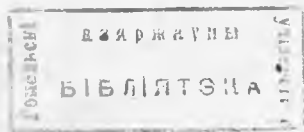
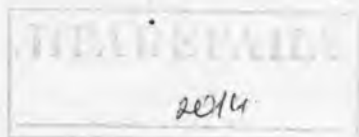


ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методические указания
для студентов первого курса
физического факультета



Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом
физического факультета Гомельского государственного уни-
верситета

В.И.Харламова

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных в курсе "Аналитическая геометрия и линейная алгебра" является раздел, посвященный теории решения систем линейных алгебраических уравнений, включая теорию матриц и определителей. Важность этого материала обусловлена широким использованием его во всех курсах математики и физики. С другой стороны, глубина и прочность усвоения этого начального раздела является залогом успешной работы в дальнейшем. Глубокое усвоение любого математического курса обеспечивается целой системой последовательных действий, таких, как восприятие, осмысление, запоминание изучаемого материала, а также выработка навыков в применении теории к решению задач. Формы обучения в вузе чередуются так, чтобы студент мог последовательно реализовать все названные процессы. На лекции происходит первоначальное восприятие и частичное осмысление и запоминание материала. На практических занятиях вырабатываются навыки решения задач. Однако эффективность обучения прежде всего зависит от активности познавательной деятельности самого студента, от его стремления к преодолению встречающихся трудностей.

Настоящие указания предназначены для самостоятельной работы по более глубокому и полному изучению данной темы, для многократного повторения и заучивания учебного материала. Здесь собраны все основные определения и теоремы из теории матриц, определения определителей и систем линейных уравнений. Для разъяснения наиболее трудных понятий использованы различные примеры. Приведены все основные виды задач по данной теме и методы их решения. Третья глава предназначена для самоконтроля: она содержит упражнения и задачи для самостоятельного решения. Доказательства всех теорем содержатся в книге I.

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицы

Матрицей A размеров m на n называется прямоугольная таблица, составленная из mn элементов, имеющая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элемент a_{ij} , стоящий на пересечении i -ой строки и j -того столбца, называется (i,j) -элементом матрицы A .
Используются следующие сокращенные обозначения: $A = A_{m \times n} = [a_{ij}]$,
через A_i и A^j обозначаются соответственно i -тая строка и j -тый столбец матрицы A :

$$A_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}], \quad A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

2. Матрица, в которой число строк и число столбцов равно n , называется квадратной порядка n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ составляют главную диагональ квадратной матрицы A .

3. Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, не состоящие на главной диагонали, равны 0.

4. Диагональная матрица, в которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, называется единичной и обозначается через E .

5. Матрица называется нулевой, если все ее элементы равны 0, обозначается через 0.

Примеры нулевой, диагональной и единичной матриц соответственно:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Матрица A^T называется транспонированной к матрице $A_{m \times n}$ — если (i,j) -элемент матрицы A^T равен (j,i) -элементу матрицы A для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу A^T , нужно записать строки матрицы A столбцами матрицы A^T в соответствующем порядке. Если $m \times n$ - размеры матрицы A , то $n \times m$ - размер матрицы A^T .

7. Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размеры и равные элементы, стоящие на одинаковых местах. Равенство матриц A и B обозначается $A = B$.

8. Произведением матрицы $m \times n = [a_{ij}]$ на число α называется матрица $B_{m \times n} = [b_{ij}]$ такая, что $b_{ij} = \alpha a_{ij}$. Обозначается $B = \alpha A$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Таким образом, чтобы умножить матрицу A на число α , нужно каждый элемент матрицы A умножить на α .

9. Суммой матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ размеров $m \times n$, в которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначается $C = A + B$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

10. Матрица $(-1)A$ обозначается через $-A$ и называется противоположной матрице A .

11. Разностью матриц A и B одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица $C_{m \times n} = A + (-B) = A - B$.

Итак, чтобы сложить две матрицы одинаковых размеров, нужно сложить их элементы, стоящие на одинаковых местах; чтобы найти разность $A - B$ матриц A и B одинаковых размеров, нужно

на i -й строке (i, j) -элемента матрицы A вынести (i, j) -элемент матрицы B .

12. Произведением матрицы $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ на матрицу $B_{n \times p} = [b_{ij}]$ называется такая матрица $C_{m \times p} = [c_{ij}]$ что $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.
Обозначается $C = AB$.

Проверим, что операция умножения матрицы A на матрицу B является выполнимой, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . При этом элемент c_{ij} матрицы $C = AB$ равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Пример 1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Найти } C = AB.$$

Решение.

Так как $A_{2 \times 4}$, $B_{4 \times 3}$

$$\text{то } C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 11 & c_{21} &= (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) = 8 \\ c_{12} &= 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 22 & c_{12} &= (-1) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 = -9 \\ c_{13} &= 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 15 & c_{23} &= (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 = -14 \end{aligned}$$

$$\text{Так, } C = AB = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 15 \\ 8 & -9 & -14 \end{bmatrix}.$$

13. Запись A^k обозначает $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}$.

14. Основные свойства матричных операций:

- 1) $A + B = B + A$ - сложение матриц коммутативно;
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ - сложение матриц ассоциативно;
- 3) произведение матриц не всегда коммутативно;
- 4) $(AB)C = A(BC)$ - умножение матриц ассоциативно;
- 5) $AE = EA$, где A - квадратная, E - единичная матрицы;
- 6) $(A + B)C = AC + BC$ и $\Phi(A + B) = \Phi A + \Phi B$ - сложение и умножение матриц подчиняются дистрибутивным законам.

Определители

15. Пусть дана квадратная матрица порядка n :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определителем матрицы A называется число $|A|$, равное:

- 1) $|A| = a_{11}$ при $n = 1$;
- 2) $|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i} M_{1i}$, где M_{1i} — это определитель матрицы порядка $n-1$, полученной вычеркиванием 1-й строки и i -того столбца матрицы A , при $n \geq 2$.

Используется следующее обозначение для определителя матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Итак, если $A = [a_{11}]$, то $|A| = a_{11}$. Найдём определитель матрицы A порядка 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

где $M_{11} = a_{22}$, $M_{12} = a_{21}$.

Найдём

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

По определению $|A| = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13}$,

где

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

16. Минором элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель M_{ij} матрицы $(n-1)$ -го порядка, получающейся вычеркиванием i -той строки и j -того столбца матрицы A , то есть той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} .

17. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A

порядка n называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
Алгебраическое дополнение A_{ij} отличается от минора M_{ij} только знаком.

18. Свойства определителя.

1) Каков бы ни был номер строки i ($i = 1, \dots, n$), для определителя матрицы A порядка n справедлива формула:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in},$$

называемая разложением определителя по i -той строке.

2) Каков бы ни был номер столбца j ($j = 1, \dots, n$), для определителя матрицы A порядка n справедлива формула:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj},$$

называемая разложением определителя по j -тому столбцу.

3) $|A| = |A^T|$, т.е. при транспонировании матрицы определитель не меняется. Отсюда следует, что все свойства определителя, относящиеся к строкам матрицы, является справедливыми и по отношению к столбцам.

4) При перестановке местами двух строк (или двух столбцов) матрицы определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

5) Определитель, содержащий две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен 0.

6) Общий множитель всех элементов строки (или столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

7) Если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны 0, то определитель равен 0.

8. Определитель не изменится, если к какой-нибудь его строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число.

9) Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен 0.

10) Если все элементы i -той строки определителя представлены в виде суммы $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = 1, \dots, n$, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i -той, такие же, как и в данном определителе, а i -тая строка в первом равна $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$, во втором — $(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$.

То есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

11) Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, то есть $|AB| = |A| \cdot |B|$.

12) Сумма произведений элементов любой строки определителя (любого столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (столбца) равна этому определителю.

13) Сумма произведений элементов любой строки определителя (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна 0.

