Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть пятая

Дифференциальное исчисление

функции многих переменных

Гомель 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.

Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч. 5. Дифференциальное исчисление функции многих переменных / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 92 с.

ISBN 978-985-439-269-1

Данное пособие посвящено дифференциальному исчислению функции многих переменных. В нем излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

ISBN 978-985-439-269-1

Содержание

Введение

Пособие «Дифференциальное исчисление функции многих переменных» является пятой частью комплекса пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физических факультетов вузов. В нем рассматриваются предел и непрерывность, частные производные и дифференциалы, локальный и условный экстремумы функции многих переменных.

Весь материал разбит на части, соответствующие одному практическому занятию. В каждое занятие включены некоторые сведения из теории (основные определения и теоремы без доказательств), решение типовых примеров, задания для аудиторной и домашней работ. Отдельно приведены индивидуальные домашние задания. Сформулированные в пособии задания различаются по трудности решения, что позволяет адаптировать сложность задания к уровню подготовки студента.

Содержание пособия соответствует учебной программе по математическому анализу для физических специальностей и связано с курсом лекций.

При подборе задач авторами использованы различные источники, в том числе «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных» В. Ф. Бутузова (1988), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991).

Пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий и студентами в их самостоятельной работе над предметом.

Практическое занятие 1 **Предел и непрерывность функции многих переменных**

1.1 Пространство $\mathbf{R}^n$
1.2 Функции многих переменных
1.3 Предел функции многих переменных, повторные пределы
1.4 Непрерывность функции многих переменных

1.1 Пространство $\mathbf{R}^n$

n-мерным арифметическим точечным пространством называется множество всех упорядоченных наборов $(x_1;x_2;...;x_n)$ действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n и обозначается $\mathbf{R}^n$; его элементы – *точками* пространства $\mathbf{R}^n$; числа x_1, x_2, ..., x_n – *координатами* точки $(x_1;x_2;...;x_n)$.

Точки пространства $\mathbf{R}^n$ обозначаются $M(x_1;x_2;...;x_n)$ или $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Точка $O(0;0;...;0)$ называется *началом координат*.

Расстоянием (метрикой) $\rho(x,x')$ между двумя точками $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $x'=(x'_1;x'_2;...;x'_n)$ называется число

$$\rho(x;x')=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x'_i)^2}.$$

При $n=1$ имеем пространство $\mathbf{R}^1$ (прямая) с расстоянием:

$$\rho(x,x')=|x_1-x'_1|;$$

при $n=2$ имеем пространство $\mathbf{R}^2$ (плоскость) с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2};$$

при $n=3$ имеем пространство $\mathbf{R}^3$ с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+(x_3-x'_3)^2}.$$

Арифметическое n-мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называется *метрическим (евклидовым) пространством* $\mathbf{R}^n$.

Пусть (x_m), $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$, – последовательность точек метрического пространства $\mathbf{R}^n$. Говорят, что последовательность точек (x_m) *сходится* к точке a, $a = (a_1; a_2; ...; a_n)$ (имеет *предел* a), если $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x_m; a) = 0$:

$$\lim_{m \to \infty} x_m = a.$$

Для того чтобы последовательность точек (x_m), $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$, сходилась к пределу $a = (a_1; a_2; ...; a_n) \in \mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\lim_{m \to \infty} x_1^m = a_1, \ \lim_{m \to \infty} x_2^m = a_2, \ ..., \ \lim_{m \to \infty} x_n^m = a_n.$$

Для последовательностей пространства $\mathbf{R}^n$ имеют место аналогичные определения и свойства как и для последовательностей пространства $\mathbf{R}^1$.

Если последовательность точек (x_m) метрического пространства $\mathbf{R}^n$ сходится, то она является фундаментальной. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Метрическое пространство $\mathbf{R}^n$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

Множество точек $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbf{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n'^0)$ меньше положительного числа r, называется ε*-окрестностью* точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$:

$$U(\varepsilon, x_0) = \{ \ x \ | \ \rho(x, x_0) < \varepsilon \ \}.$$

Данное множество называется n-мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Проколотой ε*-окрестностью* точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ с радиусом ε называется множество точек $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$:

$$\dot{U}(\varepsilon, x_0) = \{ \ x \in \mathbf{R}^n \,|\, 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon \ \}.$$

