«АТОМНАЯ ЭНЕРГИЯ», Т. 43, ВЫП. 2, АВГУСТ 1977

УДК 539.12.04

Нахождение удельных потерь энергии заряженных частиц в веществе методом прострела поглотителей произвольной толщины

ПОТЕТЮНКО Г. Н.

В работе [1] предложен новый способ обработки опытных данных при нахождении удельных потерь энергии заряженных частиц в веществе методом прострела поглотителей. Основное достоинство этого способа состоит в том, что его применение не связано ни с какими ограничениями на толщину поглотителя. В настоящей работе развит математический аппарат предложенного способа.

Рассмотрим энергетический интервал $[E_{мин}, E_{макс}]$. Используемые обозначения: d — толщина поглотителя; E_1 — энергия частицы перед поглотителем; E_2 — энергия частицы после поглотителя; $\Delta E = E_1 - E_2$. Предполагается, что значения E_1 и E_2 принадлежат интервалу $E_{мин}$, $E_{макс}$.

Предположим, что в указанном энергетическом интервале пробег частицы в веществе описывается полиномом n-й степени относительно энергии:

$$R(E) = a_0 + a_1 E + a_2 E^2 + \ldots + a_n E^n. \tag{1}$$

Тогда

$$dE/dx = 1/R'(E) = 1/\sum_{k=1}^{n} k a_k E^{k-1} \tag{2}$$

и

$$d/\Delta E = y = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \ldots + a_n F_n. \tag{3}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 1;\ F_2 = E_1 + E_2; \\ F_3 &= E_1^2 + E_1 E_2 + E_2^2 \ldots; \\ F_n &= E_1^{n-1} + E_1^{n-2} E_2 + \ldots + E_1 E_2^{n-2} + E_2^{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Суть предлагаемого способа состоит в следующем. Имея набор экспериментальных результатов

$$d_i,\ E_{1ij},\ E_{2ij}, \tag{5}$$

вычисляем величины, входящие в формулу (3),

$$F_{2p}, F_{3p}, \ldots, F_{n,p}, y_p,\ p = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

и дисперсии $s^2(y_p)$ величин y_p [2]. После этого, используя формулу (3), методом наименьших квадратов находим параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Зная их, по формулам (1) и (2) вычисляем $R - a_0$ и dE/dx. Параметр a_0 остается неопределенным, для его нахождения необходимо знать пробег при каком-либо одном значении энергии $E = E_0$ в интервале $[E_{мин}, E_{макс}]$. Если пробег $R(E_0)$ известен, то

$$a_0 = R(E_0) - a_1 E_0 - a_2 E_0^2 - \ldots - a_n E_0^n. \tag{7}$$

К сожалению, применение к уравнению (3) метода наименьших квадратов в его стандартной форме приводит к плохо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений. Эту трудность можно обойти приемом, аналогичным обычно используемому при нахождении методом наименьших квадратов коэффициентов аппроксимирующего полинома [2].

Вместо величин F_k в формуле (3) вводим в рассмотрение величины G_k, представляющие собой линейные комбинации величин F_k:

$$G_1 = F_1;\ G_2 = F_2 + f_{21} F_1;$$
$$G_3 = F_3 + f_{32} F_2 + f_{31} F_1, \ldots;$$
$$G_n = F_n + f_{n,\,n-1} F_{n-1} + \ldots + f_{n1} F_1.$$

Теперь

$$y = b_1 G_1 + b_2 G_2 + \ldots + b_n G_n. \tag{8}$$

Коэффициенты f_{ij} определяются из следующего условия: при $k \neq l$

$$\sum_p G_{kp} G_{lp} = 0. \tag{9}$$

Легко проверить, что этому условию удовлетворяют величины G_k, построенные по следующему правилу:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= F_1;\ G_2 = F_2 - \frac{\sum_p F_{2p} G_{1p}}{\sum_p G_{1p}^2} G_1; \\ G_3 &= F_3 - \frac{\sum_p F_{3p} G_{1p}}{\sum_p G_{1p}^2} G_1 - \frac{\sum_p F_{3p} G_{2p}}{\sum_p G_{2p}^2} G_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_n &= F_n - \frac{\sum_p F_{np} G_{1p}}{\sum_p G_{1p}^2} G_1 - \frac{\sum_p F_{np} G_{2p}}{\sum_p G_{2p}^2} G_2 - \\ &- \ldots - \frac{\sum_p F_{np} G_{n-1,\,p}}{\sum_p G_{n-1,\,p}} G_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если $F_1 = 1$, как это и имеет место в нашем случае, то $\sum_p G_{1p}^2 = N$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

