А. Б. Прусак
Ораним, Тивон, Израиль, Академический образовательный колледж
Шаанан, Хайфа, Израиль, Академический религиозный педагогический колледж

ЗАДАЧА – ОДНА, СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ – МНОЖЕСТВО (ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ)

В педагогической литературе подчеркивается, что в процессе обучения математике очень важно, чтобы учащиеся воспринимали математику как *целостную науку*, в которой все темы (разделы) взаимосвязаны, и для глубокого понимания и решения задачи учащийся должен соединить разные области математики [1]. Поиск учащимися различных способов решения одной задачи – один из путей осуществления этой цели, развивающий математическое творчество учащихся (посредством генерации идей, гибкости, новизны) [5], а также поднимающий их математическое мышление на более высокий уровень [4]. Однако обычно в учебниках математики задачи классифицированы по темам в соответствии с учебными программами, поэтому многие ученики «точно знают», к какой теме принадлежит задача, и думают, что для каждой задачи можно найти одно единственное решение.

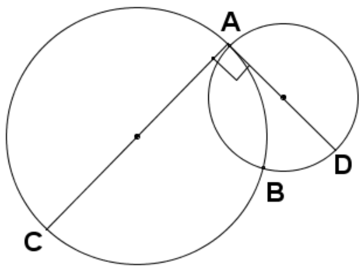
В Израиле, в соответствии с новой реформой школьного образования, это направление провозглашено в качестве центрального в школьном курсе математики. Сегодня на экзаменах на аттестат зрелости в израильских школах нет ограничений на использование математических тем при решении задач (например, задачу по теме «Стереометрия» ученик может решить с помощью векторов и т. п.). Причем, требование Министерства просвещения относится не только к старшим классам (10–12 классы), но и к средней школе (7–9 классы) (Якель и Кобб рекомендуют использовать этот подход, начиная с начальной школы [2]).

Ориентация на интегративные связи между разделами школьного курса математики призвана внести *изменения в подготовку студентов*, получающих педагогическое образование. На математических курсах, которые преподаю, отдельная завершающая тема – «Решение одной задачи разными способами». На экзаменах на математических курсах в качестве обязательного задания студент должен решить одну из предложенных задач двумя способами.

Решение математических задач разными способами развивают у ученика много важных способностей, в том числе умение предвидеть результат и искать правильный путь в запутанных условиях задачи. Учитель должен стремиться к тому, чтобы ученик, прочтя задачу и еще не производя никаких действий, научился видеть какой способ не пригоден, а какой может быть использован.

Разные способы решения одной задачи, использующие материал темы, на языке которой сформулирована задача. Идея этого подхода в том, что одна и та же задача переходит из темы в тему и «сопровождает» учащихся при изучении разных тем школьного курса математики. В каждой теме она решается с помощью математического материала (понятий, теорем, формул), относящегося к этой темы. Ниже пример такой задачи (взята из школьного учебника по геометрии для 10 класса).

Задача. Две окружности пересекаются в точках A и B так, что их диаметры AC и AD перпендикулярны (см. чертеж) . Доказать: $AB^2=CB \cdot BD$.

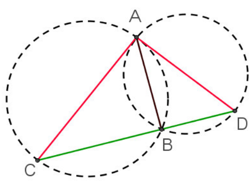


Перед учениками ставилась цель найти максимально возможное количество способов ее решения. Этот организованный поиск новых способов решения позволил повторить, применить и закрепить тему, способствовал взаимному обучению учеников, обмену и накоплению новых идей. У каждого способа есть автор, имя которого обязательно записывается на классной доске. На уроке происходит взаимное обучение учеников, обмен идеями и накопление новых идей, почерпнутых из найденных способов. Ниже в таблице 1 приведены краткие пояснения к некоторым из них с указанием темы урока, на котором этот способ может быть рассмотрен.

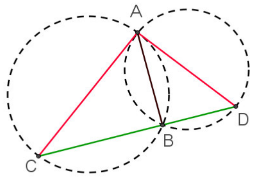
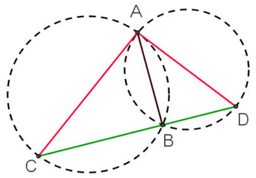
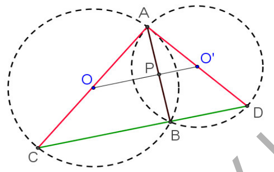
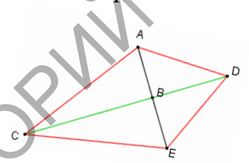
В процессе изучения геометрии учащиеся нашли более десяти различных способов решения этой задачи. (Несомненно, что кроме представленных в таблице решений, имеются и другие, не менее интересные). Студентам на курсе Евклидовой геометрии в теме «Разные способы решения одной задачи» предлагалось найти как можно больше способов решения, проанализировать и сравнить методику и специфику их преподавания. Опыт показывает, что когда ученики или студенты решают одну и ту же задачу различными способами, они глубже понимают специфику того или иного способа, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи. На уроке разные способы решения сравниваются, иногда проводим соревнование: какой способ самый красивый, новый, оригинальный, элегантный, короткий и т. п.