Пусть G – некоторое множество пространства $\mathbf{R}^n$. Точка называется *внутренней точкой* множества G, если существует ее окрестность, целиком принадлежащая этому множеству. Множество G называется *открытым*, если все его точки внутренние. Любое открытое множество, содержащее точку $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, является ее окрестностью. Точка называется *граничной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Множество граничных точек называется *границей* множества G и обозначается ∂G. Граничная точка может, как принадлежать множеству G, так и не принадлежать ему. Точка называется *предельной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества G. Точка, не являющаяся предельной точкой множества G, называется *изолированной* точкой множества G. Множество G называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, которое получается, если присоединить к множеству G все его предельные точки, называется замыканием G и обозначается $\overline{G}$. Множество G называется *ограниченным*, если существует такой n-мерный шар, который содержит внутри себя все точки множества G. Множество G называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Множество

$$\Gamma = \left\{ \left(x_1; x_2; ...; x_n\right) \middle| \, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t); \alpha \le t \le \beta \right\},$$

называется *непрерывной кривой*, соединяющей точки $P_1\left(x_1(\alpha); x_2(\alpha); ...; x_n(\alpha)\right)$ и $P_2\left(x_1(\beta); x_2(\beta); ...; x_n(\beta)\right)$. Здесь $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, непрерывные функции на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Множество G называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой Γ, целиком принадлежащей этому множеству. Открытое связное множество называется *областью*, объединение области и ее границы называется *замкнутой областью*.

1.2 Функции многих переменных

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$. Если правило f каждой точке $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве G задана *числовая функция* (или *отображение*) *f от n переменных*:

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}.$$

Множество G называется *областью определения* и обозначается $D(f) = G$; множество $E = \{ u \in \mathbf{R} \mid u = f(x), x \in G \}$ – *множеством значений функции f*.

В частном случае при $n = 2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точек плоскости $\mathbf{R}^2$. Частное значение функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначается $f(x_0, y_0)$, $f(M_0)$, $f|_{(x_0, y_0)}$ и $f|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma = \{ (x; y; z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y) \},$$

которое есть некоторая поверхность в $\mathbf{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Функцию трех и более переменных изобразить графически затруднительно.

Функции многих переменных задаются:

– явно уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной:

$$z = f(x, y), \; u = f(x, y, z), \; u = f(x_1, x_2, ..., x_n);$$

– неявно уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной:

$$F(x; y) = 0), \; F(x; y; z) = 0, \; F(x_1; x_2; ...; x_n) = 0.$$

Множество точек $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $f(x_1,x_2,...,x_n)=c$, называется *множеством уровня* функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, соответствующим данному значению c.

При $n=2$ множество уровня называется *линией уровня*; при $n=3$ множество уровня называется *поверхностью уровня*; при $n>3$ множество уровня называется *гиперповерхностью уровня*.

1.3 Предел функции многих переменных, повторные пределы

Число A называется *пределом* (по Гейне) функции $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$, если для любой последовательности точек (x_m), $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, $m=\overline{1,\infty}$, $x_m\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $(f(x_m))$ значений функции сходится к A:

$$A=\lim_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall(x_m)_{m=1}^{\infty},\ x_m\in U(\varepsilon,x_0),\ \lim_{k\to\infty}x_k=x_0\quad \lim_{k\to\infty}f(x_m)=f(x_0).$$

Предел функции также обозначается:

$$A=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x_n^0}}f(x_1,x_2,...,x_n)\text{ и }A=\lim_{M\to M_0}f(M),$$

где $M(x_1,x_2,...,x_n)$, $M_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ точки пространства $\mathbf{R}^n$.

Аналогично функции одной переменной, определение предела по Гейне функции многих переменных на языке последовательностей эквивалентно определению предела по Коши.

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любой точки $x\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$:

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0):\forall x\in U(\varepsilon,x_0)\quad |f(x)-A|<\varepsilon .$$

Если функция двух переменных $f(x;y)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}(\varepsilon;(x_0,y_0))$ и число A является пределом при $(x,y)\to(x_0,y_0)$, то предел

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$$

называется *двойным пределом.*

Геометрически неравенство $|f(x;y)-A|<\varepsilon$ означает, что точки графика функции $f(x,y)$ для $(x;y)\in U(\delta,(x_0;y_0))$ находятся между двумя плоскостями $z=A-\varepsilon$ и $z=A+\varepsilon$, т. е. предел функции $f(x;y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$ определяется поведением функции вблизи точки $(x_0;y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций одной переменной (кроме тех, где существенна упорядоченность точек числовой прямой, например, односторонние пределы).

