2 / T, \quad (6.18)$$

который называется *спектральной плотностью мощности* случайного сигнала. В дальнейшем функцию $S_x(\omega)$ будем называть сокращенно — спектральная плотность.

Наряду с математическим определением (6.18) спектральной плотности можно дать более простое — физическое толкование: *спектральная плотность* случайного сигнала $x(t)$ характеризует распределение квадратов относительных амплитуд гармоник сигнала вдоль оси ω .

Согласно определению (6.18) спектральная плотность — четная функция частоты. При $\omega \rightarrow \infty$ функция $S_x(\omega)$ обычно стремится к нулю (рисунок 6.2, б), причем, чем быстрее изменяется сигнал во времени, тем ниже график $S_x(\omega)$.

Отдельные пики на графике спектральной плотности свидетельствуют о наличии периодических составляющих случайного сигнала.

Найдем связь спектральной плотности с дисперсией сигнала. Запишем равенство Парсеваля (2.23) для конечной реализации $x_T(t)$ и разделим на левую и правую части на T . Тогда получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T [x_T^o(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{T} d\omega. \quad (6.19)$$

При $T \rightarrow \infty$ левая часть равенства (6.19) стремится к дисперсии сигнала D_x (6.10), а подынтегральное выражение в правой части — к спектральной плотности $S_x(\omega)$, т. е. вместо (6.19) получим одну из главных формул

статистической динамики:

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (6.20)$$

Поскольку левая часть равенства (6.20) представляет собой полную дисперсию сигнала, то каждую элементарную составляющую $S_x(\omega) d\omega$ под знаком интеграла можно рассматривать как дисперсию или квадрат амплитуды гармоники с частотой ω .

Формула (6.20) имеет большое практическое значение, так как позволяет по известной спектральной плотности сигнала вычислять его дисперсию, которая во многих задачах расчета автоматических систем служит важной количественной характеристикой качества.

Спектральную плотность $S_x(\omega)$ можно найти по экспериментальной реализации сигнала при помощи спектрального анализатора (рисунок 6.3, б), состоящего из полосового фильтра ПФ с узкой полосой пропускания $\Delta\omega$, квадратора Кв и интегратора И (см. [12]). Для определения нескольких ординат $S_x(\omega_k)$ полосовой фильтр поочередно настраивают на различные частоты пропускания ω_k .

Износвязь между функциональными характеристиками случайного сигнала. Н. Винером и А. Я. Хинчином было впервые показано, что функциональные характеристики $R_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ стационарного случайного сигнала связаны друг с другом преобразованием Фурье: спектральная плотность является изображением корреляционной функции т. е.

$$S_x(\omega) = F\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.21)$$

Корреляционная функция, соответственно, является оригиналом этого изображения, т. е.

$$R_x(\tau) = F^{-1}\{S_x(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.22)$$

Если разложить множители $e^{\pm j\omega t}$ с помощью формулы Эйлера (2.15) и

учесть, что $R_x(\tau)$, $S_x(\omega)$ и $\cos\omega t$ — четные функции, а $\sin\omega t$ — нечетная функция, то выражения (6.21) и (6.22) можно преобразовать к следующему виду, более удобному для практических расчетов:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^\infty R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (6.23)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (6.24)$$

Подставляя в выражение (6.24) значение $\tau = 0$, получим формулу (6.20) для вычисления дисперсии.

Соотношения, связывающие корреляционную функцию и спектральную плотность, обладают всеми присущими преобразованию Фурье свойствами. В частности: чем шире график функции $R_x(\tau)$, тем уже график функции $S_x(\omega)$, и наоборот, чем быстрее убывает функция $R_x(\tau)$, тем медленнее уменьшается функция $S_x(\omega)$ (рисунок 6.4). Кривые 1 на обоих рисунках соответствуют медленно меняющемуся случайному сигналу $x_1(t)$ (рисунок 6.1, δ), в спектре которого преобладают низкочастотные гармоники. Кривые 2 соответствуют быстро меняющемуся сигналу $x_2(t)$ (рисунок 6.1, ϵ), в спектре которого преобладают высокочастотные гармоники.

Если случайный сигнал изменяется во времени очень резко, и между его предыдущими и последующими значениями корреляция полностью отсутствует, то функция $R_x(\tau)$ имеет вид дельта-функции (рисунок 6.4, a , прямая 3). График спектральной плотности в этом случае представляет собой горизонтальную прямую $S_x(\omega) = S_{x0}$ в диапазоне частот от 0 до ∞ (рисунок 6.4, b , прямая 3). Это указывает на то, что амплитуды гармоник во всем диапазоне частот одинаковы. Такой сигнал называется *идеальным белым шумом* (по аналогии с белым светом, у которого, как известно, интенсивность всех компонент одинакова).

Отметим, что понятие «белый шум» является математической абстракцией.

Физические сигналы в виде белого шума неосуществимы, так как бесконечно широкому спектру согласно формуле (6.20) соответствует бесконечно большая дисперсия, а следовательно, и бесконечно большая мощность, что невозможно.

Тем не менее, реальные сигналы с конечным спектром часто можно приближенно рассматривать как белый шум. Это упрощение правомерно в тех случаях, когда спектр сигнала значительно шире полосы пропускания системы, на которую действует сигнал.

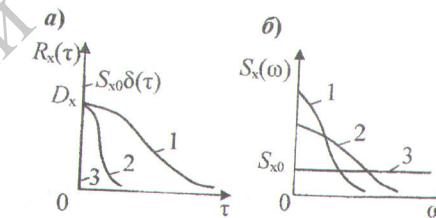


Рисунок 6.4 — Взаимосвязь между корреляционной функцией (a) и спектральной плотностью (b)

Для всех случайных сигналов, действующих в реальных физических системах, существует корреляция между предыдущими и последующими значениями. Это означает, что корреляционные функции реальных сигналов отличаются от дельта-функции и имеют конечную, не равную нулю длительность спада. Соответственно и спектральные плотности реальных сигналов всегда имеют конечную ширину.

Характеристики связи двух случайных сигналов. Для описания вероятностной связи, проявляющейся между двумя случайными сигналами, используют взаимную корреляционную функцию и взаимную спектральную плотность.

Взаимная корреляционная функция стационарных случайных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ определяется выражением

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t+\tau) dt. \quad (6.25)$$

Функция $R_{x_1x_2}(\tau)$ характеризует степень связи (корреляции) между мгновенными значениями сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, отстоящими друг от друга на величину τ . Если сигналы статистически не связаны (не коррелированы) между собой, то при всех значениях τ функция $R_{x_1x_2}(\tau) = 0$.

Для взаимной корреляционной функции справедливо следующее соотношение, вытекающее из определения (6.25)

$$R_{x_1x_2}(\tau) = R_{x_1x_2}(-\tau). \quad (6.26)$$

Корреляционная функция суммы (разности) двух коррелированных между собой сигналов $x(t) = x_1(t) \pm x_2(t)$ определяется выражением

$$R_x(\tau) = R_{x_1}(\tau) + R_{x_2}(\tau) \pm R_{x_1x_2}(\tau) \pm R_{x_2x_1}(\tau). \quad (6.27)$$

Взаимная спектральная плотность случайных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ определяется как изображение по Фурье взаимной корреляционной функции:

$$S_{x_1x_2}(j\omega) = F\{R_{x_1x_2}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1x_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.28)$$

Из определения (6.28) и свойства (6.26) следует, что

$$S_{x_1x_2}(j\omega) = S_{x_1x_2}(-j\omega). \quad (6.29)$$

Спектральная плотность суммы (разности) случайных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$

$$S_x(\omega) = S_{x_1}(\omega) + S_{x_2}(\omega) \pm S_{x_1x_2}(j\omega) \pm S_{x_2x_1}(j\omega). \quad (6.30)$$

Если сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ некоррелированы между собой, то выражения (6.27) и (6.30) упрощаются:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_{x_1}(\tau) + R_{x_2}(\tau); \\ S_x(\omega) &= S_{x_1}(\omega) + S_{x_2}(\omega). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Соотношения (6.31), а также (6.11), означают, что *статистические характеристики* $R_x(\tau)$, $S_x(\omega)$ и D_x *совокупности* нескольких некоррелированных друг с другом случайных сигналов всегда равны сумме соответствующих характеристик этих сигналов (независимо от того, с каким знаком сигналы

суммируются в эту совокупность).

Типовые случайные воздействия. Реальные случайные воздействия, влияющие на промышленные объекты управления, весьма разнообразны по своим свойствам. Но прибегая при математическом описании воздействий к некоторой идеализации, можно выделить ограниченное число типичных или типовых случайных воздействий. Корреляционные функции и спектральные плотности типовых воздействий представляют собой достаточно простые функции аргументов τ и ω . Параметры этих функций, как правило, можно легко определить по экспериментальным реализациям сигналов.

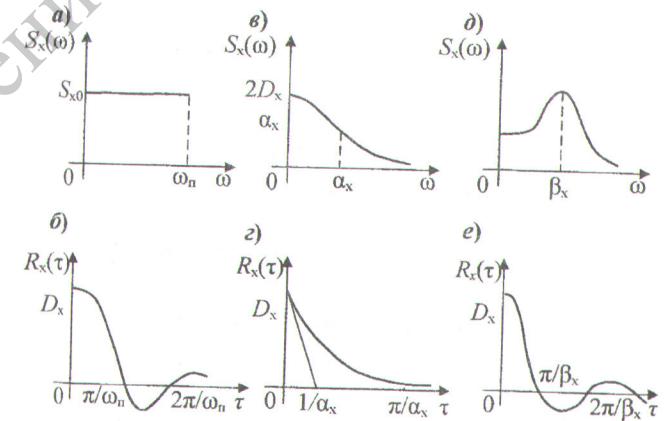


Рисунок 6.5 — Спектральные плотности и корреляционные функции типовых случайных сигналов

Простейшим типовым воздействием является *белый шум с ограниченной шириной спектра*. Спектральная плотность этого воздействия (рисунок 6.5, а) описывается функцией

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_{x_0} & \text{при } |\omega| < \omega_n; \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_n, \end{cases} \quad (6.32)$$

где S_{x_0} — интенсивность белого шума. Дисперсия сигнала согласно (6.20)

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{\omega_n} S_{x_0} d\omega = S_{x_0} \omega_n / \pi. \quad (6.33)$$

Корреляционная функция согласно (6.24) в данном случае имеет вид

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_n} S_{x_0} \cos \omega t d\omega = \frac{S_{x_0}}{\pi \tau} \sin \omega_n \tau. \quad (6.34)$$

Учитывая (6.33), функцию (6.34) можно записать в следующем виде:

$$R_x(\tau) = D_x (\sin \omega_n \tau / \omega_n \tau). \quad (6.35)$$

График функции (6.35) показан на рисунке 6.5, б.

Наиболее часто в практических расчетах встречаются сигналы с экспоненциальной корреляционной функцией (рисунок 6.5, г)

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha_x |\tau|}. \quad (6.36)$$

Применяя к корреляционной функции (6.36) преобразование (6.23), находим спектральную плотность (рисунок 6.5, в)

$$S_x(\omega) = \int_0^\infty D_x e^{-\alpha_x |\tau|} \cos \omega \tau dt = \frac{2D_x \alpha_x}{\alpha_x^2 + \omega^2}. \quad (6.37)$$

Чем больше параметр α_x , тем быстрее уменьшается корреляционная функция и тем шире график спектральной плотности. Ординаты функции $S_x(\omega)$ при увеличении α_x уменьшаются. При $\alpha_x \rightarrow \infty$ рассматриваемый сигнал приближается к идеальному белому шуму.

При ориентировочных расчетах параметр α_x можно определить непосредственно по реализации сигнала — среднему числу n_0 пересечений центрированным сигналом оси времени: $\alpha_x = m_0$.

Часто случайный сигнал содержит скрытую периодическую составляющую. Такой сигнал имеет экспоненциально-косинусную корреляционную функцию (рисунок 6.5, е)

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha_x |\tau|} \cos \beta_x \tau. \quad (6.38)$$

Параметр β_x этой функции соответствует среднему значению «периода»

скрытой составляющей, а параметр α_x характеризует относительную интенсивность остальных случайных составляющих, которые наложены на периодическую составляющую. Если показатель $\alpha_x \approx \beta/2\pi$, то относительный уровень этих составляющих невелик, и смешанный сигнал близок к гармоническому. Если же показатель $\alpha_x \approx (5 \dots 10) \beta_x/\pi$, то уровень случайных составляющих соизмерим с «амплитудой» периодической составляющей. При $\alpha_x \geq 20 \beta_x/\pi$, корреляционная функция (6.38) практически совпадает (с точностью 5 %) с экспонентой (6.36).

Корреляционной функции (6.38) соответствует спектральная плотность

$$S_x(\omega) = \frac{D_x \alpha_x}{\alpha_x^2 + (\beta_x - \omega)^2} + \frac{D_x \alpha_x}{\alpha_x^2 + (\beta_x + \omega)^2}, \quad (6.39)$$

которая при частоте $\omega = \beta_x$ имеет явно выраженный пик (рисунок 6.5, д).

