А. Р. Миротин
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины

ОБ ОБРАЩЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

В заметке решается задача обращения некоторой рациональной функции с комплексными полюсами от замкнутого оператора в банаховом пространстве. Ранее эта задача была решена в случае вещественных полюсов.

Рассмотрим рациональную функцию

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j - z},$$

где $a_j > 0$, $a\lambda_j$ – произвольные попарно различные комплексные числа. Если A – замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с множеством $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, то мы положим

$$f(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j R(\lambda_j, A),$$

где $R(\lambda_j,A) = (\lambda_j - A)^{-1}$ – значения резольвенты оператора A. Это определение согласуется с голоморфным функциональным исчислением замкнутых операторов в пространстве X [1], поскольку f принадлежит пространству $F(A)$ функций, голоморфных в некоторой (своей для каждой функции) окрестности множества $\sigma(A)$ и в бесконечности. Целью данной заметки является получение условий левой обратимости оператора $f(A)$ и вычисление соответствующего левого обратного.

В работе [2] с помощью функционального исчисления, построенного в [3; 4], были даны достаточные условия существования левого обратного к $f(A)$ и получена формула для его вычисления в случае, когда λ_j – действительные числа. Там же была поставлена задача обобщения этого результата на случай комплексных значений λ_j, решаемая ниже.

Для формулировки основного результата заметим, что рациональная функция $g = 1/f$ имеет в бесконечности полюс первого порядка. Следовательно, выделяя целую часть и разлагая дробную часть на простейшие дроби, мы можем ее представить в виде

$$g(z) = \alpha + \beta z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(t_j - z)^k}, \qquad (1)$$

где t_j – все нули функции f, m_j – кратность нуля t_j.

Замечание 1. В отличие от случая, когда λ_j – действительные числа, рассмотренного в [2], нули функции f могут быть кратными. Например, так будет в случае

$$f(z) = \frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z},$$

если λ удовлетворяет условию $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Теорема. *Пусть A – замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с выпуклой оболочкой conv $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ множества $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Тогда левый обратный к оператору $f(A)$ существует и имеет вид*

$$f(A)^{-1} - \alpha + \beta A + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} R(t_j, A)^k,$$

где t_j ($j = 1, \ldots, m$) – все нули функции f, m_j – кратность нуля t_j и

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j}.$$

Доказательство. С учетом формулы (1) имеем

$$\beta = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x f(x)} = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j};$$

$$\alpha = \lim_{x\to\infty}(g(x) - \beta x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j}\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j\left(1 + \frac{x}{\lambda_j - x}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\lambda_j - x}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j}\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j\lambda_j}{\lambda_j - x}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\lambda_j - x}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j}\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j\lambda_j}{\frac{\lambda_j}{x} - 1}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\frac{\lambda_j}{x} - 1}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2}.$$

Теперь покажем, что все корни уравнения $f(z) = 0$ принадлежат *conv* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Если допустить противное, то найдется прямая на комплексной плоскости, разделяющая *conv* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ и некоторый корень z_0 этого уравнения. Следовательно, найдется прямая, разделяющая *conv* $\{\lambda_1 - z_0, \lambda_2 - z_0, \ldots, \lambda_n - z_0\}$ и 0. Совершая поворот $w \mapsto e^{i\varphi}z$ на подходящий угол, получаем, что прямая $Re w = a, a > 0$ разделяет *conv* $\{e^{i\varphi}(\lambda_1 - z_0), e^{i\varphi}(\lambda_2 - z_0), \ldots, e^{i\varphi}(\lambda_n - z_0)\}$ и 0. Ясно, что $\sum_{j=0}^{n} a_j/w_j = 0$ где $w_j = e^{i\varphi}(\lambda_j - z_0)$. Дробно-линейное преобразование $\zeta = 1/w$ переводит прямую $Re w = a$ в окружность, проходящую через 0 и содержащую внутри все точки $\zeta_j = 1/w_j$. Следовательно, $\sum_{j=0}^{n} a_j/w_j = \sum_{j=0}^{n} a_j\zeta_j \neq 0$, и мы получили противоречие.

Из доказанного выше следует, что функция $g(z) = 1/f(z) = \alpha + \beta z + h(z)$, где

$$h(z) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{jk}}{(t_j - z)^k}$$

(см. формулу (1)) голоморфна в окрестности спектра оператора A, а потому функция h принадлежит пространству $F(A)$. Положим по определению

$$g(A) = \alpha + \beta A + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} R(t_j, A)^k .$$

Заметим, что оба слагаемых в правой части очевидного равенства

$$1 = g(z)f(z) = (\alpha + \beta z)f(z) + h(z)f(z)$$

принадлежат $F(A)$. Следовательно, применяя функцию $(\alpha + \beta z)f(z) + h(z)f(z)$ к оператору A и воспользовавшись свойствами голоморфного функционального исчисления [1], будем иметь

$$(\alpha + \beta A)f(A) + h(A)f(A) = I,$$

где I – единичный оператор в пространстве X. Таким образом, $f(A)^{-1} = g(A)$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Легко проверяемая формула

$$a_1 R(\lambda_1, A) + a_2 R(\lambda_2, A) = (a_1 + a_2) R(\lambda_1, A)\left(\frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}{a_1 + a_2} - A\right) R(\lambda_2, A)$$

показывает, что (при условии $a_1 + a_2 \neq 0$) линейная комбинация двух значений резольвенты обратима слева тогда и только тогда, когда число $\frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}{a_1 + a_2}$ не принадлежит $\sigma(A)$. Отсюда следует, что всевозможные линейные комбинации с положительными коэффициентами двух значений резольвенты оператора A обратимы слева тогда и только тогда, когда спектр оператора не пересекается с выпуклой оболочкой $conv\ \{\lambda_1, \lambda_2\}$ множества $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ (то есть с отрезком с концами в точках λ_1, λ_2). Таким образом, условие $conv\ \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \cap \sigma(A) = \varnothing$ в предыдущей теореме существенно. Но уже в случае $n = 3$ это условие, продолжая оставаться достаточным для левой обратимости оператора $f(A)$, перестает быть необходимым (например, если мы положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, $A = 2I$, то $conv\ \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \cap \sigma(A) = \varnothing$, но $f(A) = \frac{1}{2}I$).

Список использованных источников

1 Данфорд, Н. Линейные операторы : в 2 т. / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – Т. 1. Общая теория. – 895 с.

2 Миротин, А. Р. Обращение линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора / А. Р. Миротин, А. А. Атвиновский // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3. – С. 77–79.

3 Атвиновский, А. А. Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве / А. А. Атвиновский, А. Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 10. – С. 3–15.

4 Атвиновский, А. А. Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II / А. А. Атвиновский, А. Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 3–16.