Решение задачи. Сначала доказывается, что три точки C, B, D лежат на одной прямой (используется теорема о вписанном угле, опирающимся на диаметр), и отсюда следует, что CD гипотенуза прямоугольного ΔCAD.

Таблица 1 – Способы решения с помощью разных тем геометрии

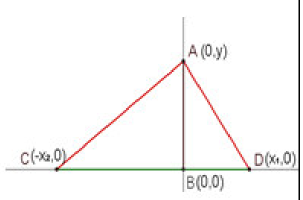
Номер способа	Тема урока	Чертеж и дополнительное построение	Идея способа и указания к решению
1	2	3	4
1	Подобные треугольники	Общая хорда AB, отрезки CB и BD 	1. Доказать подобие прямоугольных треугольников ΔABD и ΔCBA. 2. Записать пропорцию для соответствующих сторон, и по свойству пропорции (произведение крайних членов равно произведению средних членов пропорции) получить требуемое.

Окончание таблицы 1

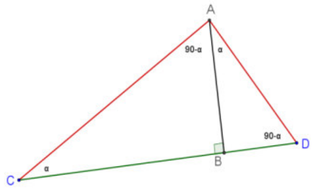
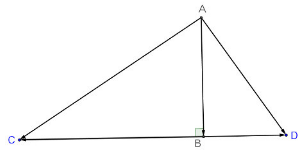
1	2	3	4
2	Теорема о касательной и секущей к одной окружности, выходящих из одной точки вне ее	Общая хорда AB, отрезки CB и BD 	1. Теорема о касательной и секущей к большой окружности $AD^2 = CD \cdot BD$ 2. Теорема Пифагора в ΔABD $AB^2 + BD^2 = AD^2$ 3. Подставить 1 в 2 , перенести BD^2 в правую часть равенства и вынести общий множитель BD . Заменить $CD - BD$ на CB.
3	Теорема Пифагора	Общая хорда AB, отрезки CB и BD. 	1. Записать теорему Пифагора для ΔABD и ΔCBA и сложить почленно эти равенства. 2. В полученном равенстве заменить по теореме Пифагорадля ΔACD. $AD^2 + AC^2 = CD^2$ 3. Осталось использовать алгебру: заменить $DC = CB + BD$ и раскрыть формулу квадрата суммы для $(CB + BD)^2$. а затем упростить .
4	Теорема о средней линии треугольника Теорема о высоте, проведенной к гипотенузе в прямоугольном треугольнике	Отрезок, соединяющий центры данных окружностей. Общая хорда AB, отрезки CB и BD. 	1. По теореме о высоте к гипотенузе в прямоугольном треугольнике ΔOAO' $AP^2 = OP \cdot O'P$ 2. По теореме о средней линии треугольника $OP = \frac{1}{2}CB$; $O'P = \frac{1}{2}BD$ 3. Доказать, что $AP = \frac{1}{2}AB$ 4. Подставить 2 и 3 в 1.
5	Теорема о пропорциональных отрезках, образующихся при пересечении двух хорд в круге	Построить ΔCED, симметричный ΔCAD относительно отрезка CD . 	1. По теореме о пропорциональных отрезках, образующихся при пересечении двух хорд в круге, получаем $CB \cdot BD = AB \cdot BE$ 2. Поскольку $BE = AB$, остается подставить это равенство в 1 и получить требуемое.

Разные способы решения одной задачи, использующие материал из других разделов математики. Учащиеся возвращались к рассмотренной выше задаче при изучении разных тем математики, и в каждой теме способ ее решения они связывали с материалом этой конкретной темы. Ниже в таблице 2 приводятся способы решения той же задачи, в которых используются такие математические инструменты как аналитическая геометрия, тригонометрия и векторы.