Бесконечные пределы для функций многих переменных $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной.

Например,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0):\forall x\in U(\varepsilon,x_0)\quad f(x)>\varepsilon .$$

П о в т о р н ы е   п р е д е л ы. Для функции $f(x,y)$ можно определить понятие предела по переменной x, полагая переменную y постоянной, и можно определить предел по y, полагая x постоянной.

Пусть функция $f(x,y)$ задана в окрестности точки (x_0,y_0) за исключением, быть может, самой точки (x_0,y_0). И пусть для каждого фиксированного y из этой окрестности при $x\to x_0$ для функции $z=f(x,y)$ одной переменной x существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{\text{фик}}}} f(x;y)=g(y)$, а при $y\to y_0$ для функции $g(y)$ существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=b$. Тогда говорят, что существует *повторный предел* b для функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0):

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=b.$$

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$.

Теорема 1 *Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и имеет в этой точке двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=b$. И пусть для любого фиксированного x из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x_{\text{фик}}}} f(x;y)=h(x)$ и для любого фиксированного y из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{\text{фик}}}} f(x;y)=g(y)$. Тогда повторные пределы $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$ существуют и равны:*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x;y).$$

1.4 Непрерывность функции многих переменных

Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in \mathbf{R}^n$, определенная в окрестности $U(\delta,x_0)$ точки $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

В противном случае точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

В частности, для функции $f(x,y)$ точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва, а для функции $f(x,y,z)$ точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства непрерывных функций одной переменной.

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$, определена на множестве $G\subset\mathbf{R}^n$. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве G, если в каждой точке этого множества она непрерывна:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad \forall\ x_0\in G.$$

Теорема 2 (непрерывность сложной функции) Пусть функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, $t=(t_1,t_2,...,t_m)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0=(t_1^0;t_2^0;...;t_m^0)\in\mathbf{R}^m$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0=(x_1(t_0);x_2(t_0);...;x_n(t_0))\in\mathbf{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t)=f(x_1(t);x_2(t);...;x_n(t))$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определения: а) n-мерного арифметического точечного пространства; б) расстояния в пространстве $\mathbf{R}^n$, в) n-мерного евклидова пространства.

2 Дайте определения окрестности и проколотой окрестности точки в пространстве $\mathbf{R}^n$.

3 Какая точка множества называется: а) внутренней; б) граничной; в) предельной; г) изолированной?

4 Может ли внутренняя точка не принадлежать множеству? Может ли точка одновременно быть внутренней и граничной для некоторого множества?

5 Какое множество называется а) открытым; б) замкнутым; в) компактом; г) связным; д) областью?

6 Что называется функцией в пространстве $\mathbf{R}^n$?

7 Что называется множеством уровня?

8 Сформулируйте определения предела функции $f(x,y)$ в точке по Гейне и по Коши.

9 Дайте для функции многих переменных определения бесконечных пределов:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

10 Сформулируйте определение повторного предела функции двух переменных.

11 Какая функция называется непрерывной в точке?

12 Какими свойствами обладают непрерывные функции?

13 Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции многих переменных.

Решение типовых примеров

1 Найти область определения функции:

а) $z = x^2 + y^2$, в) $z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2}$,

б) $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$. г) $z = \ln(5 - x^2 - y^2 - z^2)$.

Решение. а) область определения этой функции $D(f) = \mathbf{R}^2$, множество значений $E(f) = [0;+\infty)$. Графиком данной функции в пространстве $\mathbf{R}^3$ является круговой параболоид (рисунок 1. 1);

б) областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех точек плоскости $\mathbf{R}^2$, для которых определено выражение $\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, т. е.

$$4 - x^2 - 2y^2 \geq 0.$$

Множество таких точек лежит внутри и на эллипсе с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ (рисунок 1. 2):

$$D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\le 1\right\}.$$

Множество значений $E(f)=[0;2]$. Графиком этой функции является верхняя часть эллипсоида;