Пример 2.

В дальнейшем запись $A_i + \alpha A_j$ означает, что к i -той строке прибавляется j -тая строка, умноженная на число α .

Запись $A^i + \alpha A^j$ означает прибавление к i -тому столбцу j -того, умноженного на α .

а) Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Выполним $A^1 + (-1)A^2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 8 & -9 & -12 \\ -2 & 6 & -6 & -9 \\ 1 & -4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Затем оставим без изменения A_3 и выполним последовательно $A_1 + 2A_3$, $A_2 + 2A_3$, $A_4 + (-1)A_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 7 \\ 1 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первому столбцу:

$$\Delta = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Далее выполним $A_2 + 2A_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1.$$

Итак, $\Delta = 1$.

б) Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix} \begin{matrix} A^1 - A^3 \\ A^2 - A^4 \\ = 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{vmatrix} 51 & 49 & 162 & 137 \\ 49 & 51 & 295 & 106 \\ 0 & 0 & 419 & 418 \\ 0 & 0 & 417 & 416 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_1 - A_2 \\ A_3 - A_4 \\ = \\ = \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2 & -133 & 31 \\ 49 & 51 & 295 & 106 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 417 & 416 \end{vmatrix} \begin{matrix} A^2 - A^4 \\ = 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -164 & 31 \\ 49 & 51 & 29 & 106 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 416 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -164 \\ 49 & 51 & 89 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 49 & 51 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 49 & 100 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 200 = -400.$$

в) Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} A_3 + A_1 \\ = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} A_1 - 2A_3 \\ = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 4-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} A^1 - A^2 \\ = -\lambda \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} A_1 + A_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda (3-\lambda)(6-\lambda).$$

Обратная матрица

19. Пусть A — квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если $\lambda A^{-1} = A^{-1} A = E$.

20. Квадратная матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.

21. Выражение матрицы A^{-1} через элементы матрицы A :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A , $i, j = 1, \dots, n$.

Пример 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Найти A^{-1} .

Решение. Найдем $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 33; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -24; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -9; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 33 & -24 & -9 \\ -24 & 3 & 6 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$A A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -8 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -3 \\ -8 & 1 & 2 \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Ранг матрицы

22. Минором порядка τ матрицы $A_{m \times n}$ называется определитель порядка τ , составленный из элементов, стоящих на пересечении любых τ строк и τ столбцов матрицы A .

Отметим, что каждый элемент матрицы является минором 1-го порядка.

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

некоторые из миноров 2-го порядка матрицы A .

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

— все миноры 3-го порядка.

23. В матрице $A_{m \times n}$ минор порядка τ называется базисным, если он отличен от 0, а все миноры порядка $\tau+1$ равны 0 или миноров $\tau+1$ порядка вообще нет.

24. Ранг матрицы $A_{m \times n}$ называется такое число τ , для которого выполняются следующие два условия: в матрице A есть хотя бы один минор порядка τ , отличный от 0, а все миноры порядка $\tau+1$ равны 0. Обозначения: $Rg A$ — ранг матрицы A . Ранг нулевой матрицы считают равным 0.

Пример 4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Найти $Rg A$

Решение. Минор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$
 миноры 3-го порядка.

отличен от 0. Найдем все

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_3 - 2A_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} A^1 - A^2 \\ A^3 - A^2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} A_2 - A_1 \\ A_3 - A_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} A^3 - A^1 \\ A^2 - A^1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все миноры порядка 3 равны 0, но есть минор порядка 2, отличный от 0. Значит, $\text{Rg } A = 2$. Минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ является базисным.

25. Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля м. оров, или порядку базисного минора.

26. Если M и N — два минора матрицы A , и все элементы минора M являются элементами минора N , то минор N называется окаймляющим минор M .

Например, в матрице A из примера 4: миноры

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

являются окаймляющими для минора $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

27. Алгоритм нахождения ранга нулевой матрицы методом окаймляющих миноров:

1) выбираем какой-нибудь элемент матрицы, отличный от нуля. Вычисляем миноры второго порядка данной матрицы, окаймляющие этот элемент до тех пор, пока не найдем минор M_2 , отличный от 0. Если все окаймляющие миноры порядка 2 равны 0, то $\text{Rg } A = 1$.

2) вычисляем миноры порядка 3 данной матрицы, окаймляющие минор $M_2 \neq 0$ до тех пор, пока не найдем минор M_3 , отличный от 0. Если все окаймляющие миноры порядка 3 равны 0, то $\text{Rg } A = 2$. В противном случае процесс вычисления окаймляющих миноров продолжается дальше.

Пример 5. Найдем ранг матрицы A из примера 4 методом

окаймляющих миноров:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Решение.

1) Возьмем любой минор первого порядка, отличный от 0. Так $M_1 = a_{11} = 1$.

2) Находим минор второго порядка, окаймляющий минор M_1 , отличный от нуля. Так $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$.

3) Вычисляем миноры третьего порядка, окаймляющие минор M_2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все окаймляющие миноры третьего порядка равны 0. Поэтому $\text{Rg } A = 2$.

Пример 6. Найти ранг матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -6 & 12 & 9 & -3 \\ -10 & 5 & -30 & -20 \\ -14 & 28 & 21 & -7 \end{bmatrix}.$$

Решение.

1) Возьмем любой минор первого порядка, отличный от нуля: $M_1 = a_{11} = 4$.

2) Найдём минор второго порядка, окаймляющий минор M_1 и отличный от нуля.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 36.$$

3) Вычислим миноры третьего порядка, окаймляющие минор M_2 .

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -6 & 12 & -3 \\ -10 & 5 & -20 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -6 & 9 & -3 \\ -10 & -30 & -20 \end{vmatrix} = 4 \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -8 \\ -6 & 12 & -3 \\ -14 & 28 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 12 & 8 \\ -6 & 9 & -3 \\ -14 & 21 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

Итак, все скалярные миноры третьего порядка равны 0. Поэтому $\text{Rg } B = 2$.

3. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

- 1) умножение строки или столбца на число, отличное от 0;
- 2) прибавление к одной строке другой строки;
- 3) прибавление к одному столбцу другого столбца;
- 4) перестановка строк или столбцов.

29. Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.

30. Две матрицы называются эквивалентными, если одна из них может быть получена из другой с помощью элементарных преобразований.
Обозначение:

31. Алгоритм вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований:

1) Элементарными преобразованиями данной матрицы получим эквивалентную ей матрицу, в которой $a_{11} \neq 0$. Если этого сделать нельзя, то ранг данной матрицы равен 0;

2) элементарными преобразованиями обратим в нуль все остальные элементы первого столбца;

3) элементарными преобразованиями получим матрицу, в которой $a_{22} \neq 0$. Если этого сделать нельзя, то ранг данной матрицы равен 1;

4) элементарными преобразованиями обратим в нуль все элементы второго столбца, стоящие ниже элемента a_{22} ;

5) продолжаем процесс до тех пор, пока возможно. Ранг матрицы равен числу ненулевых строк в окончательной матрице.

Пример 7. Найти ранг матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -6 & 12 & 9 & 3 \\ -10 & 5 & -30 & -20 \\ -14 & 28 & 21 & -7 \end{bmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований.

Решение.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -6 & 12 & 9 & -3 \\ -10 & 5 & -30 & -20 \\ -14 & 28 & 21 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2} B_1; \frac{1}{3} B_2; \\ \frac{1}{5} B_3; \frac{1}{7} B_4; \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -6 & -4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_2 + B_1; \\ B_3 + B_1; \\ B_4 + B_1; \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_4 + (-1)B_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Rg B = 2.$$

32. Строки $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$, $B = (b_1 b_2 \dots b_n)$, ..., $C = (c_1 c_2 \dots c_n)$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ не все равные нулю, для которых выполняется равенство

$$\alpha A + \beta B + \dots + \gamma C = (0 \ 0 \ \dots \ 0) = 0.$$

33. Строки, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми.