6.3 Преобразование случайного сигнала линейным динамическим звеном

Исходные соотношения. При воздействии стационарного случайного сигнала на линейное устойчивое звено (или систему) на выходе звена возникает также стационарный случайный сигнал, который можно рассматривать как преобразованный входной сигнал. Преобразование входного сигнала проявляется в изменении его статистических характеристик — математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции и спектральной плотности.

Если входное воздействие $x(t)$ состоит из постоянной или достаточно медленно меняющейся составляющей m_x и центрированной случайной составляющей $x^o(t)$, т. е.

$$x(t) = m_x + x^o(t), \quad (6.40)$$

то и выходная реакция $y(t)$ звена может быть представлена в виде суммы

$$y(t) = m_y + y^o(t). \quad (6.41)$$

Согласно принципу суперпозиции каждая из составляющих $y(t)$ может быть определена отдельно: m_y — как результат преобразования m_x , а $y^o(t)$ — как результат преобразования $x^o(t)$. Математические ожидания входа и выхода статического звена с передаточной функцией $W(s)$ связаны между собой уравнением статики

$$m_y = m_x W(0) = m_x k. \quad (6.42)$$

Статистические характеристики переменной составляющей $y^o(t)$ определяются более сложными соотношениями. Так как в дальнейшем рассматриваются законы преобразования только центрированных составляющих, то значок o будем опускать. Базовыми формулами для вывода законов преобразования случайных сигналов являются интеграл свертки (2.41)

$$y(t) = \int_0^\infty x(t-\vartheta) w(\vartheta) d\vartheta \quad (6.43)$$

и Фурье — изображение (2.65) весовой функции $w(t)$

$$W(j\omega) = \int w(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.44)$$

Законы преобразования во временной области. Пусть входной сигнал $x(t)$ задан своей корреляционной функцией $R_x(\tau)$ (рисунок 6.6, а). Найдем корреляционные функции $R_{xy}(\tau)$ и $R_y(\tau)$.

Взаимная корреляционная функция сигналов $x(t)$ и $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt. \quad (6.45)$$

Если вместо $y(t+\tau)$ в выражение (6.45) подставить интеграл (6.43), записанный для времени $t^* = t + \tau$, и выполнить вначале интегрирование произведения $x(t) x(t+\tau)$ по переменной t в пределах от 0 до T , то в правой части (6.45) образуется корреляционная функция (6.12) входного сиг-

нала с аргументом, равным разности $\tau - \vartheta$, и формула (6.45) примет вид

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty R_x(\tau - \vartheta) w(\vartheta) d\vartheta. \quad (6.46)$$

Интегральное соотношение (6.46), называемое уравнением Винера-Хопфа, имеет такой же вид, как интеграл свертки (6.43), поэтому функцию $R_{xy}(\tau)$ можно рассматривать как реакцию звена на воздействие, имеющее форму функции $R_x(\tau)$.

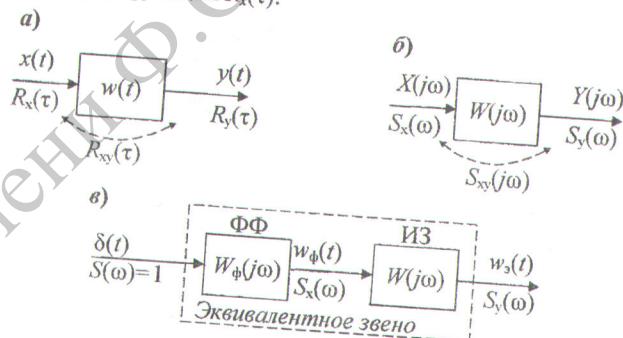


Рисунок 6.6 — Преобразование характеристик случайного сигнала линейным звеном: во временной области (а); в частотной области (б); с формирующим фильтром (в)

Если в корреляционную функцию выходного сигнала $y(t)$, равную

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) y(t+\tau) dt, \quad (6.47)$$

дважды подставить вместо $y(t)$ и $y(t+\tau)$ интеграл свертки (6.43) с переменными интегрирования соответственно ϑ_1 и ϑ_2 и выполнить интегрирование произведения $x(t-\vartheta_1) x(t+\tau-\vartheta_2)$ по t в пределах от 0 до T , то в правой части (6.47) образуется корреляционная функция входного сигнала с аргументом, равным $\tau - \vartheta_2 + \vartheta_1$, а выражение (6.47) примет вид

$$R_y(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty R_x(\tau + \vartheta_1 - \vartheta_2) w(\vartheta_1) w(\vartheta_2) d\vartheta_1 d\vartheta_2. \quad (6.48)$$

В частном случае, когда на входе звена действует белый шум с корреляционной функцией $R_x(\tau) = \delta(\tau)$, выражение (6.48) с учетом «выхватывающего» свойства дельта-функции (2.7) может быть упрощено:

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} w(\vartheta_1)w(\tau + \vartheta_1)d\vartheta_1. \quad (6.49)$$

Подставляя теперь в (6.49) $\tau = 0$, получим формулу для дисперсии выходного сигнала

$$D_y = R_y(0) = \int_0^{\infty} [w(\vartheta_1)]^2 d\vartheta_1 = \int_0^{\infty} [w(t)]^2 dt, \quad (6.50)$$

которая показывает, что для вычисления дисперсии выходного сигнала при действии на входе звена белого шума достаточно проинтегрировать по времени квадрат весовой функции звена.

Формулу (6.50) можно использовать для вычисления дисперсии и в тех случаях, когда входной сигнал отличен от белого шума. Для этого необходимо в (6.50) подставить весовую функцию не самого рассматриваемого звена $w(t)$, а функцию $w_s(t)$ эквивалентного звена, которое представляет собой последовательное соединение исследуемого звена и *формирующего фильтра*.

Законы преобразования в частотной области. В практических расчетах удобней пользоваться соотношениями между спектральными характеристиками входа и выхода (рисунок 6.6, б). Пусть известна спектральная плотность $S_x(\omega)$. Выразим через нее спектральные плотности $S_{xy}(j\omega)$ и $S_y(\omega)$. Взаимная спектральная плотность сигналов $x(t)$ и $y(t)$ согласно определению (6.28)

$$S_{xy}(j\omega) = \int R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.51)$$

Если вместо $R_{xy}(\tau)$ подставить интеграл Винера-Хопфа (6.46), то после некоторых несложных искусственных преобразований подынтегральных сомножителей и использования формул (6.21) и (6.44) выражение (6.51)

примет вид

$$S_{xy}(j\omega) = S_x(\omega)W(j\omega). \quad (6.52)$$

Равенство (6.52), разрешенное относительно АФХ $W(j\omega)$, используют для определения характеристик объектов управления по экспериментальным реализациям сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Для этого сначала вычисляют корреляционные функции $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$, а затем переходят к спектральным плотностям $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$, которые представляют в (6.52).

Спектральная плотность выходного сигнала согласно (6.21)

$$S_y(\omega) = \int R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.53)$$

Если вместо $R_y(\tau)$ подставить в (6.53) двойной интеграл (6.48) и представить образованное выражение с тремя интегралами как произведение интеграла вида (6.21) и двух интегралов вида (6.44) с переменными интегрирования соответственно τ , ϑ_1 и ϑ_2 , то получим одну из важнейших формул статистической динамики

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)W(j\omega)W(-j\omega) \quad (6.54)$$

или

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)|W(j\omega)|^2. \quad (6.55)$$

Соотношение (6.55) показывает, что *спектральная плотность выходного сигнала равна спектральной плотности входного сигнала, умноженной на квадрат амплитудной частотной характеристики звена (системы)*.

Формулу (6.55) можно получить также, исходя из чисто физических представлений: АЧХ $|W(j\omega)|$ при каждом значении аргумента ω определяет отношение амплитуд гармоник входного и выходного сигнала, а спектральные плотности $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$ при фиксированном значении ω равны квадратам относительных амплитуд гармоник.

Если равенство (6.55) объединить с формулой (6.20), записанной для

сигнала $y(t)$, то получим еще одну важную для практических расчетов формулу:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega, \quad (6.56)$$

по которой вычисляют дисперсию сигналов на выходе систем управления.

На соотношении (6.55) основаны **понятие и метод формирующего фильтра**. *Формирующим фильтром* называют динамическое звено, которое преобразует входной сигнал в виде белого шума в выходной сигнал с заданными статистическими характеристиками.

Пусть на входе формирующего фильтра ФФ (рисунок 6.6, в) действует белый шум с единичной интенсивностью $S_0 = 1$ при всех значениях ω . Тогда спектральная плотность сигнала $x(t)$ на выходе ФФ согласно (6.55)

$$S_x(\omega) = 1 \cdot |W_\phi(j\omega)|^2. \quad (6.57)$$

Следовательно, для получения на выходе ФФ случайного сигнала с желаемой функцией $S_x(\omega)$ необходимо частотную функцию фильтра выбрать в соответствии с равенством (6.57), т. е. квадрат АЧХ ФФ должен быть равен спектральной плотности сигнала, формируемого из белого шума.

Для нахождения функции $W_\phi(j\omega)$ заданную спектральную плотность представляют в виде произведения двух комплексно-сопряженных сомножителей $W_\phi(j\omega)$ и $W_\phi(-j\omega)$. Из них выбирают тот, который имеет нули и полюсы в левой полуплоскости ω , т. е. тот, который соответствует устойчивому, физически реализуемому звену. Например, для получения на выходе ФФ случайного сигнала со спектральной плотностью (6.37)

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x\alpha_x}{\alpha_x^2 + \omega^2} = \frac{\sqrt{2D_x\alpha_x}}{\alpha_x + j\omega} \frac{\sqrt{2D_x\alpha_x}}{\alpha_x - j\omega} \quad (6.58)$$

реализуемым является первый сомножитель

$$W_\phi(j\omega) = \sqrt{2D_x\alpha_x} / (\alpha_x + j\omega). \quad (6.59)$$

Формирующий фильтр (6.59) представляет собой инерционное звено

первого порядка с параметрами:

$$k_\phi = \sqrt{2D_x\alpha_x} / \alpha_x; T_\phi = 1/\alpha_x. \quad (6.60)$$

Последовательное соединение ФФ и исследуемого звена ИЗ называют **эквивалентным звеном**. Его АФХ

$$W_\phi(j\omega) = W_\phi(j\omega)W(j\omega). \quad (6.61)$$

Метод формирующего фильтра заключается в том, что при статистическом анализе систем управления перед исследуемым звеном (или системой) включают ФФ с АФХ, соответствующей спектральным свойствам реального входного сигнала $x(t)$, а характеристики выходного сигнала $y(t)$ определяют при подаче на вход эквивалентного звена (или системы) белого шума. Такой переход от исследования реального звена к исследованию эквивалентного в ряде случаев упрощает математические выкладки и задачу анализа. Например, для определения дисперсии выходного сигнала исследуемого звена достаточно получить (аналитически или экспериментально) весовую функцию $w_s(t)$ эквивалентного звена и согласно (6.50) проинтегрировать ее квадрат:

$$D_y = \int_0^\infty [w_s(t)]^2 dt. \quad (6.62)$$

Эту же дисперсию можно получить интегрированием в частотной области, подставляя в (6.56) $S_x(\omega) = 1$:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_s(j\omega)|^2 d\omega. \quad (6.63)$$

Приравнивая правые части формул (6.62) и (6.63), можно получить частный случай равенства Парсеваля (2.23).

Контрольные задания и вопросы

- 1 Поясните, в чем заключается сущность статистического подхода к расчету систем управления.
- 2 Какие три основные задачи решаются в статистической динамике систем управления?
- 3 Какие числовые характеристики используются для описания статистических свойств случайных сигналов?
- 4 Напишите формулу корреляционной функции. Чему равно ее начальное значение?
- 5 Что такое формирующий фильтр? Как выбирается его АФХ?

7 Линейные импульсные системы управления

7.1 Общие сведения о дискретных системах

В связи с интенсивным развитием вычислительной техники в промышленной автоматике все большее применение получают дискретные системы управления. Основным элементом дискретной системы является управляющая вычислительная машина (УВМ), которая может использоваться либо в супервизорном режиме, либо в режиме прямого цифрового управления (ПЦУ). В супервизорном режиме УВМ вырабатывает задания локальным контурам регулирования, реализованным с помощью традиционных технических средств автоматики. При режиме ПЦУ контуры регулирования образуются самой УВМ.

В дискретной системе управления один или несколько сигналов являются дискретными и представляют собой последовательность кратковременных импульсов. В состав дискретной системы наряду со звеньями непрерывного действия входят элементы, преобразующие непрерывные сигналы в дискретные, и элементы, выполняющие обратное преобразование. Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется *квантованием*. Различают три вида квантования сигналов: по уровню; по времени; по уровню и времени (совместно).