Таблица 2 – Способы решения с помощью разных разделов математики

Способ	Чертеж	Указания к решению
1	2	3
аналитическая геометрия		1. Поместим ΔACD в систему координат так, что точка B совпадет с началом координат, а ось Y пройдет через высоту AB. Обозначим координаты вершин: A (0, y), C (-x_2, 0), D (x_1, 0), B (0, 0). 2. ΔCAD прямоугольный, поэтому произведение угловых коэффициентов отрезков AC и AD равно -1, т. е. $m_{AD} \cdot m_{AC} = -1$ $m_{AD} = \frac{y}{-x_1}$; $m_{AC} = \frac{y}{x_2}$ 3. Перемножив почленно эти равенства, получим $y^2 = x_1 \cdot x_2$ Поскольку $y=\|AB\|$, $x_1=\|BD\|$, $x_2=\|BC\|$, получили требуемое.

Окончание таблицы 2

1	2	3
тригонометрия		1. Докажем, что ∠ACB= ∠BAD 2. В прямоугольном ΔABC выразим $AB = CB \cdot \tan\alpha$ 3. В прямоугольном ΔABD выразим $AB = BD \cdot \cot\alpha$ 4. Умножим почленно оба равенства, учтем, что $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, и получим требуемое.
векторы		1. Поскольку $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярны, выполняется $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ (1). В прямоугольных треугольниках ΔABC и ΔABDвыполняется $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ 2. Подставив эти равенства в формулу (1), раскрыв скобки, и учтя, что: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ получим $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 3. Применяя определение скалярного произведения, и учтя, что угол между равен 180º, получим требуемое.

В процессе поиска нового способа решения учащиеся определяют тему-помощник (в таблице 2 тема «Векторы») и тему-источник (в таблице 2 – «Геометрия»).

Вместо задач, «сопровождающих» учеников в разных темах, можно использовать и теоремы (например, теорему Пифагора учащиеся могут доказывать в разных классах разными способами – в соответствии с темой урока).

Роль подхода: задача – одна, способов решения – множество. Подход развивает:

– творческое математическое мышление. Учащиеся находят способы, отличные от тех, которые изучали раньше, представляют и объясняют их решения в классе, убеждают других учеников в правильности решения;

– гибкость математического мышления. Развивая это качество у учеников, *учителя самидолжны быть гибкими* [3];

– математические *знания и педагогическое мастерство самого учителя*: учителя сами учатся и развивают математическое творчество [4];

– методический прием, при котором решаемая многократно разными способами задача превращается и в инструмент учителя и в математический объект;

– видение *математики как единой целостной картины* – «пазеля», в котором каждая составляющая – это какой-то раздел в математике. Понимание, что каждая изучаемая тема не существует «сама для себя», а тесно переплетается с другими темами, они «используют» друг друга и помогают одна другой;

– чувства красоты в математике путем анализа способа решения и сравнения различных способов между собой по критериям;

– важные качества человека: сообразительность, настойчивость, аккуратность, умение аргументировать и убеждать в его правильности, критичность по отношению к способу, придуманному самим учеником, другими учениками или учителем, а также воображение – качество, важное для планирования работы и поиска рациональных и оптимальных решений в жизни;

– видение и понимание *значения и применения каждой изучаемой темы* как инструмента, помогающего решать задачи из других тем, и как результат – изменение представления о математике.

Это отражено в отзыве ученицы: «*Я начала думать по-другому… Чему научилась? Открытости мышления и способности рассматривать, анализировать и исследовать математический объект с разных сторон. Научилась позволять мыслям течь. Я поняла, что математика – это не сборник задач, которые только ждут, чтобы я их решила. А это целый мир, мир живой и многогранный, интересный, увлекательный и открытый, где не все известно заранее. В этом мире есть место для индивидуальной мысли каждого, место для личного самовыражения и для творчества*».

В заключение отметим: даже *в одной задаче* содержится богатый методический потенциал для развития математического мышления и творчества учащихся, и поэтому решение одной задачи разными способами должно стать неотделимой составляющей школьной программы по математике.

Список использованных источников

1 Borasi, R. Learning mathematics through inquiry / R. Borasi. – Portsmouth, NH : Heinemann,1994.

2 Jackel, E. Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics / E. Jackel, P. Cobb // Journal for Research in Mathematics Education. – 1996. – Vol. 27. – P. 458–477.

3 Leikin, R. Teacher flexibility in mathematical discussion / R. Leikin, S. Dinur // The Journal of Mathematical Behavior. – 2007. – Vol. 26. – P. 328–347.

4 Leikin, R. About four types of mathematical connections and solving problems in different ways / R. Leikin // Aleh – The (Israeli) Senior School Mathematics Journal. – 2006. – Vol. 36. – P. 8–14.

5 Silver, E. A. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing / E. A. Silver // ZDM. – 1997. – Vol. 29. – P. 75–80.