Ю. В. Малинковский
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК

В систему массового обслуживания с единственным экспоненциальным прибором с интенсивностью обслуживания μ поступает $T+1$ независимых пуассоновских потоков заявок: поток обычных, требующих обслуживания положительных заявок с интенсивностью λ^+, и T потоков отрицательных заявок с интенсивностями $\lambda_1^-,\ldots,\lambda_T^-$. Поступающая отрицательная заявка l-го потока мгновенно вычеркивает, уничтожает ровно l положительных заявок, если такое количество положительных заявок в системе имеется, и уничтожает все заявки в системе, если их число меньше $l, l=\overline{1,T}$. После этого она мгновенно пропадает вместе с вычеркнутыми положительными заявками, не оказывая в дальнейшем на функционирование системы никакого влияния. Состоянием системы в момент t назовем количество положительных заявок $n(t)$ в этот момент времени. Очевидно, $n(t)$ – цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний Z_+. Ее стационарное распределение $\{p(n), n=0,1,\ldots\}$, если оно существует, удовлетворяет системе уравнений равновесия для так называемых вертикальных сечений графа переходов цепи

$$\lambda^+ p(n)=(\mu+\lambda_1^-+\ldots+\lambda_T^-)\,p(n+1)+(\lambda_2^-+\ldots+\lambda_T^-)\,p(n+2)+(\lambda_3^-+\ldots+\lambda_T^-)\,p(n+3)+\ldots+ \\ +\lambda_T^- p(n+T),\quad n=0,1,\ldots\quad . \tag{1}$$

Это однородное линейное разностное уравнение порядка T. Частное решение (1) ищем в виде $p(n)=z^n$. Подставляя его в (1), получим характеристическое уравнение

$$g(z)=\sum_{l=1}^{T} z^l \sum_{s=l}^{T}\lambda_s^- +\mu z-\lambda^+ =\sum_{s=1}^{T}\lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} z^l+\mu z-\lambda^+ =0 \tag{2}$$

Докажем достаточность условия

$$\rho=\frac{\lambda^+}{\mu+\sum_{t=1}^{T} t\lambda_t^-}<1 \tag{3}$$

для эргодичности процесса $n(t)$. Сначала используем теорему Декарта [1, с. 255]. В (2) ровно одна перемена знака при переходе от μ к λ^+. Значит, (2) имеет ровно один положительный корень. При этом $g(0)=-\lambda^+<0$ и, в силу (3), $g(1)=\sum_{t=1}^{T} t\lambda_t^- +\mu-\lambda^+>0$. Поэтому этот корень

$z_0 \in (0,1)$. Поэтому уравнение равновесия (1) имеет решение $p(n) = z_0^n$, причем из условия нормировки $C = 1 - z_0$, т. е. совпадает с геометрическим распределением:

$$p(n) = (1 - z_0) z_0^n, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{4}$$

Применим эргодическую теорему Фостера [2, с. 48]. Для того, чтобы неприводимая консервативная регулярная цепь Маркова с непрерывным временем была эргодична, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений равновесия имела ненулевое решение такое, что $\sum_{n=0}^{\infty} | p(n) | < \infty$. При выполнении условия (3) уравнение (2), как мы видели, имеет корень $z_0 \in (0,1)$, причем (4) – частное решение системы уравнений равновесия (1). А ряд $\sum_{n=0}^{\infty} | p(n) |$ сходится как сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. Неприводимость и консервативность цепи $n(t)$ очевидны, а регулярность следует из того, что интенсивность выхода $q(n)$ процесса $n(t)$ из состояния n ограничена [3, с. 405]. Значит, условие (3) достаточно для эргодичности $n(t)$, а при его выполнении эргодическое распределение имеет форму (4).

Покажем теперь, что (3) необходимо для эргодичности процесса $n(t)$. Требуется показать, что если $\rho \ge 1$, то цепь $n(t)$ не является эргодической. Сначала покажем, что при выполнении последнего неравенства все корни характеристического уравнения (2) не попадают в круг $| z | < 1$.

