

О НУЛЯХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ с произвольными различными действительными показателями $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ называют набор многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$, степени не выше $n-1$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^k A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0 \quad (1)$$

Такие аппроксимации введены в рассмотрение Эрмитом в связи с задачами описания алгебраической природы математических констант, в частности, для доказательства трансцендентности числа e .

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенству (1), принадлежит Паде [1]. В многомерном случае, когда $k \geq 2$, начало интенсивного и систематического изучения аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [2], [3], [4].

При $k=1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде экспоненты. В этом случае многочлены Паде $A_n^0(z) = -p_{n-1}^1(z)$, $A_n^1(z) = q_{n-1}(z)$ находятся из условий

$$q_{n-1}(z)e^z - p_{n-1}^1(z) = O(z^{2n-1})$$

с точностью до однородной константы. Однородная константа задается условиями нормировки, которые однозначно определяют эти многочлены.

Поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспоненциальной функцией, исследовал Г. Сеге [5]. Э. Сафф и Р. Варга [6] изучили расположение нулей аппроксимаций Паде экспоненты и нашли границы кольца, в котором находятся нули ее многочленов Паде. В частности, в диагональном случае ими доказано следующее утверждение, известное как «теорема о кольце».

Нас интересует поведение нулей многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные действительные числа. Тогда при $n \geq 2$, $k \geq 1$ нули многочленов $A_n^p(z)$, $0 \leq p \leq k$, лежат в круге $\{z: |z| < R_n^p\}$, где

$$R_n^p = 2(n-1/3) \left[\sum_{j=1}^p 1/|\lambda_p - \lambda_{p-j}| + \sum_{j=1}^{k-p} 1/|\lambda_{p+j} - \lambda_p| \right] \quad (2)$$

В случаях, когда $p=0$ или $p=k$, соответственно первая и вторая суммы в скобках равны нулю.

При $\lambda_p = p$, $p=0, 1, \dots, k$ и $k=1$ аппроксимации Эрмита – Паде I типа совпадают с классическими многочленами Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$. Из теоремы следует, что все нули многочленов Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}(z)$ лежат в круге $\{z: |z| < 2(n-1/3)\}$, что согласуется с «теоремой о кольце» Э. Саффа и Р. Варги.

Если $\lambda_p = p$, $p=0, 1, \dots, k$, и $k \geq 2$, то в качестве следствия теоремы вытекает теорема 2.2 из работы [7]: все нули многочленов $A_n^p(z)$, лежат в круге $\{z: |z| < R_p\}$, где

$$R_p = 2(n-1/3) \left[\sum_{j=1}^p 1/j + \sum_{j=1}^{k-p} 1/j \right]$$

Теорема утверждает, что нули многочленов $A_n^p(z)$ лежат в круге с центром в нуле, радиус которого R_p зависит как и от степени многочлена, так и от взаимного расположения показателей

системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме верхней оценки для модуля нулей $A_n^p(z)$ в случае, когда n – фиксировано, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ является сколь угодно малой величиной.

Представление многочленов $A_n^p(z)$ с помощью интегралов позволяет при $n=2, 3, 4$ найти точные значения всех нулей $A_n^p(z)$. Рассмотрим более подробно случай, когда $n=3$.

Две бесконечно большие при $\varepsilon \rightarrow a$ неотрицательные функции $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ имеют одинаковый порядок $(\varphi(\varepsilon) \sim \psi(\varepsilon))$, если $\lim_{\varepsilon \rightarrow a} \varphi(\varepsilon)/\psi(\varepsilon) = A$, где $0 < A < +\infty$.

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Пусть $r_j^p(\varepsilon)$ – нули многочлена $A_n^p(z)$, $r_n^p(\varepsilon) := \max\{r_j^p(\varepsilon) : j=1, 2, \dots, n-1\}$, а $R_n^p(\varepsilon)$ – радиус соответствующего круга, который определяется равенством (2). С помощью элементарных вычислений при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем, что

$$r_3^p(\varepsilon) \sim R_3^p(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}, \text{ для } p=1, 2, 3,$$

$$\sqrt{90} \leftarrow r_3^0(\varepsilon) < R_3^0(\varepsilon) = (16/3)(1 + 2/(1 - \varepsilon^2)).$$

При $\varepsilon \rightarrow 1$

$$r_3^p(\varepsilon) \sim R_3^p(\varepsilon) \sim \frac{1}{1 - \varepsilon}, \text{ для } p=0, 1,$$

$$\sqrt{13} \leftarrow r_3^2(\varepsilon) < R_3^2(\varepsilon) = (16/3)(1 + 2/\varepsilon),$$

$$\sqrt{582/4} \leftarrow r_3^3(\varepsilon) < R_3^3(\varepsilon) = (16/3)(1/(1 + \varepsilon) + 2/(2\varepsilon)).$$

Данный пример показывают, что для рассматриваемой в нём систем экспонент при $n=1$ полученные в теореме неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 1$).

Список использованных источников

- 1 Pade, H. Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential / H. Pade // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16, № 3. – P. 394–426.
- 2 Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.
- 3 Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – Vol. 19. – P. 95–166.
- 4 Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 168. – P. 200–227.
- 5 Szegő, G. Über eienige Eigenschaften der Exponentialreihe / G. Szegő // Sitzungsberichte Berliner Math. Ges. – 1924. – № 23. – P. 50–64.
- 6 Saff, E. On the zeros and poles of Pade approximations to e^z , II, in «Pade and Rational Approximations: Theory and Applications» / E. Saff, R. Varga. – New York : Academic Press, 1977.
- 7 Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.