Квантование по уровню заключается в фиксации вполне определенных дискретных значений непрерывного сигнала (рисунок 7.1, а). При этом непрерывный сигнал (тонкая линия) заменяется ступенчато изменяющимся сигналом (жирная линия). Смежные дискретные значения отличаются друг от друга на постоянную величину Δx , называемую *интервалом квантирования по уровню*. Переход с одного уровня на другой происходит в моменты времени, когда непрерывный сигнал достигает очередного фиксированного значения.

Квантование по времени заключается в фиксации мгновенных значений непрерывного сигнала в равноотстоящие друг от друга дискретные моменты времени (рисунок 7.1, б). При этом квантованный по времени сигнал представляет собой так называемую *решетчатую функцию* — последовательность идеальных импульсов. Смежные моменты времени отличаются друг от друга на постоянную величину $\Delta t = T$, называемую *интервалом дискретности* (интервалом квантования по времени, периодом повторения).

Для квантования по времени применяют различные электронные устройства. Например, интегральные микросхемы аналоговых перемножителей напряжения, линейные схемы пропускания, устройства выборки — хранения, дифференциальные усилители с управляемым коэффициентом усиления [10].

При *совместном квантовании по уровню и по времени* фиксируются дискретные по уровню значения, ближайшие к значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени (рисунок 7.1, в), причем приоритетным является квантование по времени.

В зависимости от применяемого вида квантования все дискретные системы разделяют на три класса: релейные, импульсные и цифровые. В *релейных системах* квантование осуществляется только по уровню, в *импульсных* — по времени, а в *цифровых* — и по уровню и по времени.

Квантование по уровню производится специальными элементами — квантователями. Простейшими квантователями являются двух- и трехпозиционные реле. Они квантуют непрерывный сигнал соответственно по двум и трем уровням. При достаточно большом числе уровней и малом интервале квантования, обеспечиваемых в УВМ, релейную систему можно приближенно рассматривать как непрерывную.

Квантование по времени осуществляется с помощью импульсного элемента. *Импульсный элемент* преобразует непрерывный входной сигнал в по-

следовательность импульсов, амплитуда, длительность или период повторения которых зависят от значений входного сигнала в дискретные моменты времени.

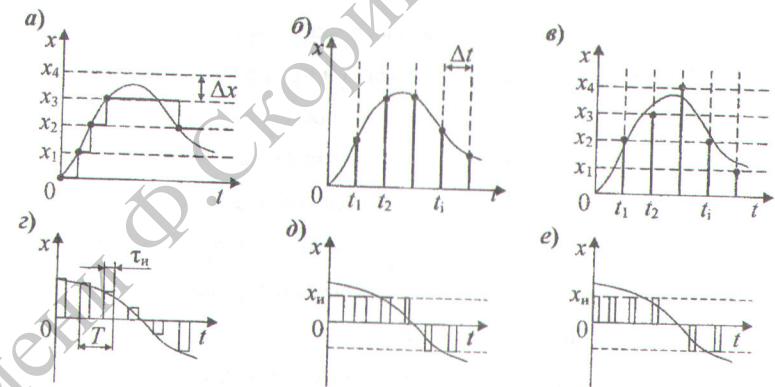


Рисунок 7.1 — Виды квантования и модуляции непрерывного сигнала

При этом преобразующее действие квантователя можно рассматривать как процесс *модуляции* последовательности одинаковых импульсов по закону изменения входного непрерывного сигнала, а сам квантователь по времени — как импульсный модулятор.

В зависимости от того, какой из параметров модулируемой последовательности импульсов изменяется по закону изменения модулирующего сигнала $x(t)$, различают модуляции: амплитудно-импульсную (АИМ), широтно-импульсную (ШИМ) и частотно-импульсную (ЧИМ). При АИМ значениям модулирующего сигнала $x(t)$ пропорциональны амплитуды (высоты) импульсов x_n (рисунок 7.1, г):

$$x_n \equiv x(t), T = \text{const}, \tau_n = \text{const}; \quad (7.1)$$

при ШИМ — длительности τ_n импульсов (рисунок 7.1, д):

$$\tau_n \equiv x(t), x_n = \text{const}, T = \text{const}; \quad (7.2)$$

и при ЧИМ — частота ω_n импульсов (рисунок 7.1, е):

$$\omega_d = x(t), x_n = \text{const}, \tau_n = \text{const}, \quad (7.3)$$

где $\omega_d = 2\pi/T$ — частота дискретизации или частота повторения. Совместное квантование сигналов по уровню и по времени в цифровых системах осуществляется при помощи аналого-цифровых преобразователей (АЦП). В АЦП кроме квантования по уровню и по времени происходит кодирование дискретных значений сигнала — представление их в виде последовательности чисел и запись в каком-либо цифровом коде.

Отметим, что при сравнительно большом шаге квантования по уровню цифровая система существенно нелинейна, а при достаточно малом шаге дискретности по уровню можно пренебречь и рассматривать систему как линейную амплитудно-импульсную.

Дискретные системы управления с УВМ находят широкое применение в современной автоматике благодаря наличию следующих преимуществ перед непрерывными системами.

Дискретное управляющее устройство можно использовать для одновременного управления несколькими однотипными объектами. Для этого оно поочередно с периодом повторения T подключается к каждому объекту. Импульсные и цифровые элементы, входящие в дискретные системы управления, обеспечивают более высокую точность передачи и преобразования сигналов. Системы управления, скомпактованные из дискретных элементов, имеют, как правило, меньшие габаритные размеры, массу и стоимость. Они надежнее и лучше защищены от помех. Дискретные элементы более удобны для агрегатно-блочного построения систем. Наконец, цифровые вычислительные устройства могут реализовать более сложные и следовательно, более гибкие законы управления.

7.2 Функциональная и алгоритмическая структуры амплитудно-импульсной системы

В общем случае импульсный элемент может входить в состав любого функционального блока системы управления. Дискретный характер работы системы может быть обусловлен, например, использованием датчика периодического действия (различные анализаторы состава вещества). Но в большинстве случаев дискретность системы связана с наличием в ее контуре коммутирующих устройств, которые периодически замыкают и разрывают цепь регулирования.

Рассмотрим типичную функциональную структуру импульсной системы (рисунок 7.2, а). К такой структуре могут быть сведены почти все случаи включения импульсного элемента. Импульсные элементы ИЭ₁ и ИЭ₂, которые реально находятся в задатчике и обратной связи, могут быть учтены одним импульсным элементом ИЭ.

Импульсный элемент ИЭ, осуществляющий в системе квантование по времени, можно рассматривать как амплитудно-импульсный модулятор (рисунок 7.3, а). Модулятор умножает несущий сигнал — последовательность одинаковых импульсов, поступающих с генератора импульсов ГИ, на модулирующий сигнал — входной непрерывный сигнал $x(t)$. Образующийся при этом на выходе дискретный сигнал $x_n(t)$ представляет собой последовательность импульсов, амплитуды которых равны или пропорциональны мгновенным значениям непрерывного сигнала.

Для упрощения анализа системы с АИМ целесообразно реальный импульсный элемент ИЭ заменить эквивалентным последовательным соединением идеального импульсного элемента ИИЭ и формирующего элемента ФЭ (рисунок 7.3, б).

Идеальный импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал $x(t)$ в последовательность мгновенных равноотстоящих друг от друга импульсов,

площади которых равны значениям входного сигнала в дискретные моменты времени. Формирующий элемент образует из мгновенных импульсов такие импульсы, которые по форме совпадают с импульсами на выходе реального импульсного элемента.

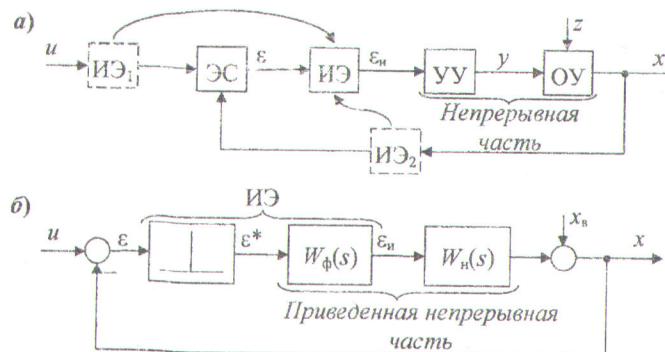


Рисунок 7.2 — Функциональная (а) и алгоритмическая (б) структуры амплитудно-импульсной системы управления

Реакция формирующего элемента на единичный импульс, т. е. на дельта-функцию, есть не что иное, как весовая функция $w_\phi(t)$ этого элемента. Поэтому, согласно известному соотношению (2.47) передаточная функция формирующего элемента

$$W_\phi(s) = \int_0^\infty w_\phi(t) e^{-st} dt, \quad (7.4)$$

где $w_\phi(t) = w_\phi(t)$ — функция, описывающая импульс на выходе реального импульсного элемента при действии на входе дельта-функции.

Формирующий элемент является звеном непрерывного действия, и его при анализе удобно объединять с непрерывной частью системы (рисунок 7.2, б). Образующееся при этом соединение называется *приведенной непрерывной частью* системы. Передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W_{nh}(s) = W_\phi(s)W_n(s), \quad (7.5)$$

В наиболее часто встречающемся случае, когда несущие импульсы имеют прямоугольную форму, формирующий элемент должен преобразовать единичную дельта функцию в прямоугольный импульс с единичной высотой и длительностью $\tau_u = \gamma T$, где γ — скважность или относительная длительность. Такой импульс можно представить в виде разности двух ступенчатых функций, сдвинутых на время τ_u :

$$w_u(t) = 1(t) - 1(t - \tau_u). \quad (7.6)$$

Отсюда, согласно (7.4), передаточная функция формирующего элемента

$$W_\phi(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\tau_u} = \frac{1}{s} (1 - e^{-s\tau_u}). \quad (7.7)$$

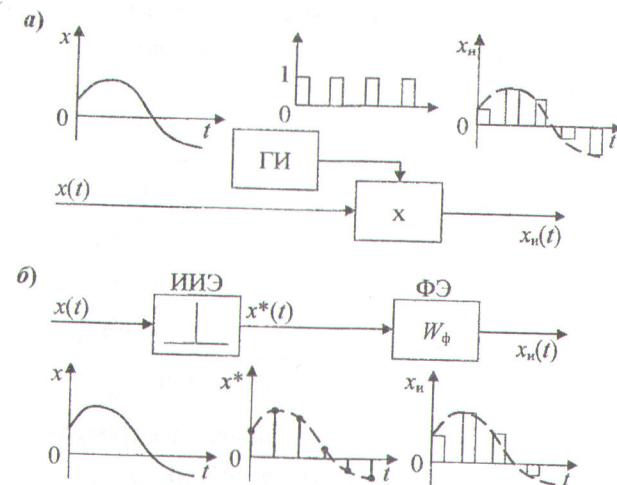


Рисунок 7.3 — Алгоритмическая структура импульсного элемента

Если длительность импульсов τ_u существенно меньше основных постоянных времени остальных звеньев непрерывной части разомкнутой системы, то формирующий элемент (7.7) может быть приближенно заменен бе-

зынерционным звеном $W_\phi(s) \approx \tau_n$.

При $\tau_n = T$ формирующий элемент (7.7) выдает в течение всего периода повторения T постоянный сигнал, равный значению входного сигнала в начале периода T . Поэтому в данном частном (но распространенном) случае формирующий элемент (7.7) называется *фиксирующим* или *запоминающим*. Передаточная функция фиксирующего элемента

$$W(s) = (1 - e^{-sT})/s. \quad (7.8)$$

Так как фиксацию мгновенного значения сигнала на постоянном уровне можно рассматривать как простейшую экстраполяцию — экстраполяцию полиномом нулевого порядка, то формирующий элемент в указанном частном случае ($\tau_n = T$) называется также *экстраполатором нулевого порядка*.

В качестве простейшего примера рассмотрим последовательно соединенные квантователь по времени К и запоминающий элемент ЗЭ, а также сигналы в этой цепи (рисунок 7.4).

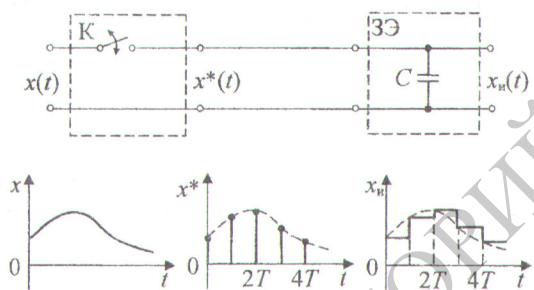


Рисунок 7.4 — Простейший квантователь и фиксатор (устройство выборки-хранения [12]).

Так как квантователь по времени и запоминающий элемент являются важными частями дискретной системы, существенно влияющими на ее динамику, проанализируем их частотные свойства. Квантователь по времени или идеальный импульсный элемент можно рассматривать как генератор дополнительных гармоник, частота которых равна частоте дискретизации

$\omega_d = 2\pi/T$. Спектр $X^*(j\omega)$ сигнала $x^*(t)$, квантованного по времени по принципу АИМ, равен сумме смешанных спектров непрерывного входного сигнала $x(t)$:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_d)], \quad (7.9)$$

где $X(j\omega)$ — спектр входного (квантуемого) сигнала (рисунок 7.5, а). Очевидно, что при квантовании амплитуды всех гармоник уменьшаются в T раз. Это означает, что импульсный элемент эквивалентен по своим свойствам безынерционному звуку с передаточным коэффициентом $1/T$.

В общем случае спектр $X^*(j\omega)$ существенно отличается от спектра $X(j\omega)$: он содержит как основную составляющую ($k = 0$), совпадающую с $X(j\omega)$, так и дополнительные составляющие ($k = \pm 1; \pm 2; \dots$), возникающие при квантовании.

Если ширина спектра квантуемого сигнала $\omega_x < \omega_d/2$, то дополнительные составляющие в основном диапазоне частот $(-\omega_d/2; +(\omega_d/2))$ не искажают форму спектра $X(j\omega)$ (рисунок 7.5, б), т. е.

$$X^*(j\omega) \approx \frac{1}{T} X(j\omega), \quad (7.10)$$

но их наличие тем не менее приходится учитывать при восстановлении непрерывного сигнала по его дискретным значениям.

Если частота квантования недостаточно велика и $\omega_x > \omega_d/2$, то в основном диапазоне спектр $X(j\omega)$ искажается прилегающими составляющими с $k \neq 0$ (рисунок 7.5, в).

Таким образом, на основе проведенных физических рассуждений можно сформулировать **теорему о квантовании**: если непрерывный сигнал обладает спектром, ограниченным частотой ω_x то его квантование по времени с частотой

$$\omega_d \geq 2\omega_x \quad (7.11)$$

не приводит к потере информации, т. е. сигнал однозначно и полностью представляется своими дискретными значениями, взятыми через ин-

тервал квантования

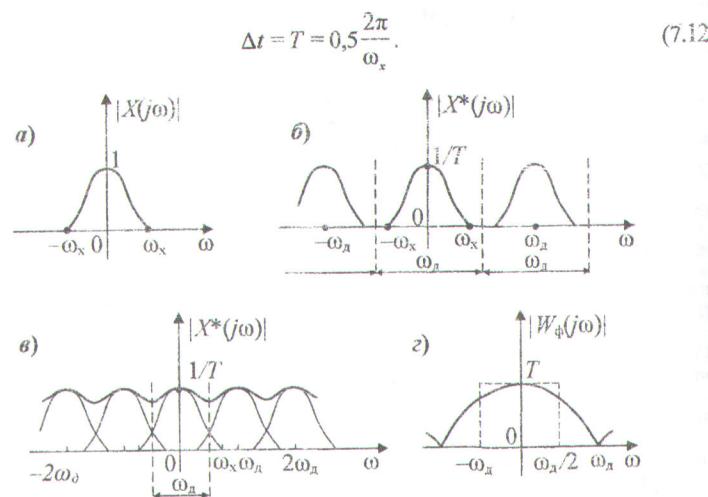


Рисунок 7.5 — Амплитудные спектры входного сигнала (а),
выходного сигнала идеального квантователя (б),
при $\omega_d < 2\omega_x$ (в) и АЧХ фиксатора (г)

Строгое доказательство этой теоремы было дано советским ученым-радиотехником В. А. Котельниковым в 1933 г. и американским математиком К. Шенноном в 1949 г.

Если сигнал $x(t)$ квантован в соответствии с условиями (7.11), (7.12), и его спектр $X(j\omega)$ в основной полосе $(-\omega)/2; \omega/2$ не искажен боковыми составляющими, то он может быть снова восстановлен в непрерывной форме при помощи формирующего элемента в виде идеального фильтра нижних частот с АЧХ (рисунок 7.5, г, штриховая линия)

$$|W_\phi(j\omega)| = \begin{cases} T & \text{при } |\omega| < \omega_d, \\ 0 & \text{при } |\omega| \geq \omega_d, \end{cases} \quad (7.13)$$

где $\omega_d = 2\omega_x$.

Но такой фильтр физически нереализуем, поэтому на практике пользуются фиксатором (7.8), АЧХ которого

$$|W_\phi(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| \quad (7.14)$$

существенно отличается от прямоугольной АЧХ (7.13). Очевидно, что такой реальный фиксатор несколько искажает исходный спектр $X(j\omega)$ в основной полосе и, кроме того, пропускает частично гармоники боковых составляющих с $\omega > \omega_d/2$.

При достаточно большой частоте повторения ($\omega_d >> \omega_x$) фиксатор (7.8) близок по своим свойствам к звену запаздывания

$$W_\phi(s) \approx Te^{-sT/2} \quad (7.15)$$

и импульсную систему (рисунок 7.2, а, б) можно рассматривать как чисто непрерывную, описываемую только передаточными функциями (7.5) и (7.15). Но при этом эквивалентное звено запаздывания (7.15) ухудшает запас устойчивости системы.

Для упрощенного анализа динамики импульсной системы фиксатор (7.8) можно описывать приближенно передаточной функцией апериодического звена

$$W_\phi(s) \approx T/(Ts + 1), \quad (7.16)$$

которая дает результат тем точнее, чем больше частота квантования.

Заметим, что при определении минимально допустимой частоты квантования для замкнутой системы под частотой ω_x в выражениях (7.11) и (7.12) следует понимать частоту пропускания непрерывной части системы. Так как обычно спектры входных сигналов и АЧХ системы убывают медленно и при конечных значениях ω_x не равны нулю (рисунок 10.7, а), то на практике принимают частоту $\omega_d = (5\dots 10)\omega_x$, а ширину спектра ω_x определяют по 5...10%-ной зоне интенсивности спектра. Подробнее о выборе частоты ω_d в [10], раздел 3.17.

7.3 Математическое описание амплитудно-импульсной системы

Z-преобразование. Математическое описание и анализ импульсной системы с амплитудной модуляцией существенно упрощаются, если все сигналы в системе (как в импульсной, так и в непрерывной части) рассматривать только в дискретные моменты времени $t=0T; 1T; 2T; \dots; iT; \dots; \infty$. При этом каждый непрерывный сигнал $x(t)$ удобно представлять в виде *решетчатой функции* времени $x(iT)$ (рисунок 7.1, б), значения которой определены только для дискретных моментов времени:

$$x^*(t) = x(t)|_{t=iT} = x(iT). \quad (7.17)$$

Между дискретными значениями аргумента t функция $x(iT)$ равна нулю. Непрерывная функция $x(t)$ является огибающей для решетчатой функции $x(iT)$, и каждому конкретному сигналу $x(t)$ соответствует вполне определенный сигнал $x(iT)$.

При замене реальных непрерывных сигналов решетчатыми функциями часто удобнее переходить к относительному времени $\bar{t} = t/T$, т. е. измерять время числом периодов квантования T . В этом случае относительный период $T = 1$, а решетчатая функция обозначается $x(i)$.

Последовательность неединичных импульсов, образующих решетчатую функцию на интервале $0 \leq T \leq \infty$, можно представить в виде бесконечного ряда

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) \delta(t - iT), \quad (7.18)$$

где $\delta(t - iT)$ — смещенная дельта-функция, существующая только в моменты времени $t = iT$ и равная нулю при всех других значениях t .

Применим к сумме (7.18) преобразование Лапласа (2.42), учитывая при этом, что изображение суммы оригиналов равно сумме их изображений, а также, что согласно теореме запаздывания (таблица 2.2) изобра-

жение смещенной дельта-функции равно e^{-siT} . Тогда изображение решетчатой функции (7.18) по Лапласу

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) e^{-siT}. \quad (7.19)$$

Выражение (7.19) называется *дискретным преобразованием Лапласа*. Оно содержит трансцендентный сомножитель e^{-siT} , из-за которого изображения $X^*(s)$ и соответствующие передаточные функции становятся иррациональными функциями аргумента s , что создает определенные трудности при их использовании.

Поэтому с целью получения передаточных функций импульсных систем в дробно-рациональной форме, свойственной непрерывным системам, целесообразна замена аргументов

$$z = e^{st} \quad (7.20)$$

и тогда вместо (7.19) получают более удобное для практического использования преобразование

$$X^*(z) = Z\{x(iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i}, \quad (7.21)$$

называемое *z-преобразованием решетчатой функции* (или *дискретной последовательности*) $x(iT)$.

Для большинства встречающихся в расчетах решетчатых функций *z*-преобразование может быть выполнено при помощи таблиц соответствия, которые приводятся в специальной литературе по импульсным системам. В таблице 7.1 приведены *z*-изображения только для функций времени, используемых далее в примерах.

Главное достоинство и удобство *z*-преобразования заключается в том, что сама запись *z*-изображения (7.21) указывает простой способ выполнения прямого и обратного преобразования:

1) чтобы по известной функции времени $x(t)$ найти ее *z*-изображение, необходимо каждое дискретное значение $x(iT)$ умножить на z^{-i} , а затем

свернуть получившийся степенной ряд в конечную сумму;

2) чтобы по известному изображению $X(z)$ найти соответствующий сигнал $x(i)$, необходимо представить изображение $X(z)$ в виде степенного ряда по убывающим степеням z^{-i} , получающиеся при этом числовые коэффициенты ряда и есть дискретные значения $x(iT)$ сигнала $x(i)$.

Таблица 7.1 — z -изображения простейших функций времени

$x(t)$ ($t \geq 0$)	$x(iT)$	$X(s)$	$x(z)$
$\delta(t)$	$\delta(iT)$	1	1
$1(t)$	$1(iT) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - iT)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	iT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$(iT)^2$	$\frac{2!}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$E^{-\alpha t}$	$E^{-\alpha iT} = d^i$ ($d = e^{-\alpha iT}$)	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{z}{z-d}$

Свойства z -преобразования аналогичны свойствам обычного преобразования Лапласа. Приведем важнейшие из них:

1) линейность:

$$Z\{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)\} = a_1X_1(z) \pm a_2X_2(z); \quad (7.22)$$

2) теорема о начальном значении оригинала:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(iT) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z); \quad (7.23)$$

3) теорема о конечном значении оригинала:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(iT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z); \quad (7.24)$$

4) теорема о смещении аргумента оригинала (теорема запаздывания):

$$Z\{x(iT - \ell T)\} = X(z)z^{-\ell}. \quad (7.25)$$

Соотношение (7.25) означает, что умножение на $z^{-\ell}$ соответствует за-

держке дискретного сигнала на ℓ интервалов.

Как и для обычных систем непрерывного действия, для описания передаточных свойств импульсных систем наиболее удобно использовать структурный метод и передаточные функции.

Характеристики типовой импульсной цепи. Введем понятие *типовой импульсной цепи*, в которую входит идеальный импульсный элемент («ключ») и непрерывная часть с передаточной функцией $W_h(s)$ (рисунок 7.6). Рассмотрим динамику этой цепи, ее входной и выходной сигналы только в дискретные моменты времени iT (для чего на выходе цепи показан фиктивный квантователь, работающий синхронно с входным квантователем). Тогда передаточные свойства импульсной цепи можно характеризовать с помощью *дискретной передаточной функции* (д. п. ф.)

$$W(z) = Y(z)/X(z), \quad (7.26)$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ — z -изображения входного и выходного сигналов цепи.

Д. п. ф. $W(z)$ импульсной цепи связана с весовой функцией $w(t)$ непрерывной части преобразованием:

$$W(z) = Z\{w(iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT)z^{-i} \quad (7.27)$$

Непрерывная часть цепи задана обычно в виде передаточной функции $W(s)$, поэтому для отыскания функции $W(z)$ необходимо предварительно находить весовую функцию $w(t)$.

Так как в таблицах соответствия изображения по Лапласу и z -изображения обычно указываются рядом, то функцию $W(z)$ можно определить сразу по виду функции $W(s)$. Этому непосредственному переходу от $W(s)$ к $W(z)$ соответствует условная запись

$$W(z) = Z\{W(s)\}. \quad (7.28)$$

Если в типовой цепи после «ключа» стоит фиксатор (7.8), то д. п. ф. всей цепи может быть определена по формуле

$$W(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-T}}{s} W_n(s)\right\} = (1-z^{-1}) Z\left\{\frac{W_n(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_n(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\{h_n(t)\}, \quad (7.29)$$

где $W_n(s)$ — передаточная функция непрерывной части (не включающей фиксатор).