Лемма 1. 1. *Если* $\rho > 1$, *то все корни характеристического уравнения* (2) *по модулю строго больше единицы*.

2. *Если* $\rho = 1$, *то на окружности* $| z | = 1$ *характеристическое уравнение* (2) *имеет единственный корень* $| z | = 1$, *причем простой, а остальные корни* (2) *по модулю строго больше единицы.*

К р а т к о е д о к а з а т е л ь с т в о. Введем функции комплексной переменной

$$\phi(z) = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} z^l + \mu z, \quad f(z) = \lambda^+;$$

тогда характеристическое уравнение (2) запишется как $g(z) = \phi(z) + f(z) = 0$.

1. В случае $\rho > 1$ введенные функции $\phi(z)$ и $f(z)$ аналитичны в замкнутом круге $| z | \le 1$, причем на его границе $| z | = 1$ выполняется неравенство $| \phi(z) | < | f(z) |$. По теореме Руше $\phi(z) + f(z)$ и $f(z)$ имеют одинаковое число нулей в открытом круге $| z | < 1$, значит, $g(z) = \phi(z) + f(z)$ не имеет нулей в круге $| z | < 1$. Легко проверяется, что все корни (3) по модулю строго больше единицы.

2. Остается рассмотреть случай $\rho = 1$, для которого можно воспользоваться модификацией теоремы Руше, предложенной В.И. Клименок [4, p. 434, corollary 2] и весьма полезной для исследования условий эргодичности процессов теории массового обслуживания. В рассматриваемом случае $z = 1$ – корень характеристического уравнения (2). Очевидно, этот корень простой. Можно показать, что других корней, равных по модулю единице, нет. Так как $g(-1) \le -\mu - \lambda^+ < 0$, то $z = -1$ не является корнем (2). Пусть $z = e^{i\varphi}$ – корень (2). Тогда

$$\operatorname{Re} g(z) = \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} \cos l\varphi + \mu \cos \varphi - \lambda^+ = 0 \tag{5}$$

Так как на полном обороте $0 \le \varphi < 2\pi$ для $\varphi \ne 0, \varphi \ne \pi$

$$\left| \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} \cos l\varphi + \mu \cos \varphi \right| \le \sum_{s=1}^{T} \lambda_s^- \sum_{l=1}^{s} \cos l\varphi + \mu \cos \varphi < \sum_{s=1}^{T} s \lambda_s^- + \mu = \lambda^+,$$

то (5) нарушается. Итак, $z = 1$ является единственным, притом простым корнем характеристического уравнения (2) на окружности $| z | = 1$.

Легко проверяется, что выполнены все условия модифицированной В. И. Клименок теоремы Руше. Поэтому характеристическое уравнение (2) имеет единственный притом простой корень $z=1$ на границе $|z|=1$, остальные корни (2) по модулю строго больше единицы. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $Q_j(n)$ *– некоторые многочлены от переменной* n, $0 \le \varphi_j < 2\pi$, *причем* $\varphi_j \ne \varphi_m$ *при* $j \ne m$, $j,m=1,\dots,k$, *и* $\sum_{j=1}^{k} Q_j(n)e^{in\varphi_j} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $Q_j(n) \equiv 0$ $(j=1,\dots,k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $A = \max(\deg Q_1(n),\dots,\deg Q_k(n))$, тогда $n^A \sum_{j=1}^{k} \frac{Q_j(n)}{n^A} e^{in\varphi_j} \to 0$ при $n \to \infty$. Для $j=1,\dots,k$ найдется постоянная C_j такая, что $\frac{Q_j(n)}{n^A} \to C_j$. Тогда $n^A(\sum_j C_j e^{in\varphi_j} + o(1)) \to 0$, а так как $A \ge o$, то тем более $\sum_j C_j e^{in\varphi_j} + o(1) \to 0$, откуда $\varepsilon_n = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{in\varphi_j} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N_\varepsilon$ такой, что для всех $n \ge N$ будет $|\varepsilon_n| < \varepsilon$. По введенному выше обозначению для ε_n имеем

$$\varepsilon_N = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{iN\varphi_j},$$

$$\varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{i(N+1)\varphi_j},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_{N+k-1} = \sum_{j=1}^{k} C_j e^{i(N+k-1)\varphi_j}.$$