34. Столбцы

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \dots, C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

называются линейно зависимыми, если существуют числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, не все равные нулю, для которых выполняется равенство

$$\alpha A + \beta B + \dots + \gamma C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

35. Столбцы, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми.

36. Строка $D = (d_1 d_2 \dots d_n)$ называется линейной комбинацией строк $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$, $B = (b_1 b_2 \dots b_n)$, ..., $C = (c_1 c_2 \dots c_n)$, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, для которых выполняется равенство $D = \alpha A + \beta B + \dots + \gamma C$.

37. Столбец $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ называется линейной комбинацией столбцов

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \dots, C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

если существуют такие числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, для кото-
рых выполняется равенство $D = \alpha A + \beta B + \dots + \gamma C$.

38. Строки и столбцы матрицы, на пересечении которых стоит базисный минор, называются базисными.

39. (Теорема о базисном миноре). Базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы. Любая строка (любой столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (базисных столбцов).

40. Определитель матрицы n -го порядка равен 0 тогда и только тогда, когда его строки, а также столбцы линейно зависимы.

41. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов и равно рангу этой матрицы.

СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные определения

1. Системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x_1, \dots, x_n$, или просто линейной системой, называется совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа a_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) называются коэффициентами системы, числа b_i ($i=1, \dots, m$) — свободными членами.

Число m уравнений может быть меньше, равно или больше числа n неизвестных.

2. Матрица

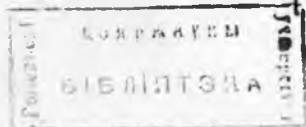
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

составленная из коэффициентов систем, называется основной матрицей системы.

3. Матрица

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

составленная из коэффициентов и свободных членов системы, называется расширенной матрицей системы.



4. В матричном виде система линейных уравнений может быть записана так

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

5. Система линейных уравнений может быть записана в следующем виде

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

6. Линейная система называется квадратной, если число уравнений m равно числу неизвестных n .

7. Линейная система называется неоднородной, если среди свободных членов имеются отличные от нуля.

8. Линейная система называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

9. Решением линейной системы I называется упорядоченное множество чисел $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ таких, что при замене $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \dots, x_n = d_n$ каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство.

10. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной.

11. Система, не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

12. Система, имеющая только одно решение, называется определенной.

13. Система, имеющая более одного решения, называется неопределенной.

14. Две системы называются эквивалентными, или равносильными, если любое решение одной из них является также решением второй, и наоборот, любое решение второй является решением первой. Любые несовместные системы считаются эквивалентными.

15. Элементарными преобразованиями систем называются следующие действия:

1) перестановка местами любых уравнений системы;

- 2) умножение уравнения системы на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число.

16. При элементарных преобразованиях системы получается система, эквивалентная данной.

Отметим, что число уравнений преобразованной системы может оказаться меньше числа уравнений исходной системы, так как уравнения вида $0=0$ вычеркиваются из системы.

Исследование совместности линейной системы

17. (Теорема Кронекера-Капелли). Линейная система уравнений является совместной тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы.

18. Если ранги основной и расширенной матриц линейной системы совпадают и равны числу ℓ , то $m-\ell$ уравнений, коэффициенты которых не входят в базисный минор, можно вычеркнуть из системы, где m — число уравнений исходной системы. После вычеркивания получится система из ℓ уравнений, эквивалентная данной.

19. Если ранги основной и расширенной матриц линейной системы совпадают с числом неизвестных, то эта система имеет единственное решение.

20. Если ранги основной и расширенной матриц линейной системы совпадают и являются числом, меньшим числа неизвестных, то линейная система имеет более одного решения.

2. Алгоритм исследования совместности линейной системы:

- 1) составить матрицу A линейной системы и ее расширенную матрицу A^* ;
- 2) найти ранги матриц A и A^* ;
- 3) сравнить $Rg A$ и $Rg A^*$. Если $Rg A \neq Rg A^*$, то система несовместна. Если $Rg A = Rg A^*$, то система совместна. В случае, когда $Rg A = Rg A^*$ и равен числу неизвестных, система имеет единственное решение. В случае, когда $Rg A = Rg A^*$ и меньше числа неизвестных, система имеет бесконечное множество решений.

Пример 1. Исследовать систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы
в ней основную матрицу A :

и выделим

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 7 & 10 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы A .

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10.$$

Минор M_{12} отличен от нуля. Находим
окаймляющие его миноры третьего порядка.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

, так как содержит два одинаковых
столбца.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

Минор M_{23} отличен от нуля. Находим окаймляющий его минор
четвертого порядка.

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{A^1 - A^3; \\ A^2 - A^4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ - & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, $\text{Rg } A = 3$.

Найдем $\text{Rg } A^*$, учитывая, что уже найденные минор $M_{23} \neq 0$
и $M_{14} = 0$ принадлежат матрице A^* . Осталось найти еще
один минор порядка 4.

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 7 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 14 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 14 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -60.$$

Минор $M_{24} \neq 0$ порядка 4, миноров более высоких порядков нет. Значит, $Rg A^* = 4$. Итак, $Rg A \neq Rg A^*$, система несовместна (не имеет решения).

Пример 2. Исследовать систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_4 = -2, \\ 10x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 11x_4 = 11, \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу A^* и выделим в ней основную матрицу A .

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ 10 & -7 & 3 & -11 & 11 \\ 6 & -5 & 2 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Найдем ранг матрицы A .

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 24 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 10 & -7 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -6 & 13 & -4 \\ -12 & 26 & -11 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & -5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Все скалярные миноры третьего порядка равны 0, следовательно, $Rg A = 2$.

Найдем ранг матрицы A^* .

$$M_{53} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 10 & -7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 8 & -14 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{63} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Все окаймляющие миноры третьего порядка равны 0, по тому $Rg A^* = 2$. Так, $Rg A = Rg A^* = 2$, то есть данная система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Решение линейных систем с помощью определителей

22. (Теорема Крамера). Пусть дана линейная система из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом единственное. Оно находится по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n,$$

где Δ — определитель основной матрицы системы, а Δ_i — определитель матрицы, полученной из основной матрицы заменой i -того столбца столбцом свободных членов.

23. Система уравнений называется квадратной, если число неизвестных равно числу уравнений.

Пример 3. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1, \\ 9x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Система квадратна. Найдем определитель основной матрицы системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 12 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -30.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Найдем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -30;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 9 & 12 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 19 & 37 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 19 & 37 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 19 & 37 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -60.$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30}{-30} = 1$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{-30} = -1$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-60}{-30} = 2$.

Ответ: (1; -1; 2) - решение системы.

24. Алгоритм решения произвольных линейных систем с помощью определителей.

1) записать основную матрицу A системы и ее расширенную матрицу A^* ;

2) найти ранги матриц A и A^* . Если они не равны, то система несовместна;

3) если $Rg A = Rg A^*$, то выделяем базисный минор матрицы A ;

4) все уравнения, коэффициенты которых не входят в базисный минор, вычеркиваем из системы. Получается система эквивалентная данной;

5) все неизвестные, коэффициенты при которых не входят в базисный минор, объявляем свободными (то есть они могут принимать любые значения) и переносим в правую часть. В левой части остаются лишь неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор;

6) решение полученной системы находим по формулам из теоремы Крамера.

Пример 4. Решим с помощью определителей систему из примера 2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_4 = -2, \\ 10x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 11x_4 = 11, \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Ранее мы нашли, что $Rg A = Rg A^* = 2$. Минор

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$ является базисным, обозначим его через Δ .

Теперь третье и четвертое уравнения можно вычеркнуть из системы, так как их коэффициенты не входят в базисный минор. Неизвестные x_3 и x_4 объявляем свободными и положим $x_3 = a$, $x_4 = b$, где a и b — любые числа.