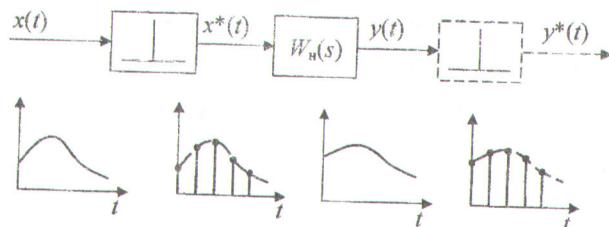


Рисунок 7.6 — Типичный участок импульсной системы

Способы получения д. п. ф. по формулам (7.27)...(7.29) являются точными, но их применение для реальных систем высокого порядка затруднительно. Поэтому в практических расчетах импульсных систем используют *приближенные способы* перехода от функций $W(s)$ к д. п. ф. $W(z)$. Эти способы основаны на замене производной по времени, фигурирующей в уравнении непрерывной части, так называемой первой разностью:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}. \quad (7.30)$$

Подставляя разность (7.30) в дифференциальное уравнение непрерывного (аналогового) интегратора

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t), \quad (7.31)$$

можно получить разностное уравнение интегратора

$$y(iT) = y(iT - 1T) + Tx(iT) \quad (7.32)$$

которое легко записать в z -форме:

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + TX(z). \quad (7.33)$$

Отсюда д. п. ф. интегратора

$$W(z) = Y(z)/X(z) = T/(1 - z^{-1}) = Tz/(z - 1). \quad (7.34)$$

Учитывая, что обычная передаточная функция интегратора

$$W(s) = 1/s, \quad (7.35)$$

нетрудно получить одну из наиболее часто используемых формул приближенного перехода от передаточных функций непрерывной части (без учета фиксатора) к д. п. ф.:

$$s = (z - 1)/Tz. \quad (7.36)$$

Более точный переход от непрерывной системы к дискретной обеспечивает *подстановка Тастина*

$$s = 2(z - 1)/(z + 1). \quad (7.37)$$

Замена (7.36) соответствует приближенному (численному) интегрированию по методу прямоугольников, подстановка (7.37) — интегрированию по методу трапеций.

При достаточно большой частоте дискретности, когда $\omega_d >> \omega_n$, где ω_n — полоса пропускания непрерывной части системы, приближенные способы перехода, основанные на заменах (7.36) и (7.37), дают результаты, близкие к точным д. п. ф., а частотные свойства импульсной цепи эквивалентны свойствам непрерывной части с АФХ $W_n(j\omega)/T$. Это условие эквивалентности обычно выполняется, если наибольшая постоянная времени непрерывной части больше периода квантования $T = \Delta t$.

Изложенные приемы математического описания импульсных систем с помощью z -изображений и соответствующих им разностных уравнений удобно использовать для **цифрового моделирования чисто непрерывных систем** на ЭВМ. Переход от обычных передаточных функций $W(s)$ к д. п. ф. $W(z)$ осуществляется аналогично — подстановками (7.36) и (7.37). Но если для цифрового моделирования используются точные д. п. ф., полученные по формуле (7.27) или по таблицам соответствия, то необходимо предварительно, перед переходом к разностному уравнению, найти д. п. ф. $W'(z)$, устанавливающую связь между огибающими входной и выходной дискретных последовательностей:

$$W(z) = TW(z). \quad (7.38)$$

Множителем T компенсируется ослабление сигналов, которое вносится реально квантователем в импульсной системе (и которое отсутствует в моделируемой непрерывной системе).

Любую д. п. ф., $W(z)$ или $W'(z)$, в общем случае можно представить в виде отношения полиномов переменной z :

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{K(z)}{D(z)} \quad (7.39)$$

или

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-1-n} + \dots + b_m z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{K(z^{-1})}{D(z^{-1})}. \quad (7.40)$$

Передаточной функции (7.40) соответствует операторное уравнение динамики импульсной цепи в z -форме:

$$\begin{aligned} a_0 Y(z) + a_1 Y(z)z^{-1} + \dots + a_n Y(z)z^{-n} &= \\ = b_0 X(z)z^{m-n} + b_1 X(z)z^{m-1-n} + \dots + b_m X(z)z^{-n}, & \end{aligned} \quad (7.41)$$

по которому легко получить разностное уравнение импульсной цепи (рисунок 7.6) или моделируемой непрерывной

$$\begin{aligned} a_0 y(iT) + a_1 y(iT - 1T) + \dots + a_n y(iT - nT) &= \\ = b_0 x(iT + (m-n)T) + b_1 x(iT + (m-1-n)T) + \dots + b_m x(iT - nT), & \end{aligned} \quad (7.42)$$

Разностные уравнения вида (7.42) обладают важным преимуществом перед обыкновенными дифференциальными уравнениями, разрешенные относительно $y(iT)$ они уже в самой своей записи содержат алгоритм решения, который легко программируется на ЦВМ.

Характеристики замкнутой импульсной системы. Для определения д. п. ф. замкнутой импульсной системы можно использовать правила структурных преобразований типовых соединений, сформулированные в разделе 2.10 для непрерывных систем. Но при этом следует помнить, что:

1) обычные правила структурных преобразований справедливы для

импульсных систем, только если каждая ветвь типового соединения представляет собой типовую импульсную цепь (рисунок 7.6), состоящую из идеального квантования (на входе цепи) и непрерывной части;

2) при иной структуре цепи и всего типового соединения эквивалентная д. п. ф. определяется более сложными правилами.

Для основной схемы одноконтурной импульсной системы (рисунок 7.2, б) д. п. ф. по каналу $u \rightarrow x$

$$\Phi_{uu}(z) = X(z)/U(z) = W(z)/(1 + W(z)) \quad (7.43)$$

и по каналу $u \rightarrow e$

$$\Phi_{eu}(z) = E(z)/U(z) = 1/(1 + W(z)), \quad (7.44)$$

где $W(z) = K(z)/D(z)$ — д. п. ф. разомкнутого контура, представляющего собой (в данной схеме) типовую импульсную цепь. Характеристическое уравнение импульсной системы

$$1 + W(z) = 0 \quad (7.45)$$

или в развернутых формах

$$D(z) + K(z) = F(z) = 0, \quad (7.46)$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (7.47)$$

7.4 Основное условие и критерии устойчивости импульсных систем

Динамические свойства импульсных систем с амплитудной модуляцией во многом аналогичны динамическим свойствам непрерывных систем. Поэтому методы анализа таких импульсных систем являются аналогами соответствующих методов исследования непрерывных систем.

Устойчивость импульсной системы управления, как и устойчивость непрерывной системы, определяется характером ее весовой функции. Импульсная система устойчива, если ее весовая функция $w(iT)$ с течением времени затухает, т. е. если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} w(iT) = 0. \quad (7.48)$$

Весовая функция $w_c(iT)$ является решением однородного разностного уравнения

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) X(z) = 0. \quad (7.49)$$

Решение уравнения (7.49) при отсутствии у него одинаковых корней z представляет собой сумму

$$w(iT) = \sum_{k=1}^n C_k z_k^i, \quad (7.50)$$

где C_k — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий; z_k — корни характеристического уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (7.51)$$

Из выражения (7.50) видно, что при $i \rightarrow \infty$ решение $w(iT)$ стремится к нулю только в том случае, если все корни z_k по модулю меньше единицы, т. е. если

$$|z_k| < 1, k = 1; 2; \dots; n. \quad (7.52)$$

Запись (7.52) выражает **общее условие устойчивости**: для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы находились внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

Если хотя бы один корень z_k располагается на окружности единичного радиуса, то система находится на границе устойчивости. При $|z_k| > 1$ система неустойчива.

Таким образом, единичная окружность в плоскости корней z_k является границей устойчивости и, следовательно, играет такую же роль, как минимая ось в плоскости корней s_k (рисунок 7.7, б). Этот вывод вытекает также из основной подстановки (7.20) метода z -преобразования. Действительно, пусть $s_k = \alpha_k \pm j\beta_k$. Тогда

$$z_k = e^{s_k T} = e^{\alpha_k T} e^{\pm j\beta_k T}, \quad (7.53)$$

и требование $|z_k| < 1$ сводится к неравенству

$$|e^{\alpha_k T}| < 1, \quad (7.54)$$

откуда следует известное в теории непрерывных систем условие устойчивости

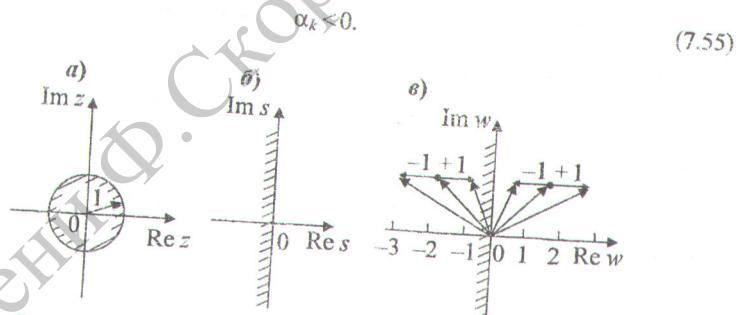


Рисунок 7.7 — Области устойчивости в плоскости корней

Для суждения об устойчивости импульсных систем можно использовать обычные критерии устойчивости линейных систем, но при этом приходится учитывать некоторые особенности импульсных систем. Так, для того чтобы применить **критерий Гурвица**, необходимо предварительно в уравнении (7.50) произвести замену переменной z на переменную w путем подстановки

$$z = (w + 1)/(w - 1) \quad (7.56)$$

и получить преобразованное характеристическое уравнение

$$d_0 w^n + d_1 w^{n-1} + \dots + d_n = 0 \quad (7.57)$$

Корням уравнения (7.51), расположенным в плоскости корней внутри окружности единичного радиуса (рисунок 7.7, а), теперь будут соответствовать корни преобразованного уравнения (7.57), находящиеся в плоскости корней w_k слева от минимой оси (рисунок 7.7, в). Действительно, если $|z_k| < 1$, то модуль числителя в выражении (7.56) должен быть меньше модуля знаменателя, т. е. $|w_k + 1| < |w - 1|$. А это

возможно лишь в том случае, если вектор w_k расположен в левой полуплоскости (рисунок 7.7, б).

При использовании **критерия Михайлова** в характеристический полином $F(z)$ подставляют $z = e^{j\omega T}$, изменяют ω от 0 до π/T и в комплексной плоскости строят годограф вектора $F(e^{j\omega T})$. Импульсная система устойчива, если при возрастании ω от 0 до π/T характеристический вектор $F(e^{j\omega T})$ повернется против часовой стрелки на угол $n\pi$. Если годограф характеристического вектора проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости.

Годографы вектора $F(e^{j\omega T})$ для устойчивой и неустойчивой системы второго порядка показаны на рисунке 7.8, а.

Отметим, что импульсные системы второго и даже первого порядка, в отличие от непрерывных систем такого же порядка, могут быть неустойчивыми при положительных коэффициентах характеристического уравнения. Это объясняется тем, что фиксатор, содержащийся обычно в контуре импульсной системы, вносит дополнительное отставание по фазе.

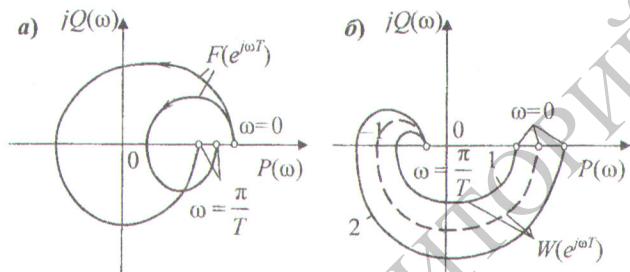


Рисунок 7.8 — Критерий Михайлова (а) и Найквиста (б) для импульсной системы

Критерий Найквиста для импульсных систем формулируется так же, как и для непрерывных систем: система устойчива, если АФХ $W(e^{j\omega T})$ ус-

тойчивого разомкнутого контура не охватывает точку $(-1; j0)$.

Характеристики устойчивой импульсной системы, неустойчивой системы и системы, находящейся на границе устойчивости, показаны штриховыми линиями на рисунке 7.8, б.

Устойчивость разомкнутого контура импульсной системы определяется устойчивостью ее непрерывной части: если последняя устойчива, то и весь контур (включая импульсный элемент) устойчив.

Следует иметь в виду, что, хотя импульсный элемент не влияет на устойчивость разомкнутого контура, он существенно влияет на устойчивость и качество замкнутой системы. При малых периодах повторения частотная характеристика разомкнутого контура совпадает с частотной характеристикой непрерывной части, и устойчивость импульсной системы полностью определяется свойствами непрерывной части. По мере увеличения периода повторения у большинства систем уменьшается предельный передаточный коэффициент и ухудшаются динамические свойства. Однако на некоторые структурно-неустойчивые непрерывные системы и на системы с запаздыванием, АФХ которых заходит в правую полуплоскость, импульсный элемент оказывает стабилизирующее действие. Для таких систем рекомендуется период повторения T выбирать из условия

$$T \geq \pi/\omega_0, \quad (7.58)$$

где ω_0 — частота, при которой АФХ непрерывной части пересекает положительную мнимую ось $Q(\omega_0)$.

Качество импульсных систем управления характеризуется такими же показателями, как и качество непрерывных систем: точностью в установленных режимах, длительностью и перегулированием переходного процесса.

Контрольные задания и вопросы

- 1 Поясните на графике принцип амплитудно-импульсной модуляции.
- 2 В чём преимущества дискретных (цифровых) систем управления?
- 3 Каково условие квантования непрерывного сигнала с ограниченным спектром ω_x ?
- 4 С помощью какой замены переменных получается основная формула z -преобразования?
- 5 Какими должны быть корни z_k характеристического уравнения, чтобы импульсная система была устойчива? Объясните это условие устойчивости с помощью формулы (7.50).

8 Идентификация объектов управления и синтез линейных систем управления

8.1 Идентификация объектов управления

Важными исходными данными для проектирования систем автоматического управления являются динамические свойства объектов регулирования, которые обычно описываются дифференциальными уравнениями. Однако дифференциальные уравнения сложных объектов составить не всегда удается. Поэтому приходится прибегать к специальным экспериментальным исследованиям для определения динамики объектов регулирования. Эту работу называют *идентификацией объектов управления*.

Динамическими характеристиками линейных объектов с постоянными параметрами служат либо их импульсные переходные функции $w(t)$, либо их передаточные функции $W(s)$ или частотные характеристики, поскольку каждая из этих функций определяет переходной процесс, т. е. поведение объекта в динамике, при любом воздействии.

На экспериментальном определении одной из этих характеристик базируются основные методы идентификации объектов управления.

8.1.1 Экспериментальное определение частотных характеристик

Простейшим с принципиальной точки зрения является метод определения динамических характеристик, основанный на физической сущности частотного метода (раздел 2.6). Сигнал $u(t)$, действующий на динамическую систему в эксперименте, всегда может быть представлен в виде ряда Фурье (2.12), члены которого можно рассматривать как отдельные гармонические воздействия.

Практически можно значительно упростить вычисления, если отделить часть ряда Фурье с синусами от части с косинусами. Этого можно достигнуть «достраиванием» функции $y(t)$ до четной или нечетной. Для четной функции из разложения в ряд (2.12) выпадает та часть, которая содержит синусы, для нечетной — содержащая косинусы, т. е. $\int_{-T/2}^{T/2} y(\vartheta) \cos k\omega_1 \vartheta d\vartheta = 0$.

Тогда для конечного числа N членов ряда разложение (2.12) превращается в ряд синусов

$$y(t) = \sum_{k=1}^N b_k \sin k\omega_1 t, \quad (8.1)$$

$$\text{где, } b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} y(\vartheta) \sin k\omega_1 \vartheta d\vartheta.$$

Если АЧХ исследуемой линейной системы $A(\omega)$, а ФЧХ $\phi(\omega)$, то реакция $x(t)$ на сигнал $y(t)$, представленный в виде ряда (8.1), определяется выражением

$$x(t) = \sum_{k=1}^N b_k A(k\omega_1) \sin [k\omega_1 t - \phi(k\omega_1)], \quad (8.2)$$

где $A(k\omega_1)$ — значение АЧХ на частоте $k\omega_1$, $\phi(k\omega_1)$ — значение ФЧХ на частоте $k\omega_1$.

Из выражений (8.1) и (8.2) следует наиболее простая практическая реализация частотного метода определения динамических характеристик. Отношение коэффициентов разложения из (8.1) и (8.2) определяет значение амплитуды на данной частоте $A(k\omega_1)$, а фазовый сдвиг — значение фазы $\phi(k\omega_1)$. Полученные значения амплитуд и фаз при разных k позволяют построить АЧХ и ФЧХ исследуемого объекта.

Очевидно, что рассмотренный метод неприменим в условиях нормальной эксплуатации системы, так как подаваемые на вход гармонические сигналы могут привести к изменению технологических режимов в производственном процессе.

Второй недостаток экспериментального метода частотных характеристик — последовательный режим работы, требующий больших интервалов наблюдения.

8.1.2 Экспериментальное определение временных характеристик

Длительность эксперимента можно сократить если измерять не частотные, а временные характеристики (раздел 2.4), например импульсную переходную функцию. В основе методов определения импульсных переходных функций лежит связь между входной и выходной величинами, устанавливаемая интегралом свертки (2.41).

Наиболее простой метод определения импульсной переходной функции $w(t)$ состоит в том, что на вход системы подается импульс достаточно малой продолжительности. Тогда этот импульс можно рассматривать как дельта-функцию (2.4), подстановка которой в интеграл свертки (2.41) дает

$$x(t) = \int \delta(t-\tau) w(\tau) d\tau = w(t). \quad (8.3)$$

Определение $w(t)$ в этом случае сводится к регистрации сигнала $x(t)$ на выходе объекта. Продолжительность импульса не должна превышать одной четвертой части от наименьших значений постоянных времени объекта. Другой критерий состоит в том, что продолжительность импульса не должна превышать наименьшего из промежутков времени, в течение которого переходная функция может существенно измениться.

Вместо импульса можно применять единичную ступенчатую функцию (2.3), реакция на которую определяется переходной функцией $h(t)$, а затем вычислить функцию

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (8.4)$$

8.1.3 Статистические методы определения импульсной переходной функции

В основе статистических методов определения импульсных переходных функций лежит интегральное уравнение (2.41) в сочетании с взаимной корреляционной функцией (6.25)

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} R_y(\tau - \theta) w(\theta) d\theta, \quad (8.5)$$

позволяющее по корреляционной функции сигнала $y(t)$ на входе $R_y(\tau)$ исследуемого объекта и взаимной корреляционной функции $R_w(\tau)$ между выходным $x(t)$ и входным $y(t)$ сигналами найти импульсную переходную функцию $w(\tau)$. Основным преимуществом статистических методов по сравнению с другими методами является их помехоустойчивость.

Действительно, предположим, что к объекту приложено не только воздействие $y(t)$, но и шум $n(t)$. Тогда выходной сигнал определяется:

$$x(t) = \int_0^{\infty} y(t - \tau) w(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} n(t - \tau) w(\tau) d\tau. \quad (8.6)$$

Определить $w(\tau)$ из формулы (8.6) достаточно трудно, так как второй член в правой части является источником погрешности, оценка которой часто невозможна. Если же умножить обе части формулы (8.6) на $y(t + \theta)$ и усреднить, то получится уравнение (8.5), которое остается справедливым при любом количестве шумов $n_i(t)$, действующих на объект, при условии, что они не коррелированы с воздействием $y(t)$.

Статистические методы определения импульсной переходной функции можно подразделить на методы, требующие и не требующие введения искусственных шумов.

Первые методы основаны на том, что к реальному входному сигналу $y(t)$ добавляется искусственный вспомогательный сигнал $n(t)$ с известной

корреляционной функцией. Обычно сигналом $n(t)$ служит белый шум. В случае отсутствия корреляции между $y(t)$ и $n(t)$ имеем

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_y(\tau - \theta) w(\theta) d\theta. \quad (8.7)$$

Если $n(t)$ — белый шум, то $R_{xy}(\tau)$ является дельта-функцией и (8.7) сводится к виду

$$R_{xy}(\tau) = a_n w(\tau). \quad (8.8)$$

Выражение (8.8) показывает, что определение импульсной переходной функции в этом случае не требует решения интегрального уравнения.

В тех случаях, когда введение искусственного шума в систему нежелательно, пользуются уравнением (8.5). Это уравнение требует для вычисления $w(\tau)$ определения корреляционных функций $R_x(\tau)$, $R_y(\tau)$ или согласно (6.28) спектральных плотностей $S_y(\omega)$, $S_{xy}(\omega)$ и решения интегрального уравнения. Подробное описание этих действий имеется в специальной литературе.

8.1.4 Компенсационные методы определения динамических характеристик

Компенсационные методы идентификации объектов управления не требуют математического описания сигналов в процессе определения динамических характеристик. Их сущность заключается в следующем. Реальный входной сигнал $y(t)$, действующий на объект, поступает параллельно и на модель (рисунок 8.1). Модель представляет собой динамическую систему с несколькими регулируемыми параметрами a_i . Реакция объекта $x(t)$ сравнивается с выходным сигналом модели $x_m(t)$ и в соответствии с выбранным критерием ошибки осуществляется настройка параметров модели.



Рисунок 8.1 — Структурная схема системы для определения динамических характеристик объекта компенсационным методом

Модель обычно имеет фиксированную структуру, которая выбирается исходя из априорных сведений о реальном объекте. Если структура объекта известна, а параметры неизвестны, то структура модели может быть выбрана такой же, как и структура объекта. В других случаях объект может быть менее известен, тогда динамика объекта аппроксимируется моделью выбранной структуры. Структура модели оказывает большое влияние на точность и скорость настройки регулируемых параметров. Она должна выбираться исходя из имеющихся сведений не только о динамике объекта, но и о характеристиках входного воздействия.

Скорость настройки параметров определяется в значительной степени существующей между ними взаимосвязью. Так, при поочередной настройке параметров модели оказывается, что ранее отрегулированные параметры перестают быть оптимальными. При таких условиях каждый параметр необходимо регулировать несколько раз.

После настройки параметров характеристики модели идентичны характеристикам исследуемого объекта управления.

Математические и технические аспекты различных методов идентификации объектов управления подробно описаны в специальной литературе по теории автоматического управления и регулирования.

8.2 Основные понятия о синтезе систем управления

Все математические задачи, решаемые в теории автоматического управления, можно объединить в две большие классы — задачи анализа и задачи синтеза автоматических систем.

В задачах анализа полностью известна структура системы, заданы все (как правило) параметры системы, и требуется оценить какое-либо ее статическое или динамическое свойство. К задачам анализа относятся расчет точности в установившихся режимах, определение устойчивости, оценка качества системы.

Задачи синтеза можно рассматривать как обратные задачам анализа: в них требуется определить структуру и параметры системы по заданным показателям качества.

Синтезом автоматической системы называют процедуру определения структуры и параметров системы по заданным показателям качества. Синтез является важнейшим этапом проектирования и конструирования системы. В общем случае при проектировании системы необходимо определить алгоритмическую и функциональную структуру, т. е. решить задачу полного синтеза.

Алгоритмическую структуру системы (или ее части) находят при помощи математических методов и на основании требований, записанных в четкой математической форме. Поэтому процедуру отыскания алгоритмической структуры часто называют *теоретическим синтезом* или *аналитическим конструированием системы управления*.

Синтез функциональной структуры или *технический синтез* системы заключается в выборе конкретных элементов (с учетом их физических свойств) и согласовании статических и энергетических характеристик смежных элементов. Этот этап проектирования не имеет пока строгой математической основы и относится к области инженерного искусства. Выполняя синтез функциональной структуры, прежде всего, соглашаются

входные и выходные сигналы смежных элементов. Сигналы должны иметь одинаковую физическую основу и одинаковые несущие величины. При выборе вида энергии и конструкции отдельных элементов руководствуются практическими соображениями об их простоте, надежности, минимальных габаритах и стоимости. Кроме этого учитывают условия эксплуатации элементов: температуру окружающей среды, агрессивность среды, вибрацию, взрывоопасность. На выбор функциональной структуры часто влияют традиции и опыт проектирования аналогичных систем. Последовательность решения задачи полного синтеза может быть различной. В некоторых простых случаях задачу удается решить в идеальной (с методологической точки зрения) последовательности: сначала определить при помощи математических методов алгоритмическую структуру системы, а затем — подобрать соответствующие конструктивные элементы.

Однако применение этой последовательности при проектировании скольнибудь сложных промышленных систем управления, как правило, оказывается по ряду причин невозможным. В первую очередь возникают трудности в подборе конструктивных элементов: в ограниченной номенклатуре серийно изготавливаемых средств управления может не оказаться устройств с необходимыми алгоритмическими свойствами. Поэтому задачу синтеза в большинстве случаев решают следующим образом.

Сначала, исходя из требований к назначению системы и учитывая условия ее работы, по каталогам серийного оборудования выбирают функционально необходимые элементы системы: регулирующий орган, исполнительное устройство, датчики. Эти элементы вместе с объектом управления ОУ образуют неизменяемую часть системы. Затем на основании требований к статическим и динамическим свойствам системы определяют ее изменяемую часть, в которую входит усилительно-преобразующий блок и различные корректирующие устройства. Алгоритмическую структуру изменяемой части находят с учетом свойств уже выбранных функционально необходимых элементов, а техническая реализация этой части осуществляется с

использованием стандартных унифицированных регуляторов и различных корректирующих и компенсирующих устройств. Корректирующие устройства, включаемые в контур последовательно или в виде внутренней обратной связи, служат для улучшения динамических свойств системы. Компенсирующие устройства включаются между датчиком, воспринимающим возмущающее воздействие, и усилительно-преобразующим блоком, и служат для улучшения точности системы.

Таким образом, процессы определения алгоритмической и функциональной структур всей системы тесно переплетаются друг с другом. Нередко их приходится выполнять по несколько раз, чередуя между собой. Окончательное решение о структуре системы принимается, как правило, на основе компромисса между точностью и качеством, с одной стороны, и простотой и надежностью, с другой.

Заключительным этапом проектирования системы управления является *параметрическая оптимизация* — расчет настроенных параметров выбранного регулятора.

После решения задачи синтеза обычно выполняют анализ синтезированной системы: методами, изложенными выше, проверяют, обладает ли система необходимыми показателями точности, устойчивости и качества.

На всех этапах синтеза и анализа систем целесообразно применение аналоговых и цифровых вычислительных машин. Моделирование систем на вычислительных машинах позволяет исследовать большое количество вариантов структур и параметров и тем самым существенно упростить решение задачи синтеза.

8.3 Общие принципы синтеза алгоритмической структуры системы управления

Идеальная структура системы. Для решения задачи синтеза алгоритмической структуры должны быть известны передаточная функция $W_o(s)$ объекта управления, возмущения x_v и x_b , действующие на входе и выходе объекта, а также шумы $x_{\text{ш}}$, возникающие в каналах задания и измерения (рисунок 3.14, а, б).

В простейшем случае, когда возмущающие воздействия на объект отсутствуют, управление можно осуществлять по разомкнутой схеме (рисунок 8.2, а). Если при этом передаточную функцию $W_y(s)$ управляющего устройства принять равной

$$W_y(s) = 1/W_o(s), \quad (8.9)$$

то обеспечится полная (структурная) компенсация инерционности объекта, и система управления будет практически мгновенно воспроизводить на выходе объекта задающее воздействие $u_{\text{опт}}$. Задание $u_{\text{опт}}$ формируется оптимальным фильтром с передаточной функцией $\Phi_{\text{опт}}(s)$, которая выбирается так, чтобы фильтр как можно лучше пропускал все составляющие сигнала u и подавлял шум $x_{\text{ш}}$.



Рисунок 8.2 — Алгоритмические структуры идеальной разомкнутой системы

Если на объект действует возмущение x_b , которое поддается измерению, то теоретически можно синтезировать идеальную разомкнутую систему

управления с полной компенсацией возмущения (рисунок 8.2, б). Причем, передаточная функция (8.9), обеспечивающая полную компенсацию инерционности объекта, оказывается наилучшей и для компенсации («парирования») возмущения x_b . Действительно, при выполнении условия (8.9) всегда $W_y(s) W_o(s) = 1$, поэтому полезная составляющая x_y на выходе объекта будет полностью уравновешивать возмущение x_b .

Но возмущение x_b , как правило, не удается измерить, и систему управления приходится строить по замкнутой схеме или принципу обратной связи. Для отыскания структуры идеальной замкнутой системы можно использовать идею косвенного измерения возмущения x_b с помощью модели объекта $W_{\text{ом}}(s)$ (рисунок 8.3, а). Очевидно, что при

$$W_{\text{ом}}(s) = W_o(s) \quad (8.10)$$

вычисляемый на выходе модели сигнал

$$x_{\text{в.м}} = x - x_{y,\text{м}} = (x_y + x_b) - x_{y,\text{м}} = x_b \quad (8.11)$$

является косвенно измеренным возмущением x_b и его можно, как и в схеме на рисунке 8.2, б, ввести в управляющее устройство с передаточной функцией $W_o(s)$ и, таким образом, снова получить идеальную разомкнутую структуру. В ней в соответствии с правилами структурных преобразований сигнал $x_{\text{в.м}}$ можно перенести на вход управляющего устройства и приложить к сумматору 2. Тогда управляющее устройство W_o^{-1} окажется охваченным внутренней положительной обратной связью, а сигнал после сумматора 1 будет соответствовать сигналу ошибки $\varepsilon = u - x$. Последнее означает, что система стала замкнутой и работает по принципу отрицательной обратной связи с регулятором (рисунок 8.3, а, штриховой прямоугольник)

$$W_{\text{п.и}}(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{1/W_o(s)}{1 - W_{\text{ом}}(s)/W_o(s)}. \quad (8.12)$$

При точном совпадении модели и объекта регулятор (8.12) будет работать как пропорциональный с $k_p = \infty$, что соответствует нулевым ошибкам по каналам задания и возмущения.

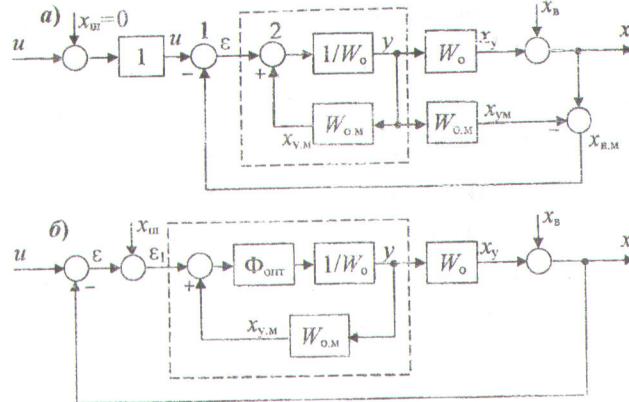


Рисунок 8.3 — Алгоритмические структуры идеальной замкнутой системы

В общем случае, когда $x_b \neq 0$ и $x_w \neq 0$, алгоритмическая структура идеальной замкнутой системы (рисунок 8.3, б) сочетает в себе признаки обеих структур, обоснованных выше эвристическим путем. В этой идеальной структуре регулятор также содержит внутреннюю положительную обратную связь, звенья $1/W_0$, $W_{0\cdot M}$, и кроме того, — оптимальный фильтр Φ_{opt} . Замкнутая система с таким регулятором теоретически эквивалентна идеальной разомкнутой системе управления по возмущению x_b (рисунок 8.2, б), которая практически мгновенно воспроизводит задание u и полностью компенсирует возмущение x_b . Передаточная функция регулятора идеальной системы (рисунок 8.3, б, штриховой прямоугольник)

$$W_{p\cdot n}(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon_1(s)} = \frac{\Phi_{opt}(s)}{1 - \Phi_{opt}(s) W(s)}. \quad (8.13)$$

Звено $\Phi_{opt}(s)$, входящее в прямую цепь регулятора, осуществляет оптимальную фильтрацию внешних воздействий и вырабатывает оптимальное задание u_{opt} . Обратная модель объекта $1/W_0(s)$ компенсирует его инерционность, а прямая $W_{0\cdot M}$ прогнозирует влияние управляющего

воздействия u на управляемую переменную x (вычисляет составляющую x_b на выходе объекта).

Так как сигнал $x_{y\cdot M}$ с выхода прогнозирующего звена поступает на вход регулятора с положительным знаком, то вся система после очередного изменения управляющего воздействия оказывается как бы разомкнутой. Вследствие этого реальная замкнутая система теоретически эквивалентна разомкнутой системе управления по возмущению x_b .

Используемое в идеальной системе включение последовательно с объектом звена в виде обратной модели объекта является принципиальной основой структурного и параметрического синтеза систем управления, а сам прием называется *методом компенсации инерционности объекта*.

В практических задачах синтеза чаще всего применяется *частичная (параметрическая) компенсация* — устранение влияния одной...двух (обычно самых больших) постоянных времени объекта. Для этого последовательно с инерционным объектом

$$W_0(s) = k_0/(T_{01}s + 1)(T_{02}s + 1)\dots(T_{0n}s + 1), \quad (8.14)$$

где $T_{01} > T_{02} > T_{03} > \dots > T_{0n}$, включают форсирующее звено первого — второго порядка с передаточной функцией

$$W_k(s) = k_k(T_{k1}s + 1)(T_{k2}s + 1), \quad (8.15)$$

для которого постоянные времени должны быть равны компенсируемым постоянным времени объекта, т. е.

$$T_{k1} = T_{01}; T_{k2} = T_{02}, \quad (8.16)$$

и передаточный коэффициент

$$k_k = 1/k_0. \quad (8.17)$$

Следует заметить, что практическая реализация систем с идеальной структурой (рисунок 8.3, б) и применение метода компенсации инерционности объекта связаны с определенными техническими ограничениями и препятствиями, которые не всегда могут быть преодолены. В частности: как правило, невозможно точно реализовать обратную передаточную функцию объекта (8.9); форсирующие звенья вида (8.15),

используемые для частичной компенсации инерционности объекта, реально имеют свою инерционность; регулятор с внутренней положительной обратной связью обычно структурно неустойчив или имеет большой передаточный коэффициент, который вызывает нереализуемые управляющие воздействия. Тем не менее, несмотря на невозможность практической реализации системы с идеальной структурой, она является теоретическим пределом, к которому необходимо стремиться при синтезировании высококачественных систем управления. В соответствии с идеальной структурой (рисунок 8.2, б) можно сформулировать фундаментальный **принцип структурно-параметрической оптимизации систем управления с обратной связью**: управляющее устройство должно содержать динамическое звено с передаточной функцией, равной или близкой обратной передаточной функции объекта.

Идеальный регулятор для объектов с запаздыванием. Определим структуру и передаточную функцию идеального регулятора для инерционных объектов с запаздыванием, которые можно описать следующей обобщенной передаточной функцией

$$W_o(s) = W'_o(s)e^{-s\tau_o}, \quad (8.18)$$

где $W'_o(s)$ — дробно-рациональная функция, характеризующая инерционную часть объекта; τ_o — чистое запаздывание объекта.

Учтем, что при подстановке передаточной функции (8.18) в формулу (8.13) в передаточной функции регулятора появится множитель $e^{-s\tau_o}$, который соответствует идеальному упредителю и точная реализации которого технически невозможна. Поэтому с целью упрощения искомой структуры регулятора и облегчения его технической реализации целесообразно допустить, чтобы для объектов, содержащих чистое запаздывание τ_o , идеальная система воспроизводила задающее воздействие с запаздыванием τ_o , т. е., чтобы

$$\Phi_{xu}(s) = \Phi_{opt}(s) = \Phi'_{opt}(s)e^{-s\tau_o}, \quad (8.19)$$

где $\Phi'_{opt}(s)$ — оптимальный фильтр для сигналов u и x_u . Тогда согласно (8.13) получим идеальный регулятор для объектов с запаздыванием

$$W_{p,u}(s) = \frac{\Phi'_{opt}(s)}{1 - \Phi'_{opt}(s)e^{-s\tau_o}} W'_o(s), \quad (8.20)$$

который называется *регулятором Ресвика*.

Выражению (8.20) соответствует структура, представленная на рисунке 8.4, а. Внутренняя обратная связь регулятора Ресвика, содержащая звено чистого запаздывания, прогнозирует, какой сигнал должен появиться на выходе объекта после очередного изменения управляющего воздействия u . Так как эта связь положительная, то прогнозируемый сигнал постоянно компенсирует (нейтрализует) равный ему реальный выходной сигнал объекта. Результатирующий сигнал ε_p появляется только в первые моменты времени после изменения внешних воздействий u , x_u или x_v . Таким образом, благодаря дополнительной обратной связи, моделирующей динамику объекта, из основного контура как бы исключается чистое запаздывание τ_o , которое всегда ухудшает устойчивость системы и затрудняет решение задачи синтеза.

Как и в общем случае, практическая реализация идеальной системы управления объектом с запаздыванием связана с определенными техническими трудностями.

Существенным недостатком системы с регулятором (8.20) является ее критичность или сильная чувствительность к малым вариациям запаздывания объекта: система устойчива только при точном равенстве запаздывания объекта τ_o и запаздывания $\tau_{o,m}$, моделируемого в объекте, т. е.

$$\tau_o = \tau_{o,m}. \quad (8.21)$$

При несовпадении запаздываний система может стать неустойчивой. Можно показать, что в случае, когда $\Phi_{opt}(s) = k_{opt}$, для устойчивости замкнутой системы необходимо $k_{opt} < 0,5$. При $k_{opt} > 0,5$ малейшее нарушение равенства (8.21) ведет к потере устойчивости, хотя при точном совпадении запаздываний коэффициент k_{opt} может быть сколь угодно большим.

Для повышения запаса устойчивости систем с регулятором (8.20) в их контур вводят дополнительные корректирующие звенья или ограничиваются неполной компенсацией инерционной части объекта. Естественно, что динамическая точность управления при этом ухудшается.

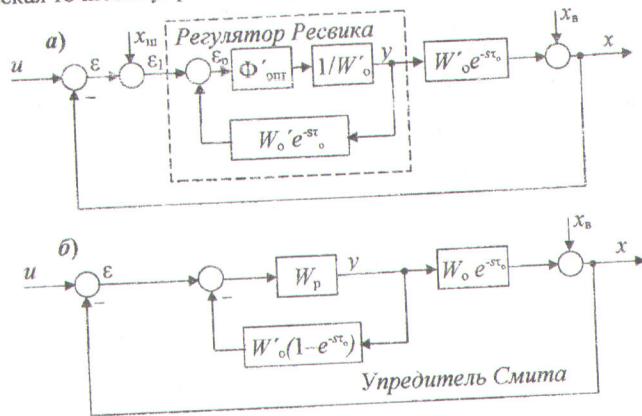


Рисунок 8.4 — Алгоритмические структуры идеальной системы управления объектом с запаздыванием

Идея нейтрализации запаздывания объекта реализуется также с помощью упредителя Смита, которым охватывают типовые регуляторы (рисунок 8.4, б). Нетрудно убедиться, что при большом передаточном ($k_p \rightarrow \infty$) регуляторе с упредителем Смита эквивалентен регулятору Ресвика (рисунок 8.4, а) с $\Phi_{\text{опт}}(s) = 1$.