Модуль определителя Δ этой системы линейных относительно $C_1, C_2, \dots, C_k$ уравнений совпадает с модулем определителя Вандермонда, т.е. $|\Delta| = \prod_{j>k} |e^{i\varphi_j} - e^{i\varphi_k}| \ne 0$. Раскладывая определитель Δ_m, отличающийся от Δ заменой его m-го столбца столбцом свободных членов системы, по этому столбцу, получим $|\Delta_m| < C\varepsilon$, где C – некоторая константа, не зависящая от ε. По правилу Крамера

$$|C_m| = \frac{|\Delta_m|}{|\Delta|} < \frac{C}{|\Delta|}\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует, что $C_m = 0, m=1,\dots,k$. Следовательно, $Q_j(n) \to 0$, а так как $Q_j(n)$ – многочлен, то $Q_j(n) \equiv 0, \quad j=1,\dots,k.$

Теорема. *Цепь Маркова* $n(t)$ *регулярна. Для ее эргодичности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $\rho > 1$. По лемме 1 все корни характеристического уравнения по модулю строго больше единицы. Покажем, что в этом случае не существует стационарного распределения, следовательно, цепь Маркова $n(t)$ не является эргодической. Общее решение разностного уравнения (1) имеет вид

$$p(n) = \sum_{j=1}^{l} Q_j(n) z_j^n, \tag{6}$$

где $z_1,\dots,z_l$ – все различные корни характеристического уравнения (2), $Q_1(n),\dots,Q_l(n)$ – многочлены от n степеней, на единицу меньших кратностей корней $z_1,\dots,z_l$ соответственно. Не ограничивая общности, можно считать $1 < |z_1| \le |z_2| \le \dots \le |z_l|$. Разобьем все корни на группы корней с равными модулями: $|z_1| = \dots = |z_{l_1}| = r_1 < |z_{l_1+1}| = \dots = |z_{l_2}| = r_2 < \dots < |z_{l_p+1}| = \dots |z_l| = r_{p+1}$. С учетом показательной формы корней характеристического уравнения $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$ (6) можно представить в форме

$$p(n)=r_{p+1}^n\left[(\frac{r_1}{r_{p+1}})^n\sum_{j=1}^{l_1}Q_j(n)e^{in\varphi_j}+(\frac{r_2}{r_{p+1}})^n\sum_{j=l_1+1}^{l_2}+\ldots+(\frac{r_p}{r_{p+1}})^n\sum_{j=l_{p-1}+1}^{lp}Q_j(n)e^{in\varphi_j}+\sum_{j=l_p+1}^{l}Q_j(n)e^{in\varphi_j}\right]$$

Если предположить, что стационарное распределение существует, то $p(n)$ должно стремиться к нулю. Так как $r_{p+1}>1$, то выражение в квадратных скобках тем более будет стремиться к нулю. Но все члены этого выражения, кроме, быть может, последнего, стремятся к 0. Следовательно, последний член в квадратных скобках также стремится к нулю. По лемме 2 отсюда следует, что $Q_j(n)\equiv 0$ при $l_{p+1}+1\le j\le l$. По индукции отсюда следует, что все $Q_j(n)\equiv 0$. Значит, цепь Маркова $n(t)$ не является эргодической.

2. Случай $\rho=1$ доказывается аналогичным образом.

Список использованных источников

1 Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1971. – 432 с.

2 Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : РУДН, 1995. – 529 с.

3 Гихман, И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М. : Наука, 1977. – 568 с.

4 Klimenok, V. On the Modification of Rouche's Theorem for the Queueing Theory Problems / V. Klimenok // Queueing Systems. – 2001. – Vol. 38. – P. 431–434.