Введя обозначение

$$\sum_p F_{kp}G_{lp}/\sum_p G_{lp}^2 = g_{kl}, \qquad (11)$$

для нескольких первых коэффициентов f_{ij} получаем

$$f_{21} = -g_{21}; \qquad (12)$$

$$f_{32} = -g_{32};\ f_{31} = -g_{31} + g_{32}g_{21}, \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{43} &= -g_{43};\ f_{42} = -g_{42} + g_{43}g_{32}; \\ f_{41} &= -g_{41} + g_{42}g_{21} + g_{43}g_{31} - g_{43}g_{32}g_{21}; \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{54} &= -g_{54};\ f_{53} = -g_{53} + g_{54}g_{43}; \\ f_{52} &= -g_{52} + g_{53}g_{32} + g_{54}g_{42} - g_{54}g_{43}g_{32}; \\ f_{51} &= -g_{51} + g_{52}g_{21} + g_{53}g_{31} - g_{54}g_{41} - g_{53}g_{32}g_{21} - \\ &\quad - g_{54}g_{42}g_{21} - g_{54}g_{43}g_{31} + g_{54}g_{43}g_{32}g_{21} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Из этих равенств легко виден способ построения выражения для любого коэффициента f_{ij}.

Теперь нормальная система уравнений принимает очень простой вид:

$$b_k \sum_{p=1}^{N} [G_{kp}^2/s^2(y_p)] = \sum_{p=1}^{N} [G_{kp}y_p/s^2(y_p)],\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (16)$$

Выпишем остальные соотношения, необходимые в приложениях. Связь между параметрами a_k в разложении (1) и параметрами b_k в разложении (8) такова:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + b_2f_{21} + b_3f_{31} + \ldots + b_nf_{n1}; \\ a_2 &= b_2 + b_3f_{32} + \ldots + b_nf_{n2}; \ldots; \\ a_{n-1} &= b_{n-1} + b_nf_{n,\,n-1}; \\ a_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (17)$$

Элементы дисперсионной матрицы

$$D_{kk} = [\sum_{p=1}^{N} G_{kp}^2/s^2(y_p)]^{-1}, \qquad (18)$$

дисперсии параметров b_k

$$s^2(b_k) = \chi^2 D_{kk}/(N-n), \qquad (19)$$

где

$$\chi^2 = \sum_{p=1}^{N} (y_p - b_1G_1 - \ldots - b_nG_n)^2/s^2(y_p). \qquad (20)$$

Выпишем формулы, определяющие «коридор погрешностей» величин $R - a_0$ и dE/dx. Согласно общей теории переноса ошибок (см., например, [2, с. 204]), если

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n), \qquad (21)$$

где x_s — независимые случайные величины, дисперсии которых равны $s^2(x_s)$, то для дисперсии величины y имеем

$$s^2(y) = \sum_{s=1}^{n} (\partial f/\partial x_s)^2 s^2(x_s). \qquad (22)$$

В нашем случае равенство (22) дает

$$s^2(R - a_0) = \sum_{k=1}^{n} E^{2k}s^2(a_k); \qquad (23)$$

$$s^2(dE/dx) = \sum_{k=1}^{n} D_k^2(E)\, s^2(a_k), \qquad (24)$$

где

$$D_k(E) = (\partial/\partial a_k)(\partial E/dx) = -kE^{k-1}/(\sum_{k=1}^{n} ka_kE^{k-1})^2. \qquad (25)$$

Для дисперсий параметров a_k согласно (17) и (22) имеем

$$s^2(a_k) = s^2(b_k) + \sum_{l=k+1}^{n} f_{lk}s^2(b_l), \qquad (26)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для иллюстрации возможностей описанного метода нахождения удельных потерь энергии рассмотрим численный эксперимент. Идея эксперимента такова: берем таблицы для пробегов и удельных потерь энергии протонов в кремнии, приведенные в работе [3], и, ограничившись энергетическим интервалом от 2 до 3 МэВ, при разных условиях «эксперимента» определяем набор «экспериментальных результатов» (5); имея этот набор, по развитой выше методике находим удельные потери энергии; полученные результаты сравниваем с исходными данными.

Применяя эту методику к данному случаю, в разложении (1) ограничиваемся второй степенью. Действительно, в указанном энергетическом интервале пробег протонов в кремнии хорошо аппроксимируется полиномом:

$$R(E) = -0{,}897380 + 3{,}117888E + 1{,}454826E^2 \text{ мг/см}^2 \qquad (27)$$

и

$$dE/dx = 10^3/(3{,}117888 + 2{,}909652E) \text{ кэВ/(мг·см}^{-2}). \qquad (28)$$

Значения удельных потерь энергии и пробегов, взятые из работы [3] и вычисленные по формулам (27) и (28), приведены в табл. 1.