Перенеся свободные неизвестные в левую часть, получим систему, эквивалентную данной.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 - a + b, \\ 2x_1 + x_2 = -2 + 4b. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_2 находим по теореме Крамера. Здесь $\Delta = 8$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 - a + b & -3 \\ -2 + 4b & 1 \end{vmatrix} = 5 - a + b - 6 + 12b = -1 - a + 13b;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 - a + b \\ 2 & -2 + 4b \end{vmatrix} = -4 + 8b - 10 + 2a - 2b = -14 + 2a + 6b;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1 - a + 13b}{8}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14 + 2a + 6b}{8} = \frac{-7 + a + 3b}{4}.$$

Теперь записываем общее решение.

Ответ: $\left(\frac{-1 - a + 13b}{8}; \frac{-7 + a + 3b}{4}; a; b \right)$, где a и b — любые числа.

25. Всякое решение линейной системы, полученное при замене в общем решении свободных неизвестных конкретными числами, называется частным.

Например, положив $a = 0$ и $b = 0$ в предыдущей задаче, получим частное решение $\left(-\frac{1}{8}; -\frac{7}{4}; 0; 0 \right)$.

При $a = 1$ и $b = 2$ получается другое частное решение $(3; 0; 1; 2)$. В случае, когда $\text{Rg } A = \text{Rg } A^*$ и меньше числа неизвестных, из общего решения получается бесконечное множество частных решений.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу, выделив в ней основную матрицу системы, и найдем их ранги.

$$A^* = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -7 & 5 \\ 3 & -1 & 6 & -11 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7; \quad M_{15} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -1 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 11 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 11 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, $\text{Rg } A = 3$. Для нахождения $\text{Rg } A^*$ осталось вычислить еще один окаймляющий минор порядка 4.

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 9 \\ 3 & 11 & -3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 11 & -3 & 15 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 11 & -3 & -18 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, $\text{Rg } A = \text{Rg } A^* = 3$. Система совместна и имеет бесконечное множество решений. Минор $M_{15} = 2$ является базисным. Коэффициенты при x_4 не входят в базисный минор, поэтому x_4 — свободное неизвестное, положим $x_4 = a$, где a — любое число, и запишем систему, эквивалентную данной.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5 + 7a, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 9 + 11a, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 + 4a. \end{cases}$$

Решаем ее по формулам Крамера, причем $\Delta = M_{15} = 2$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5+7a & -3 & 5 \\ 9+11a & -1 & 6 \\ 4+4a & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -22-26a & 0 & -13 \\ 9+11a & -1 & 6 \\ -14-18a & 0 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -22-26a & -13 \\ -14-18a & -9 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5+7a & 5 \\ 3 & 9+11a & 6 \\ 1 & 4+4a & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3-a & -1 \\ 0 & -3-a & -3 \\ 1 & 4+4a & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-a & -1 \\ -3-a & -3 \end{vmatrix} = 2(3+a);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5+7a \\ 3 & -1 & 9+11a \\ 1 & -2 & 4+4a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3-a \\ 0 & 5 & -3-a \\ 1 & -2 & 4+4a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3-a \\ 5 & -3-a \end{vmatrix} = 4(3+a).$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -8; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3+a; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2(3+a).$$

Ответ: $(-8; 3+a; 2(3+a); a)$, где a — любое число.

Решение линейных систем методом Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований системы. Это один из самых эффективных методов, применяющийся к линейным системам произвольного вида.

Подчеркнем, что линейная система полностью определяется своей расширенной матрицей, причем элементарным преобразованиям системы соответствуют элементарные преобразования этой матрицы. И наоборот, элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы соответствуют элементарные преобразования системы.

26. Алгоритм решения линейных систем методом Гаусса:

1) первым записывается такое уравнение данной системы, а в этом уравнении такое неизвестное, чтобы коэффициент a_{11} был отличен от нуля. Для дальнейших вычислений удобно, чтобы $a_{11}=1$. Если все коэффициенты системы равны 0, то в этом случае неоднородная система является несовместной, а однородная система имеет общее решение вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — любые числа;

2) последовательно из второго, третьего и т.д. уравнений с помощью элементарных преобразований исключается неизвестное x_1 . Для этого к i -тому уравнению прибавляется первое, умноженное на число $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$; $i = 2, 3, \dots, m$. В результате получится

эквивалентная система с матрицей

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{vmatrix};$$

3) вторым задается такое уравнение, чтобы $\alpha_{12} \neq 0$. При необходимости можно поменять местами неизвестные;

4) последовательно из третьего, четвертого и т.д. уравнений с помощью элементарных преобразований исключается неизвестное x_2 . В результате получим эквивалентную систему с матрицей:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

5) продолжается процесс последовательного исключения неизвестных до тех пор, пока возможно. Уравнения вида вычеркиваются из системы. После конечного числа преобразований получим систему одного из трех видов:

$$\begin{aligned} \text{а) } c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + \dots + c_{1n} x_n &= d_1, \\ c_{22} x_2 + c_{23} x_3 + \dots + c_{2n} x_n &= d_2, \\ c_{33} x_3 + \dots + c_{3n} x_n &= d_3, \\ \dots & \dots \\ c_{nn} x_n &= d_n, \end{aligned}$$

где $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn}$ отличны от нуля. Это система треугольного вида. Она имеет единственное решение: значение x_n находится из последнего уравнения, x_{n-1} — из предпоследнего, и так далее снизу вверх.

$$\begin{aligned} \text{б) } c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \dots + c_{1r} x_r + \dots + c_{1n} x_n &= d_1, \\ c_{22} x_2 + \dots + c_{2r} x_r + \dots + c_{2n} x_n &= d_2, \\ \dots & \dots \\ c_{rr} x_r + \dots + c_{rn} x_n &= d_r. \end{aligned}$$

Это трапецевидная система. Здесь $r < n$ и $c_{11}, \dots, c_{nn}$ отличны от нуля. Система имеет бесконечное множество решений. В последнем уравнении все неизвестные, стоящие правее x_r , объявляем свободными: $x_{r+1} = a$, $x_{r+2} = b$, ..., $x_n = c$, где $a, b, \dots, c$ — любые числа. Из последнего уравнения находится выражение x_r через свободные неизвестные, из предпоследнего находится выражение x_{r-1} и так далее снизу вверх, из первого находится x_1 . В результате получается общее решение системы.

в) система содержит уравнение вида

$$0x_1 + \dots + 0x_n = b, \text{ где } b \neq 0.$$

Такому уравнению не удовлетворяют никакие числа, в этом случае система несовместна.

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} 5x + 4z + 2t = 3, \\ x - y + 2z + t = 1, \\ 4x + y + 2z = 1, \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{bmatrix} x & y & z & t & \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Первым запишем четвертое уравнение, в котором коэффициент при x равен 1, то есть выполним преобразование (A_4, A_4) .

$$A^* \sim \begin{bmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Теперь выполним преобразования:
 $A_2 + (-1)A_1, A_3 + (-4)A_1, A_4 + (-5)A_1$.

$$A^* \sim \begin{bmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Поможем местами неизвестные y и z .

$$A^* \sim \begin{bmatrix} x & z & y & t & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_3 + 2A_2 \\ A_4 + A_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} x & z & y & t & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_4 + (-1)A_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} x & z & y & t & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Получили систему треугольного вида

$$\begin{cases} x + z + y + t = 0, \\ z - 2y = 1, \\ -7y - 4t = 3, \\ t = 1. \end{cases}$$

Решаем ее снизу вверх: $t = 1$; $y = -\frac{4}{7}t - \frac{3}{7} = -1$; $z = 1 + 2y = -1$;

$$x = -z - y - t = 1.$$

Ответ: $(1; -1; -1; 1)$ – единственное решение.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & (A_1, A_4) & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 7 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \sim \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Получили эквивалентную трапецевидную систему:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$$

Неизвестные x_3 и x_4 объявляем свободными: $x_3 = a$, $x_4 = b$.

Из последнего уравнения получаем, что $x_2 = a + 2b - 3$

Из первого уравнения $x_1 = x_3 + 2x_4 - 1 = a + 2b - 1$.

Ответ: $(a + 2b - 1; a + 2b - 3; a; b)$

a и b – любые числа.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 7 & -9 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Запишем систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_2 - 5x_4 = 1, \\ x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Неизвестные x_2 и x_4 объявляем свободными: $x_2 = a, x_4 = b$.
Из второго уравнения: $x_3 = 1 - 6b$; из первого уравнения: $x_1 = 1 - 2x_3 - 3x_2 + 5x_4 = -1 - 3a + 17b$.

Ответ: $(-1 - 3a + 17b; a; 1 - 6b; b)$, где a и b - любые числа.

Однородные линейные системы

27. Однородная линейная система является совместной, так как всегда имеет нулевое решение $(0, \dots, 0)$.

28. Однородная система имеет нулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы меньше числа неизвестных системы.

29. Квадратная однородная линейная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы равен 0.

30. Множество решений линейной однородной системы обладает следующими свойствами:

1) если $e = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - решение данной системы, то $\lambda e = (\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n)$ - также решение этой системы, где λ - произвольное число;

2) если $e_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $e_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ - решения данной системы, то их сумма $e_1 + e_2 = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ - также решение этой системы;

3) если $e_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, e_k = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ решения данной системы, то их линейная комбинация $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ также является решением этой системы.

Ясно, что свойство 3) включает в себя свойства 1) и 2).

31. Фундаментальной системой решений однородной линейной системы называется такое множество $e_1, \dots, e_k$ решений этой системы, которое удовлетворяет двум условиям:

- 1) множество $e_1, \dots, e_k$ линейно независимо;
- 2) любое решение e данной системы является линейной комбинацией решений $e_1, \dots, e_k$.

Символом e обозначается решение $e = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

32. Теорема о существовании фундаментальной системы решений. Если ранг r основной матрицы однородной линейной системы уравнений меньше числа n ее неизвестных, то существует фундаментальная система решений, состоящая из $n-r$ решений.

33. Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений однородной линейной системы:

1) Решить систему любым удобным способом. Если система имеет только нулевое решение, то фундаментальной системы нет. В противном случае найти общее решение.

2) Пусть $a, b, \dots, c$ — свободные неизвестные. Их число равно $n-r$, где n — число всех неизвестных системы, а r — ранг основной матрицы. Данная система имеет фундаментальную систему из $n-r$ решений.

Составим таблицу

a	b	...	c	
α_1	0	...	0	$e_1 = (\dots)$
0	α_2	...	0	$e_2 = (\dots)$
		...		...
0	0	...	α_{n-r}	$e_{n-r} = (\dots)$

состоящую из $n-r$ столбцов и столько же строк. Положим $a = \alpha_1, b = 0, \dots, c = 0$ в общем

решении системы, получим решение e_1 . При $a = 0, b = \alpha_2, \dots, c = 0$ получим решение e_2 . Наконец, при $a = 0, b = 0, \dots, c = \alpha_{n-r}$ получим решение e_{n-r} .

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}$ — любые конкретные числа, отличные от нуля, в частности, можно считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-2} = 1$.

Пример 3. Найдти фундаментальную систему решений для однородной системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 11x_3 + 7x_4 = 0, \\ -7x_1 + 13x_2 + 20x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составляем основную матрицу системы и находим ее ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & 7 \\ 5 & -3 & -11 & 7 \\ -7 & 13 & 20 & -7 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -44; \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 5 & -3 & -11 \\ -7 & 13 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -6 & -3 & -11 \\ 13 & 13 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -6 & -3 & -11 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 5 & -3 & 7 \\ -7 & 13 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 2 & -10 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

Значит, $\text{Rg } A = 2$, минор $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -44$ является базисным.

Решаем систему с помощью определителей. Неизвестные x_3 и x_4 объявляем свободными: $x_3 = a$, $x_4 = b$. Запишем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 2a - 7b, \\ 5x_1 - 3x_2 = 11a - 7b. \end{cases} \quad \Delta = -44;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2a - 7b & a \\ 11a - 7b & -3 \end{vmatrix} = -83a + 70b;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2a - 7b \\ 5 & 11a - 7b \end{vmatrix} = 23a + 14b;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{83a - 70b}{44}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{23a + 14b}{44};$$

Общее решение системы: $\left(\frac{83a - 10b}{44}; -\frac{23a + 14b}{44}; a; b \right)$.

Из общего решения найдем фундаментальную систему

a	b	
44	0	$e_1 = (83; -23; 44; 0)$
0	44	$e_2 = (70; -14; 0; 44)$

Ответ: $(83; -23; 44; 0)$, $(70; -14; 0; 44)$ – фундаментальная система решений.

Пример 10. Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом Гаусса.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \end{array} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Запишем систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_4 и x_5 объявляем свободными: $x_4 = a, x_5 = b$;
из последнего уравнения – $x_5 = 0$, из второго уравнения – $x_4 = 0$. Из первого уравнения находим $x_1 = -3a - 5b$.

Запишем общее решение: $(-3a - 5b; a; b; 0; 0)$.

Из общего решения найдем фундаментальную систему решений

a	b	
I	0	$= (-3; 1; 0; 0; 0)$
II	I	$= (-5; 0; 1; 0; 0)$

Ответ: $(-3; 1; 0; 0; 0)$ и $(-5; 0; 1; 0; 0)$ – фундаментальная система решений.

Упражнения и задачи

1. Найти произведение AB матриц:

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad 2) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad 4) A = [2 \ -5 \ 1 \ 0], B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix};$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \quad 6) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$7) A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad 8) A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$9) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad 10) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$11) A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, B = [3 \ 5 \ -2]; \quad 12) A = [3 \ -1 \ 2 \ 0], B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$13) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 9 & -5 \end{bmatrix}; \quad 14) A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix};$$

$$15) A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad 16) A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$17) A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad 18) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

$$19) A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad 20) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$21) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad 22) A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix};$$

$$23) A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad 24) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$25) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad 26) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

II. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 5 & -6 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} -4 & 4 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & -3 & -6 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} -3 & -9 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & -11 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} -6 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & -4 & -9 \\ -4 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} -3 & -2 & 6 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$7) \begin{vmatrix} 6 & 7 & -2 & 5 \\ 4 & 7 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 7 & -8 & 3 & -6 \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -1 \\ 1 & -2 & 9 & -7 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \quad 9) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 6 \\ 11 & 6 & 1 & 8 \\ 54 & 23 & 32 & 42 \end{vmatrix};$$

$$10) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 11) \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 9 & 8 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 12) \begin{vmatrix} -3 & -7 & -5 & -5 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$13) \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 14) \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 11 \\ -1 & -7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad 15) \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -10 & 5 & 7 \\ -2 & -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$16) \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & -7 \\ 12 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 17) \begin{bmatrix} -4 & -3 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 7 & 6 \\ -3 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad 18) \begin{bmatrix} 3 & 10 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ -4 & -1 & 9 & 9 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$19) \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 7 \\ 16 & -2 & -9 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 8 \\ 11 & 9 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad 20) \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 2 \\ 10 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & -3 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad 21) \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$22) \begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 & -7 \\ 5 & 8 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad 23) \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 & -11 \\ 1 & 13 & 9 & -3 \\ 1 & 11 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad 24) \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ 4 & 9 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$25) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 26) \begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad 27) \begin{bmatrix} -1 & 9 & 12 & -4 \\ 6 & -2 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Р. Найдти для данных матриц собственные и выполнить проверку:

$$1) \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad 3) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 4) \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -1 & -5 & -5 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} -3 & 9 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -8 & -3 \end{bmatrix} \quad 6) \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -5 & 8 & 6 \\ 5 & 10 & -7 \end{bmatrix} \quad 7) \begin{bmatrix} -10 & -5 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ -7 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad 8) \begin{bmatrix} -9 & 11 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$9) \begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 5 & -12 & -8 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad 10) \begin{bmatrix} 11 & 5 & -6 \\ -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad 11) \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad 12) \begin{bmatrix} -5 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$13) \begin{bmatrix} 7 & 6 & 11 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad 14) \begin{bmatrix} -5 & 4 & 7 \\ -5 & 6 & 5 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix} \quad 15) \begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad 16) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$17) \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad 18) \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ -4 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & -13 \end{bmatrix} \quad 19) \begin{bmatrix} 7 & 3 & -8 \\ -3 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \quad 20) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -5 \\ -7 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$21) \begin{bmatrix} -5 & -6 & 4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 9 & 20 & -8 \end{bmatrix} \quad 22) \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 11 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad 23) \begin{bmatrix} -4 & -5 & -3 \\ 14 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad 24) \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 11 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$25) \begin{bmatrix} 6 & -3 & -8 \\ -7 & 4 & 8 \\ 6 & -5 & -3 \end{bmatrix} \quad 26) \begin{bmatrix} -5 & -3 & -11 \\ 2 & 5 & 13 \\ 10 & -9 & -12 \end{bmatrix} \quad 27) \begin{bmatrix} -3 & -11 & -8 \\ -4 & 4 & 5 \\ -9 & -8 & -3 \end{bmatrix} \quad 28) \begin{bmatrix} -9 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 13 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. Решить систему, используя теорему Крамера:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y + z = -2, \\ 2x + 3y - 4z = 2, \\ 7x - 5y - z = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y - 2z = -1, \\ -2x + 6y - 2z = 26, \\ -3x + 5y + 4z = 25; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} -4x + 5y + 2z = 3, \\ 7x + y + 5z = 13, \\ 3x + 5y + 7z = 15; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x + 4y + 8z = 2, \\ 3x + 5y + 5z = 4, \\ 2x + 2y + 3z = 1; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 6x - y + 5z = 9, \\ -2x + 2y - z = 1, \\ 7x - y + 6z = 11; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 6x - y + 5z = -2, \\ 4x + 5y + 3z = 4, \\ 6x - 3y + 5z = -4; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x + 6y - 3z = 5, \\ -2x + y + 2z = 1, \\ -4x + y + 2z = -1; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} -2x + y + 3z = -5, \\ -3x + 8y + 10z = 0, \\ 3x + 6y + 2z = 16; \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 8x - 7y + 3z = 5, \\ 11x - 6y + 4z = 14, \\ 3x - 2y + z = 3; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 4x + 2y + z = 5, \\ 3x + 4y + z = 8, \\ 5x + 7y + 2z = 1; \end{cases} \quad 11) \begin{cases} 5x + 6y - 3z = 2, \\ 7x - 6y - 4z = 1, \\ 6x - y - 3z = -4; \end{cases} \quad 12) \begin{cases} 3x + 5y + 9z = -5, \\ 3x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 4y + 7z = -4; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 5x + 4y + 8z = 5, \\ 3x + 5y + 5z = -2, \\ 2x + 2y + 3z = 1; \end{cases} \quad 14) \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2, \\ x + 7y + 3z = 12, \\ x + 5y + 2z = 7; \end{cases} \quad 15) \begin{cases} 3x + 4y + 9z = -2, \\ 11x - 4y + 8z = -1, \\ 8x - 5y + 3z = 0; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 6x + 5y - 8z = 3, \\ 7x + 4y - 8z = 3, \\ 7x - 3y - 3z = 1; \end{cases} \quad 17) \begin{cases} 2x + y + 5z = 3, \\ x + 4y + 4z = 5, \\ -4x + 6y - 3z = 11; \end{cases} \quad 18) \begin{cases} 5x + 5y - 8z = 5, \\ 4x + 8y + 9z = 0, \\ 3x + 5y + 3z = 1; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 3x + 4y - z = 5, \\ 4x + 5y - 2z = 5, \\ 7x + y - 4z = -4; \end{cases} \quad 20) \begin{cases} 5x + 4y + z = 2, \\ 5x + 5y + 2z = 3, \\ 4x - y - 4z = -2; \end{cases} \quad 21) \begin{cases} x + 2y - 5z = 7, \\ 5x + 7y - 10z = 1, \\ 4x + 3y + 4z = -15; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} x + 3y - z = 3, \\ 2x + 3y - 5z = -6, \\ x + 7y + 4z = 5; \end{cases} \quad 23) \begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x + 5y + 5z = -4, \\ 3x + 2y - z = 4; \end{cases} \quad 24) \begin{cases} 3x + 6y + 4z = 4, \\ -2x + 3y + 6z = -1, \\ 2x + y - z = 2; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 3x + y + 8z = -3, \\ x + y + 3z = 0, \\ 2x + 3y + 5z = 3; \end{cases} \quad 26) \begin{cases} 2x - y + 4z = 3, \\ 7x + 2y + 5z = -2, \\ 2x + 5y - 6z = -11; \end{cases} \quad 27) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8, \\ x + 5y - 7z = 1, \\ x - 2y + 3z = 4. \end{cases}$$

У. Решить систему методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} 2x + y + z + 3t + 5u = 1, \\ 3x - y - 2z + t + u = -3, \\ x + 3y + 4z + 5t - u = 7, \\ 4x - 3y - 5z - t + 7t = -9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y + z + 5t + 3u = 6, \\ 4x + y - 2z + t + u = 3, \\ 2x + 3y + 4z + 9t + 5u = 9, \\ 3x + 2y + z + 5t + 3u = 6; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x - y - 2z - 3t + 4u = 1, \\ 4x + 2y - 3z + 3t + 5u = 3, \\ 3x + 3y - 4z + 9t + 6u = 5, \\ 4x + 2y - 3z + 3t + 5u = 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x + 2y + 3z - t - 4u = 1, \\ 4x + y + 2z + 2t - 3u = 0, \\ 5x + 3y + z - t + u = 2, \\ 6x + 2y + 2t + 2u = 1; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x - 5y - 3z + 7t + 2u = 6, \\ 2x - 8y - 5z + 11t - 6u = 5, \\ x + y - 2z + t + 5u = 4, \\ 3x - 3y - 6z + 11t - 4u = 10; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 5x - 4y + 3z - 5t + u = 7, \\ 3x + 6y + 4z + t - 2u = 5, \\ 6x + 7y - 5z - 4t + u = -2, \\ x + 3y + 2z + t - 5u = -1; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x - y - z + 4t - 2u = 4, \\ x + 2y + z + 5t + 3u = 5, \\ 2x - y - z + 11t - 2u = 11, \\ 5x + 5y + 2z + 10t + 7u = 10; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} -4x + 8y + 2z - 6t + 6u = 5, \\ 2y + z + 4t - 4u = 3, \\ 2x - 8y - 5z + 8t + 8u = -3, \\ 6x - 12y - 5z + 6t - 6u = -2; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + 2y - z - t + 3u = 3, \\ 2x + 6y + 2z + 3t + 8u = 8, \\ 3x + 5y + 3z + 4t + 8u = 8, \\ 2x + 5y - 2z - t + 7u = 7; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 4x + 4y - 15z + 6t + 4u = 8, \\ 3x + 5y + z - 3t + 5u = 3, \\ 3x + 11y - 4z + t + 11u = 2, \\ 2x + 12y + 12z - 8t + 12u = -3; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2x - 4y + 9z + 6t - u = 5, \\ 2x - 7y + 4z + t + u = 3, \\ 2x + y - 3z - 2t + u = 1, \\ 3x + 5y - z + 2t - u = 3; \end{cases} \quad 12) \begin{cases} 2x - 6y + 3z - 4t - u = 3, \\ x + 2y - 5z + t + 2u = 1, \\ 4x - 2y - 7z - 2t + 3u = 5, \\ 5x - 10y + z - 7t = 7; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x + 3y + 4z + 2t + 5u = 3, \\ 2x + 6y + 2z + 3t + 10u = 7, \\ 2x + 5y + 14z + 5t + 10u = 5, \\ 3x + 9y + 6z + 5t + 15u = 10; \end{cases} \quad 14) \begin{cases} 3x + 5y - z + t - 2u = 3, \\ 2x + 4y + 2z - 2t + 4u = -6, \\ x + y - 3z + 3t - 6u = 9, \\ 6x + 10y - 2z + 2t - 4u = 6; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x + 2y + 3z + 5t + 3u = 5, \\ 3x + y + 4z + 4t + 3u = 5, \\ 10x - 4y + 6z - 3t + u = 2, \\ 8x - 3y + 5z - 2t + u = 2; \end{cases} \quad 16) \begin{cases} 3x + 2y + z - t + 3u = 4, \\ 4x - y - 5z - 5t - 6u = 9, \\ 4x + 3y + 2z - t + 5u = 5, \\ 2x + y - t + u = 3; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x + 3y - z + t + 2u = 1, \\ 2x + 3y - 5t + t + 2u = -3, \\ x + 7y + 4z + t + 2u = 6, \\ 3x + 6y - 6z + 2t + 4u = 7; \end{cases} \quad 18) \begin{cases} 3x + 5y + 6z - 3t + 2u = 3, \\ 4x + 7y + 6z - 4t + 3u = 2, \\ 3x + 6y - z - 3t + 3u = -4, \\ 2x + 4y - z - 2t + 2u = -3; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 5x + 4y + 8z - t + 3u = 5, \\ 3x + 5y + 5z + 2t + 2u = -2, \\ 2x + 2y + 3z + u = 1, \\ 4x + y + 6z - 3t + 2u = 8; \end{cases} \quad 20) \begin{cases} 3x + 2y + 5z + t + 3u = 3, \\ 2x + 3y + 3z + 8t + 5u = 4, \\ x + 4y + z + 15t + 2u = 5, \\ 2x + 3y + 3z + 8t + 5u = 4; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} x + 2y + 5z + 6t + 4u = 3, \\ 5x + 7y + 9z + t + u = -4, \\ 3x + 3y - z - 11t - 11u = -10, \\ x + 2y + 5z + 6t + 4u = 3; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} 2x - y + 4z + t + 3u = 3, \\ 7x + 2y + 5z + t + 2u = -2, \\ 2x + 5y - 6z + t + u = -11, \\ 3x - 2y + 7z - t - 2u = 0; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 3x + y + 8z + 3t + 6u = -3, \\ x + y + 3z + t + 2u = 0, \\ 2x + 3y + 5z + 2t + 4u = 3, \\ 2x - y + 6z + 2t + 4u = -6; \end{cases}$$

VI. Проверять систему и решить ее:

$$1) \begin{cases} 2x - 2y + 5z + t = 2, \\ 3x - 2y + 3z - 2t = 1, \\ x + 6y + 7z + 4t = 3, \\ 4x - 2y + z - 5t = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x - y + 3z + 2t = 5, \\ 3x - 2y + 4z - t = 4, \\ x + 4y + 2z + 5t = 6, \\ x - 5y + z + 3t = 1; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + y + 4z + t = 3, \\ 7x + 3y - 2z - t = 2, \\ 3x + y - 10z - 3t = -4, \\ 2x + y + 4z + t = 3; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x + 5y - 3z + 2t = 4, \\ x + 3y + 2z + t = 3, \\ 3x + 7y - 8z + 8t = 5, \\ x + 4y + 9z + 2t = 5; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x - 2y + 4z + t = 1, \\ 3x + 5y + 4z - t = 2, \\ 3x - 2y + 3z + 2t = 3, \\ 2x - 2y + 2z + 3t = 5; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 6x - 5y - 3z + 2t = 2, \\ x + 4y + 2z - 3t = -3, \\ x + 2y + 7z + 3t = 1, \\ 8x + y + z + 2t = 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x + y + 5z + 3t = 1, \\ 4x + y + 4z - 2t = 3, \\ 2x - 2y + z - 5t = 4, \\ 3x + 2y - 2z + 4t = -2; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 4x - 2y - 4z + 3t = 2, \\ 3x - 2y - 3z - 2t = 3, \\ 3x + 5y - 4z + 3t = -1, \\ 2x + 5y - 3z - 2t = 0; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + y + z + 2t = 3, \\ x + y + 2z + 2t = 4, \\ 3x + 3y + 4z + 6t = 10, \\ x + y + z + 2t = 3; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x - y + 5z - 3t = 4, \\ 5x + 4y + 3z - 8t = 2, \\ 6x + 3y + 8z - 9t = 3, \\ 2x - 2y + 10z - 4t = 5; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x + 3y - z + 2t = 5, \\ 4x + 14y - 4z - 3t = 7, \\ 3x + 11y - 3z - 2t = 4, \\ 2x + 6y - 2z + t = 8; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x + y + z - 2t = 3, \\ 3x + 5y + 3z - 3t = 4, \\ 4x + 6y + 4z - 5t = 7, \\ x + 3y + z - 5t = -2; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x + y + 3z - 2t = 4, \\ x - 8y - 7z + 9t = 3, \\ 2x - 9y - 4z + 11t = 5, \\ x - 8y - 7z + 5t = 5; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 6x - y + 5z - t = 1, \\ 2x - 9y + 2z - 9t = 0, \\ 4x + 5y + 3z + 5t = 4, \\ 2x - 6y + 2z - 6t = 0; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} 3x + y + 4z - 5t = 3, \\ 4x + y + 5z - 6t = 4, \\ 3x + 2y + 6z - 8t = 3, \\ 2x + 3y + 5z - 7t = 2; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 4x + 5y + 8z - 3t = 7, \\ 5x + 3y + 5z - 5t = 5, \\ 2x + 2y + 3z - 7t = 4, \\ x + 4y + 6z - 5t = 6; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x + 7y + 5z - 3t = -6, \\ x + y + z + 4t = 3, \\ 3x + 9y + 7z + 5t = 0, \\ x + y + z + 4t = 3; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x - y + 3z + 5t = 7, \\ 4x - y + 9z - 4t = 1, \\ 3x - y + 7z - t = 3, \\ 2x - y + 5z + 2t = 5; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 5x - 3y + 2z - t = 4, \\ 2x + y - 3z + 2t = 1, \\ 9x + y - 4z + 3t = 6, \\ 4x + 3y - 6z + 4t = 2; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 3z + y + 2z + 3t = 8, \\ x - y - 2z - 3t = -2, \\ x + y + 2z + 3t = 5, \\ 2x + 4y + 8z + 12t = 17; \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 2x + 2y - 3z + t = 2, \\ 3x + 2y - 4z + 3t = 5, \\ x + 2y - 2z - t = -1, \\ 2x - 2y - z + 7t = 10; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} x - 6y - z + 6t = 2, \\ x + y - 2z + t = 4, \\ x - 2y - 2z + 5t = 3, \\ 3x - 7y - 7z + 12t = 9; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} 8x + 7y - 5z - 3t = 0, \\ x + y - 2z + t = 3, \\ 6x + 5y - z - 5t = -5, \\ 4x + 3y + 3z - 7t = -12; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} x - y + z - t = -2, \\ x + 4y + 2z + 4t = 3, \\ x + 7y + 2z + 7t = 1, \\ 4x + 9y + 6z + 9t = 0; \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} 4x + 2y + 2z - 2t = 3, \\ 5x - y - 2z - 7t = 1, \\ 7x + 9y + 10z + 3t = 5, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} x + y + 2z + 2t = 5, \\ 4x + 4y - 8z - 7t = 3, \\ 3x + 3y - 10z - 9t = 2, \\ x + y + 2z + 2t = 6; \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} 8x + 5y - 3z - 5t = 5, \\ 2x + y - 4z - t = -2, \\ 4x + 3y + 5z - 3t = 8, \\ 2x + y - 4z - t = -1; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 2x - 5y - 3z + 4t = 6, \\ 5x - 8y - 11z + 18t = 26, \\ 3x - 7y - 7z + 12t = 0, \\ 2x - y - 6z + 6t = 7; \end{cases}$$

