В. С. Монахов
г. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины

О НОРМАЛЬНО ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Adolfo Ballester-Bolinches и ShouHong Qiao [1] отвечая на вопрос из [2] описали класс X, состоящий из всех конечных групп *G*, в которых существует нормальная подгруппа с холловой подгруппой порядка $|B|$ для каждой $B \le G$. Запись $H \le G$ означает, что *H* – подгруппа группы *G*.

Теорема. [1] *Конечная группа G принадлежит* X *тогда и только тогда, когда G разрешима и ее нильпотентный корадикал является циклической группой свободного от квадратов порядка.*

Мы дадим короткое доказательство этой теоремы.

Лемма. *Пусть G — конечная группа,* $|G| = p^a m$*, p не делит m. Если* $G \in \mathrm{X}$*, то существует нормальная подгруппа порядка pm.*

Доказательство. Так как $G \in \mathrm{X}$, то существует нормальная подгруппа *U* с силовской подгруппой порядка *p*. Выберем *U* максимального порядка. Пусть $q \in \pi(G)\setminus\{p\}$ и *Q* – силовская *q*-подгруппа из *G*. Тогда *UQ* – подгруппа с силовской подгруппой порядка *p*. Так как $G \in \mathrm{X}$, то существует нормальная подгруппа *V* с холловой подгруппой порядка $|UQ|$. Силовская *p*-подгруппа в *V* имеет порядок *p*. Кроме того, $|U| \le |UQ| \le |V|$. По выбору подгруппы *U* получаем, что $|U| = |V|$. Поэтому $Q \subseteq U$. Так как *q* – любое, $q \ne p$, то *m* делит $|U|$ и $|U| = pm$.

Доказательство теоремы. Пусть $G \in \mathrm{X}$, $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. По лемме группа *G* содержит нормальную подгруппу N_i порядка $p_i m_i$, где $m_i = |G| / p_i^{a_i}$. Фактор-группа G/N_i является p_i-группой, поэтому $G^{\mathrm{N}} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} N_i = N$. Здесь G^{N} – нильпотентный корадикал. Подгруппа *N* имеет порядок свободный от квадратов. Поэтому группа *G* сверхразрешима. Теперь *N* нильпотентна, значит, *N* циклическая.

Обратное утверждение очевидно.

Список использованных источников

1 Ballester-Bolinches, A. On a problem posed by S. Li and J. Liu / A. Ballester-Bolinches, Qiao ShouHong // Arch. Math. – 2014. – Vol. 102. – P. 109–111.

2 Li Shirong. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / Li Shirong, Liu Jianjun // J. Algebra. – 2013. – Vol. 388. – P. 1–9.