Рассмотрим три варианта эксперимента (табл. 2). В первом варианте фиксируем начальную энергию (полагаем ее равной 3 МэВ) и меняем толщину поглотителя. Во втором фиксируем толщину поглотителя (полагаем ее равной 1 мг/см² или 4,13 мкм) и меняем начальную энергию. Третий вариант комбинированный. Число «измерений» во всех вариантах эксперимента одинаково — девять. Статистический разброс «экспериментальных результатов» не учитываем. Най-

Значения пробега и dE/dx для протонов в кремнии, взятые из работы [3] и вычисленные по формулам (27) и (28) Таблица 1

E, МэВ	$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{табл}$	$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{выч}$	$\frac{\Delta}{dE/dx}$, %	$R_{табл}$	$R_{выч}$
2,0	112,05	111,89	0,14	11,154	11,158
2,1	108,38	108,36	0,02	12,062	12,066
2,2	104,88	105,05	0,16	12,999	13,002
2,3	101,82	101,94	0,12	13,967	13,969
2,4	98,86	99,00	0,14	14,964	14,965
2,5	96,09	96,23	0,15	15,990	15,989
2,6	93,49	93,61	0,13	17,045	17,043
2,7	91,05	91,12	0,08	18,129	18,126
2,8	88,75	88,77	0,02	19,241	19,238
2,9	86,75	86,54	0,03	20,382	20,379
3.0	84,52	84,41	0,13	21,551	21,549

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Условия численных экспериментов *

Таблица 2

Варьируемые параметры	Номера измерений								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Первый вариант								
d	1,55	2,55	3,55	4,55	5,55	6,55	7,55	8,55	9,55
E_2	2,870	2,782	2,690	2,598	2,503	2,406	2,305	2,202	2,094
ΔE	0,130	0,218	0,310	0,402	0,497	0,594	0,695	0,798	0,906
	Второй вариант								
E_1	2,956	2,870	2,782	2,691	2,598	2,502	2,406	2,305	2,202
E_2	2,870	2,782	2,691	2,598	2,502	2,406	2,305	2,202	2,093
ΔE	0,086	0,088	0,091	0,093	0,096	0,096	0,101	0,103	0,109
	Третий вариант								
d	1,169	2,310	3,422	1,084	2,139	3,165	0,997	1,965	2,902
E_1	3,0	3,0	3,0	2,7	2,7	2,7	2,4	2,4	2,4
E_2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1

* d, мг/см²; E, МэВ.

Значения dE/dx для протонов в кремнии, взятые из работы [3] и найденные из экспериментальных данных (см. табл. 2) по методике настоящей работы

Таблица 3

E, МэВ	$\left(\frac{dE}{dx}\right)$ табл	Варианты I	II	III
2,0	112,05	115,8 * 3,3	113,02 0,87	111,60 0,40
2,1	108,38	111,4 2,8	109,29 0,84	108,13 0,23
2,2	104,88	107,3 2,2	105,81 0,79	104,86 0,11
2,3	101,82	103,5 1,7	102,54 0,71	101,79 0,03
2,4	98,86	100,0 1,1	99,46 0,61	98,89 0,03
2,5	96,09	96,7 0,6	96,56 0,49	96,15 0,06
2,6	93,49	93,6 0,1	93,83 0,36	93,55 0,06
2,7	91,05	90,7 0,4	91,25 0,22	91,10 0,05
2,8	88,75	87,9 0,9	88,81 0,07	88,77 0,02
2,9	86,57	85,4 1,4	86,49 0,09	86,55 0,02
3,0	84,52	83,0 1,8	84,29 0,27	84,45 0,08

* Числа первой строки — значения dE/dx; второй строки — значения $\frac{\Delta}{dE/dx}$, %.

денные по описанной методике значения dE/dx вместе с отклонениями от исходных данных приведены в табл. 3, откуда видно, что отклонения носят систематический характер и их максимальная величина во всех вариантах эксперимента разная: она максимальна в первом варианте и минимальна в третьем. Поскольку статистический разброс не учитывали, то полученные отклонения целиком определяются самой методикой нахождения dE/dx. Таким образом, развитый выше метод нахождения dE/dx дает правильные результаты, и погрешность его определяется условиями эксперимента. Поэтому необходимо разработать способы выбора оптимальных условий.

На практике часто применяется разновидность рассматриваемой схемы эксперимента по определению dE/dx, когда слой исследуемого вещества нанесен на подложку и измеряется энергия отраженных частиц. Здесь приемлем только вариант, когда тяжелый элемент нанесен на легкую подложку. В этом случае полная потеря энергии складывается из потери энергии при прохождении вещества и при отражении. Если E_1 — энергия пучка; E_2 — энергия зарегистрированных частиц; $\Delta' E$ и $\Delta'' E$ — потеря энергии при прохождении в веществе до и после отражения соответственно; p — кинематический фактор, то $pE_1 - E_2 = p\Delta' E + \Delta'' E$. Для нахождения $\Delta' E$ и $\Delta'' E$ необходимо рассмотреть отражение от ядер двух типов. Можно, например, рассмотреть отражение от ядер исследуемого вещества и от предварительно внедренных в подложку ядер какого-либо другого элемента, атомный номер которого находится между атомными номерами исследуемого вещества и подложки.

Поступило в Редакцию 13/VII 1976 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Потетюнко Г. Н.** «Атомная энергия», 1976, т. 41, вып. 2, с. 134.
2. **Худсон Д.** Статистика для физиков. М., «Мир», 1967.
3. **Bichsel H., Tschalaer C.** «Nuclear Date», 1967, v. 3A, N 3, p. 343.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины