

О ПРИВОДИМЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПИ-РАЗЛОЖИМОГО ДЕФЕКТА 3

Непустое множество, на котором введена бинарная алгебраическая операция, называется группой, если относительно введенной операции на этом множестве существует нейтральный элемент, и каждый элемент множества содержится вместе со своим симметричным. Группы, о которых будет идти речь в данной работе, предполагаются конечными, т. е. состоящими из конечного числа элементов. Определения и обозначения, которые используются в работе, стандартны и при необходимости их можно найти в [1; 2], здесь приводятся только самые необходимые для первоначального ознакомления с результатами.

Классом групп называется такое множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все другие группы, ей изоморфные. Формацией групп F называется такой класс групп, который замкнут относительно взятия гомоморфных образов и всегда из того, что $G/N_1 \in F$ и $G/N_2 \in F$, где $N_1 \cap N_2 = 1$, всегда следует, что $G \in F$. Локальным экраном называется такое отображение f класса Ψ всех групп во множество всех формаций групп, что выполняются следующие условия:

- 1) $f(1) = \Psi$;
- 2) $f(A) = f(B)$ для любых двух неединичных групп A и B , где p – некоторое простое число;
- 3) $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой неединичной группы G .

f -центральный главный фактор – такой главный фактор H/K группы G , что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(H/K)$. Локальный экран f называется локальным экраном формации F , если F – класс всех групп с f -центральными главными факторами. Формация, обладающая хотя бы одним локальным экраном, называется локальной.

В докладе, прочитанном Л. А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1978 г., была поставлена общая проблема изучения минимальных локальных не H -формаций. Минимальной локальной не H -формацией называется такая локальная формация, которая сама в классе H не содержится, но все ее собственные локальные подформации в этот класс входят. Изучение такого рода формаций проводилось А. Н. Скибой, который занимаясь вопросами классификации этих формаций, ввел в работе [3] понятие H -дефекта. Пусть H – непустой класс групп, F – некоторая локальная формация групп. Если решетка локальных формаций, заключенных между F и H имеет конечную длину n , то число n называется H -дефектом локальной формации F . В случае, если H -дефект достаточно мал, а класс H хорошо изучен, то

свойства формации F можно изучать на основе свойств класса H . В работе [4] была предпринята первая попытка обобщения изученных свойств локальных формаций заданного дефекта.

Локальная формация называется приводимой, если она может быть представлена в виде объединения своих собственных локальных подформаций в решетке локальных формаций и неприводимой в противном случае.

Формация, обладающая таким локальным экраном, все непустые значения которого – локальные формации, называется 2-кратнолокальной. Следует отметить, что 2-кратнолокальными являются многие известные локальные формации. В работе [5] были изучены приводимые локальные формации H -дефекта 2 для произвольной 2-кратнолокальной формации H .

Пусть p – некоторое простое число. Группа называется p -замкнутой, если она обладает нормальной силовой p -подгруппой. Группа называется p -нильпотентной, если она обладает нормальной холловой p' -подгруппой. Группа, которая является одновременно и p -замкнутой и p -нильпотентной, называется p -разложимой. Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел. Группа называется π -разложимой, если она является p -разложимой для всякого $p \in \pi$. Через $H_1 V_l H_2$ обозначается объединение локальных формаций H_1 и H_2 в решетке локальных формаций. В данной работе дана классификация приводимых локальных формаций π -разложимого дефекта 3. Доказательству основного результата предшествовало доказательство трех вспомогательных утверждений.

Лемма 1. В локальной формации $F = H_1 V_l H_2 V_l M$, где H_1 и H_2 – различные минимальные локальные не π -разложимые формации, а M – некоторая локальная π -разложимая формация, не существует других минимальных локальных не π -разложимых формаций, отличных от H_1 и H_2 .

Лемма 2. В разрешимой локальной формации $F = H_1 V_l M$, где H_1 – некоторая неприводимая локальная формация π -разложимого дефекта 2, а M – некоторая локальная π -разложимая формация, существует единственная минимальная локальная не π -разложимая формация.

Лемма 3. В разрешимой локальной формации $F = H_1 V_l M$, где H_1 – некоторая неприводимая локальная формация π -разложимого дефекта 2, а M – некоторая локальная π -разложимая формация, не существует других неприводимых локальных формаций π -разложимого дефекта 2, кроме формации H_1 .

Теорема. Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел, F – разрешимая приводимая локальная формация. Тогда и только тогда формация F имеет π -разложимый дефект 3, когда $F = H V_l M$, где M – некоторая локальная π -разложимая формация, а формация H удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $H = H_1 V_l H_2 V_l H_3$, где H_1 , H_2 и H_3 – различные минимальные локальные не π -разложимые формации;
- 2) $H = H_1 V_l H_2$, где H_1 – некоторая неприводимая локальная формация с π -разложимым дефектом 2, а H_2 – минимальная локальная не π -разложимая формация, не входящая в формацию H ;
- 3) H – некоторая неприводимая локальная формация с π -разложимым дефектом 3;
- 4) $H = H_1 V_l H_2$, где H_1 и H_2 – различные неприводимые локальные формации с π -разложимым дефектом 2 такие, что $H_1 \cap H_2$ – локальная формация с π -разложимым дефектом 1.

Список использованных источников

- 1 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
- 2 Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.
- 3 Скиба, А. Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А. Н. Скиба, Е. А. Таргонский // Математические заметки. – 1987. – Т. 41, № 4. – С. 490–499.

4 Анисков, В. В. Некоторые общие свойства локальных формаций с заданным X -дефектом / В. В. Анисков. – Гомель, 1994. – 14 с. – (Препринт / Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 20).

5 Анисков, В. В. О приводимых локальных формациях с заданным H -дефектом / В. В. Анисков // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 65–68.