УП. Найти фундаментальную систему решений:

$$1) \begin{cases} 2x + y + 2z + t - 3u = 0, \\ 3x + y + 3z + t - 3u = 0, \\ 3x + 2y + 3z + 2t - 6u = 0, \\ 4x + 2y + 4z + 2t - 6u = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + 3y - z + 5t + 6u = 0, \\ x + 2y - z - 2t - 3u = 0, \\ 5x + 9y - 4z - t + 3u = 0, \\ 4x + 6y - z + 10t + 19u = 0; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + 2y - z + 3t + u = 0, \\ 10x + 3y + 5z + 5t + 8u = 0, \\ 5x + 2y + 2z + 3t + 4u = 0, \\ 3x - y + 4z - t + 3u = 0; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x - 9y - 6z - 4t - u = 0, \\ 3x + y + 5z + 4t + 8u = 0, \\ 2x - 5y + 3z + 3t + 11u = 0, \\ 6x + 5y + 4z + 4t + 20u = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 4y - 2z + 6t - 10u = 0, \\ 3x + 6y - 3z + 9t - 15u = 0, \\ x + 2y - z + 3t - 5u = 0, \\ 5x + 10y - 5z + 15t - 25u = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 4y + 2z + t + 2u = 0, \\ 3x + 3y + 4z + t - u = 0, \\ 5x + 5y + 7z + 2t - 2u = 0, \\ 3x + 6y + 5z + 2t + u = 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 4x + y - z + t + 3u = 0, \\ 5x + y + 4z + 4t - 4u = 0, \\ 21x + 15y - 2z + 7t + 11u = 0, \\ 3x + y - 8z - 3t + 13u = 0; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x + 2y + 3z + 2t + u = 0, \\ 7x + 5y + 2z + 3t + 6u = 0, \\ 4x + 3y + z + 2t + 4u = 0, \\ x + 2y + 5z + 3t = 0; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + 4y + 7z + 9t - 2u = 0, \\ 5x + 2y + 6z - 2t + 8u = 0, \\ x + y + 2z + t + u = 0, \\ x - y - z - 4t + 3u = 0; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x + 4y + 4z - t + 7u = 0, \\ 4x + y + 9z + 4t + 6u = 0, \\ 2x - y + 5z + 4t + 2u = 0, \\ x - 2y + t - 3u = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + y + 7z - 4t + 3u = 0, \\ 2x + 9y + z - 10t - 3u = 0, \\ 5x + 2y + 8z + t - 2u = 0, \\ x - 8y + 7t - 2u = 0; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 3x + 3y + z + 4t + 5u = 0, \\ 2x + y + 3z + 3t + u = 0, \\ 5x + y + 11z + 8t - u = 0, \\ 2x + 7y - 11z + t + 15u = 0; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 2t + 5u = 0, \\ 2x + y + 2z + 2t + 4u = 0, \\ 4x + 3y + 6z - 2t + 6u = 0, \\ 5x + 4y + 8z - 6t + 7u = 0; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 3x + y + 5z + 2t + u = 0, \\ 7x + 7y + 2z + t + 7u = 0, \\ 9x + 3y + 5z - t + 3u = 0, \\ 5x - 3y + 3z - 3u = 0; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 3x + 5y + 2z + t + 2u = 0, \\ 2x + 3y + 3z + 4t + 3u = 0, \\ 4x + 7y + z - 2t + u = 0, \\ x + y + 4z + 7t + 4u = 0; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 4x + y - z + 2t + u = 0, \\ 2x + 5y + z + 4t - u = 0, \\ 3x + 2y + z + 3t - u = 0, \\ 5x - 2y - z + t + u = 0; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 4x + 2y + 3z + 5t + u = 0, \\ 7x + 2y + 6z + 8t + u = 0, \\ 2x + y + 2z + 2t + u = 0, \\ x - y + z + t - u = 0; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 5x + 3y + 6z + 8t + 3u = 0, \\ 2x + 8z + t + 2u = 0, \\ x + 3y - 10z - u = 0, \\ 4x + 5y - 12z + t = 0; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 3x + 5y + 3z + t + 5u = 0, \\ x + 5y + z - t + 3u = 0, \\ 2x + 5y - 2z - 5t + 5u = 0, \\ x + 6y - 3z - 8t + 6u = 0; \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} x + 3y + 3z + 2t + 4u = 0, \\ 4x + 10y + 13z + 9t + 15u = 0, \\ 2x + 4y + 7z + 5t + 7u = 0, \\ x + 3y + 3z + 2t + 3u = 0; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} 2x + 4y + 3z + t + 2u = 0, \\ 3x + 3y + 2z + 2t + 3u = 0, \\ 4x + 4y + 3z + 3t + 4u = 0, \\ 3x + 5y + 4z + 4t + 3u = 0; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} 4x + 2y + z + 3t - 2u = 0, \\ x + 5y + z + 12t - 5u = 0, \\ 3x + 4y + z + 8t - 4u = 0, \\ 6x + y + z - t - u = 0; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} 5x + 2y + 3z - 4t + 6u = 0, \\ 2x + y + z + 2t + 3u = 0, \\ 3x + 2y + z + 4t + 6u = 0, \\ 4x + y + 3z + 2t + 3u = 0. \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} 2x - 3y + z + 6t + 4u = 0, \\ x + y + 3z + 3t + 2u = 0, \\ 3x - 7y - z + 9t + 6u = 0, \\ x + 6y + 8z + 3t + 2u = 0, \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 3x - 2y + 2z - t + 8u = 0, \\ x + 7y + 5z + 3t - 4u = 0, \\ 5x + 3y + 7z + t + 8u = 0, \\ 3x + 12y + 10z + 5t - 4u = 0, \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t + u = 0, \\ 7x + y + 3z + 12t - 3u = 0, \\ 5x + y + 2z + 7t - u = 0, \\ 6x - y + 2z + 15t - 6u = 0, \end{cases}$$

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1978.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1981.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1980.

Дополнительная литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1979.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1980.
3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. - М.: Наука, 1979.
4. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Мн.: Выш.шк., 1986.
5. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Мн.: Выш.шк., 1982.
6. Кайгородов В.Р. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - Изд-во Казанского университета, 1985.

Задачники

1. Бурдун В.А., Мурешко Е.А., Феденко А.С.: Сборник задач по алгебре и геометрии. - Мн.: Изд-во БГУ, 1979.
2. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б.: Сборник задач по линейной алгебре. - Мн.: Выш.шк., 1980.

Содержание

Введение.....	3
Матрицы и определители.....	3
Матрицы.....	3
Определители.....	7
Обратная матрица.....	10
Ранг матрицы.....	12
Система алгебраических линейных уравнений.....	17
Исследование совместности линейной системы.....	19
Решение линейных систем с помощью определителей.....	22
Решение линейных систем методом Гаусса.....	26
Однородные линейные системы.....	30
Упражнения и задачи.....	34
Литература.....	45

Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений

Учебно-методические указания для студентов первого курса
физического факультета

Составитель Валентина Ивановна Харламова.

Подписано к печати 23.01.87. Формат 60х84 1/16.

Бумага писчая №1. Печать офсетная. Усл.п.л. 2,6.

Уч.-изд.л. 2,2. Тираж 150. Заказ 43 . Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте ГГУ, г.Гомель, ул.Советская, 104.