Систему с упредителем Смита технически реализовать легче, так как не требуется моделировать обратную передаточную функцию объекта.

Хотя регулятор Ресвика (8.20) практически осуществить никогда не удается, анализ его свойств позволяет оценить предельные возможности управления объектами с запаздыванием. Так, для наилучшего воспроизведения задающего воздействия u и при отсутствии шума (т.е. при $\Phi_{\text{опт}}(s) = 1$) регулятор (8.20) принимает вид

$$W_{p,u}(s) = [(1 - e^{-st_0})W_o(s)]^{-1}, \quad (8.22)$$

а передаточные функции замкнутой системы по каналу $u \rightarrow x$

$$\Phi_{xu}(s) = e^{-st_0} \quad (8.23)$$

и по каналу $x_u \rightarrow x$

$$\Phi_{xb}(s) = 1 - e^{-st_0}. \quad (8.24)$$

Функциям (8.23) и (8.24) соответствуют идеальные переходные процессы прямоугольной формы, заканчивающиеся за минимально возможное время $t_n = \tau_0$. По каналу $y_b \rightarrow x$ переходный процесс имеет плавный характер и длительность $t_n \geq (2 \dots 3)\tau_0$.

Наиболее трудно управляемыми являются объекты, содержащие только чистое запаздывание,

$$W_o(s) = k_o e^{-st_0}, \quad (8.25)$$

и для них лучше всего применять именно регулятор Ресвика или упредитель Смита, обеспечивающие структурную компенсацию запаздывания. Регулятор (8.22) для объекта (8.25) принимает вид

$$W_{p,u}(s) = y(s)/\varepsilon(s) = 1/k_o(1 - e^{-st_0}). \quad (8.26)$$

При медленных внешних воздействиях, для которых допустима приближенная замена

$$e^{-st_0} \approx 1 - st_0 \quad (8.27)$$

идеальный регулятор (8.26) эквивалентен И-регулятору

$$W_{pi}(s) \approx k_w s, \quad (8.28)$$

где $k_w = 1/k_o \tau_0$. Отсюда можно сформулировать **общее правило настройки регуляторов для объектов с запаздыванием:** передаточный коэффициент регулятора должен быть обратно пропорционален передаточному коэффициенту объекта и времени запаздывания.

При высокочастотных воздействиях регулятор (8.26) действует как дискретный: после каждого очередного изменения управляющего воздействия u выжидает в течение интервала τ_0 и тем самым повышает устойчивость системы.

8.4 Осуществление инвариантности в стабилизирующих и следящих системах

Одной из главных целей синтеза автоматической системы является обеспечение требуемой точности в установившихся и переходных режимах. Точность систем в установившихся режимах можно улучшить, увеличивая порядок астатизма и коэффициент разомкнутого контура. Но при этом, как правило, уменьшается запас устойчивости, увеличивается колебательность и, как следствие, ухудшается точность системы в переходных режимах. Эффективным средством устранения противоречия между условиями точности в установившихся и переходных режимах служит компенсация внешних воздействий путем осуществления инвариантности.

Термин «**инвариантность**» означает независимость одной физической величины от другой. В теории автоматического управления рассматривают независимость выходных величин (управляемой величины или сигнала ошибки) от входных воздействий. В системах стабилизации стремятся получить независимость управляемой величины от возмущающего воздействия, а в следящих системах — независимость сигнала ошибки от задающего воздействия. В многомерных системах с несколькими контурами управления добиваются независимости каждой управляемой величины от «чужих» задающих воздействий. В этом случае говорят об обеспечении **автономности** отдельных контуров управления.

Инвариантность в автоматических системах достигается при помощи управления по возмущению: управляющее воздействие формируется в зависимости от изменений возмущающего воздействия (рисунок 1.2, б). Очевидно, что этот принцип управления применим, если возмущающее воздействие может быть измерено.

При помощи разомкнутых цепей воздействий, называемых **компенсирующими связями**, может быть полностью или частично устранено влияние внешних возмущений на управляемую величину в переходных и

установившихся режимах. Компенсирующие связи не образуют замкнутых контуров и поэтому не ухудшают устойчивость систем.

Математические условия компенсации внешних воздействий при помощи управления по возмущению изучает **теория инвариантности**, которая разработана советскими учеными: профессором Г. В. Щилановым, академиками Н. Н. Лузиным, В. С. Кулебакиным, Б. Н. Петровым и др.

Принцип управления по возмущению обычно применяют в сочетании с принципом управления по отклонению. Автоматическая система, в которой одновременно используются эти два принципа, называется комбинированной. Ниже рассматриваются условия достижения инвариантности именно в комбинированных системах управления.

Рассмотрим алгоритмическую схему комбинированной системы стабилизации с компенсирующей связью по возмущению z (рисунок 8.5, а). Компенсирующая связь действует на выходную величину со знаком, который всегда противоположен знаку непосредственного влияния возмущения на выход. Передаточная функция системы по возмущению

$$\Phi_x(s) = \frac{x(s)}{z(s)} = \frac{W_{ox}(s) - W_k(s)W_y(s)W_o(s)}{1 + W_y(s)W_o(s)}, \quad (8.29)$$

где $W_o(s)$ и $W_{ox}(s)$ — передаточные функции объекта соответственно по управляющему и возмущающему воздействию; $W_y(s)$ — передаточная функция управляющего устройства; $W_k(s)$ — передаточная функция компенсирующего устройства.

Управляемая величина $x(t)$ не зависит от возмущения $z(t)$, если передаточная функция (8.29) равна нулю:

$$\Phi_{xz}(s) = 0, \quad (8.30)$$

а это возможно, если равен нулю ее числитель. Отсюда **условие инвариантности стабилизируемой величины по отношению к возмущению**

$$W_{ox}(s) - W_k(s)W_y(s)W_o(s) = 0. \quad (8.31)$$

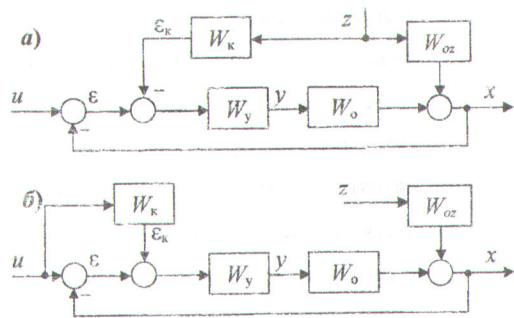


Рисунок 8.5 — Алгоритмические структуры комбинированных систем управления с компенсирующими связями: по возмущению (а); по задающему воздействию (б)

Условие (8.31) означает, что для достижения независимости величины $x(t)$ от возмущения $z(t)$ необходимо, чтобы динамические свойства двух параллельных каналов, по которым возмущение $z(t)$ действует на величину $x(t)$, были одинаковыми.

Именно благодаря идентичности каналов, сигнал, поступающий на выход через звенья $W_k(s)$, $W_y(s)$ и $W_o(s)$, компенсирует сигнал, идущий на выход через звено $W_{oz}(s)$.

Согласно условию инвариантности (8.31) передаточная функция компенсирующего устройства

$$W_k(s) = W_{oz}(s)/W_y(s)W_o(s). \quad (8.32)$$

Компенсирующее устройство представляет собой динамическое звено, свойства которого зависят от соотношения инерционностей канала возмущения (W_{oz}) и канала управления (W_yW_o). Если инерционность канала управления больше, чем инерционность канала возмущения, то компенсирующее устройство должно обладать свойствами дифференцирующего звена. Причем, чем больше разница этих инерционностей, тем выше должен быть порядок дифференцирующего звена.

Если оба канала объекта обладают запаздываниями τ_0 и τ_{0z} , и при этом $\tau_0 > \tau_{0z}$, то компенсирующее устройство не может быть реализовано физически. Действительно, в этом случае компенсирующее воздействие должно опережать возмущение на время $\tau = \tau_0 - \tau_{0z}$, что невозможно.

Для обеспечения инвариантности только в статике компенсирующее устройство может быть реализовано в виде безынерционного звена с передаточным коэффициентом

$$k_k = k_{oz}/k_0k_o. \quad (8.33)$$

В следящих системах необходимо добиваться независимости сигнала ошибки от задающего воздействия. Для схемы, приведенной на рисунке 8.5, б, передаточная функция между задающим воздействием $u(t)$ и сигналом ошибки $e(t)$

$$\Phi_{eu}(s) = \frac{1 - W_k(s)W_y(s)W_o(s)}{1 + W_y(s)W_o(s)}. \quad (8.34)$$

Приравнивая функцию (8.34) к нулю, находим **условие инвариантности ошибки слежения** по отношению к задающему воздействию

$$1 - W_k(s)W_y(s)W_o(s) = 0. \quad (8.35)$$

Отсюда требуемая передаточная функция компенсирующего устройства

$$W_k(s) = 1/W_y(s)W_o(s). \quad (8.36)$$

Компенсирующее устройство в следящих системах так же, как и в стабилизирующих, должно обладать дифференцирующими свойствами, если инерционность канала управления больше, чем инерционность канала возмущения.

По виду передаточных функций (8.29) и (8.34) можно установить, что введение компенсирующих связей не изменяет характеристический полином системы и, следовательно, не влияет на ее устойчивость. Очевидно также, что и в стабилизирующей, и в следящей системах инвариантность осуществляется благодаря наличию двух параллельных каналов передачи сигналов от точки приложения воздействия до выходной величины (x или e). Этот структурный признак достижения инвариантности был впервые сформулирован академиком Б. Н. Петровым в виде *принципа двухканальности*. Но

наличие двух каналов является лишь необходимым условием получения инвариантности. Достаточным условием служит условие физической реализуемости передаточной функции $W_k(s)$ в виде конкретного технического устройства: максимальная степень полинома числителя должна быть меньше или равна максимальной степени полинома знаменателя.

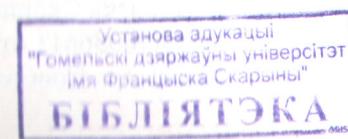
Если передаточная функция $W_k(s)$ удовлетворяет условию физической реализуемости, то в системе возможно достижение *абсолютной инвариантности*. Если же передаточная функция $W_k(s)$ не удовлетворяет этому условию и может быть реализована только приближенно, то в системе осуществляется лишь *частичная инвариантность*. В системе с частичной инвариантностью независимость достигается только при медленных изменениях входных воздействий.

Контрольные задания и вопросы

- 1 Какие функциональные элементы входят в неизменяемую и изменяемую части синтезируемой системы управления?
- 2 Исходя, из каких условий выбирают элементы неизменяемой и изменяемой частей функциональной структуры?
- 3 Что представляет собой идеальная алгоритмическая структура замкнутой системы управления?
- 4 По каким каналам передачи воздействий необходимо добиваться инвариантности в стабилизирующих и следящих системах?
- 5 Сформулируйте принцип двухканальности как условие, необходимое для достижения инвариантности.
- 6 Назовите основные методы идентификации объектов управления.

Литература

- 1 Бесекерский, Б. А. Теория систем автоматического регулирования/ Б. А. Бесекерский, Е. Н. Попов. — М. : Наука, 1975. — 767 с.
- 2 Основы теории автоматического управления: учебник для вузов / под ред. Н. Б. Судиловского. — М. : Машиностроение, 1985. — 368 с.
- 3 Кую, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Кую, пер. с англ. — М. : Машиностроение, 1986. — 447 с.
- 4 Лукас, В. А. Теория автоматического управления: учебник для вузов/ В. А. Лукас. — М. : Недра, 1990. — 415 с.
- 5 Попов, Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления / Е. П. Попов. — М. : Наука, 1989 — 301 с.
- 6 Острем, К. Системы управления с ЭВМ / К. Острем, Б. Вигтенмарк, пер. с англ. — М. : Мир, 1987. — 480 с.
- 7 Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления: учебное пособие для вузов / под ред. В. А. Бесекерского. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1978. — 587 с.
- 8 Теория автоматического управления: учеб. для вузов / под ред. А. А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшая школа, 1986. — ч. 1 — 303 с.; ч. 2 — 282 с.
- 9 Теория автоматического управления: учеб. для вузов / под ред. А. В. Нетушила. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшая школа, 1976. — 400 с.
- 10 Ефимчик, М. К. Технические средства электронных систем: Вводный курс: учебное пособие / М. К. Ефимчик. — 2-е изд., перераб. и доп. — Минск : Тесей, 2006. — 304 с.



Учебное издание

ДЕМИДЕНКО Олег Михайлович
ЕФИМЧИК Михаил Константинович

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия №02330/0133208 от 30.04.04

Подписано в печать 2.09.08. Формат 60x84 1/16.

Бумага писчая №1. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 13,25
Уч.-изд. л. 14,25. Тираж 100 экз. Заказ № 77.

3431-00

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия №02330/0056611 от 16.02.04
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104