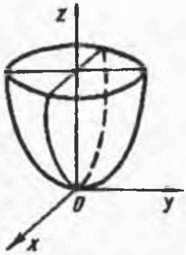

Рисунок 1. 1 – График функции $z=x^2+y^2$

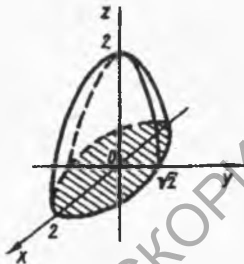

Рисунок 1. 2 – График функции $z=\sqrt{4-x^2-2y^2}$

в) функция определена, если $1-x_1^2-x_2^2-...-x_n^2\ge 0$ или $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\le 1$. Отсюда

$$D(f)=\left\{(x_1;x_2;...;x_n)\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\le 1\right\},$$

т. е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек замкнутого n-мерного шара радиусом $r=1$ с центром в начале координат. $\mathbf{R}$. Множество значений функции есть отрезок $[0;1]$:

$$E(f)=[0;1];$$

г) функция определена, если $5-x^2-y^2-z^2>0$ или $x^2-y^2-z^2<5$. Отсюда областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек открытого трехмерного шара радиусом $\sqrt{5}$:

$$D(f)=\left\{(x;y;z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2<5\right\}.$$

Множество значений функции есть $E(f)=(-\infty;\ln 5]$.

2 Используя определение предела а) по Гейне; б) по Коши доказать $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = 0$.

Решение. а) область определения данной функции $D(f) = \{ (x;y) \in \mathbf{R}^2 |\ x \neq y \}$. Возьмем произвольную последовательность точек $(M_k) = ((x_k; y_k))$, таких, что $x_k \neq y_k$, $x_k \to 0$, $y_k \to 0$. Тогда

$$f(M_k) = \frac{x_k^3 - y_k^3}{x_k - y_k} = x_k^2 + x_k y_k + y_k^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{k\to\infty} \left(x_k^2 + x_k y_k + x_k^2 \right) = 0;$$

б) выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$, такое, что для любой точки $M(x;y) \in U(\delta;(0;0))$ выполняется неравенство $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. Так как для любой точки $M(x;y) \in D(f)$ справедливо соотношение

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2,$$

то

$$|f(x,y) - 0| = |x^2 + xy + y^2| \le x^2 + y^2 + |xy|.$$

Оценим $|x \cdot y|$:

$$(|x| - |y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \le x^2 + y^2 \ge 0 \ \Rightarrow\ |x \cdot y| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Таким образом,

$$|f(x,y) - 0| \le \frac{3}{2}(x^2 + y^2) = \frac{3}{2}\rho^2(O,M) < \varepsilon.$$

Отсюда $\rho(O,M) < \sqrt{\dfrac{2}{3}\varepsilon}$, где $\rho(O;M)$ – расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, такое, что для любой точки $M(x;y) \in U(\delta,(0;0))$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x - y} - 0\right| < \varepsilon .$$

По определению предела функции по Коши заключаем, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = 0$$

3 Найти точки разрыва функций:

а) $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$; б) $z = \dfrac{1}{x - y}$; в) $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

Решение. а) функция $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$ определена на $\mathbf{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции;

б) функция $z = \dfrac{1}{x - y}$ определена для любых x, y, таких, что $x \neq y$. Следовательно, прямая $x = y$ является линией разрыва функции;

в) функция $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$. Следовательно, сфера с центром в начале координат и радиусом $R = 3$ является поверхностью разрыва функции.

Задания для аудиторной работы

1 Являются ли окрестностями точки $A(1;1)$ множества:

а) $\{(x;y) \mid 0<x<1,\ 0<y\le 1\}$;

б) $\{(x;y) \mid x^2+y^2\le 1\}$;

в) $\{(x;y) \mid 0<x<2,\ -1<y<2\}$;

г) $\{(x;y) \mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$?

2 Найти внутренние, граничные и предельные точки множеств:

а) $\{(x;y) \mid |x|<1,\ |y|\le 1\}$;

б) $\{(x;y;z) \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z<2\}$;

в) $\{(x;y;z) \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$;

г) $\{(x;y) \mid x+y<0\}$.

Какие из множеств являются открытыми, замкнутыми, связными, компактами?

3 Найти предел последовательности (x_n) в $\mathbf{R}^2$, где

$$x_n=\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right);\frac{1}{n}\sin n\right).$$

4 Найти области определения следующих функций:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$;

б) $z=y\sqrt{\cos x}$;

в) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$;

г) $z=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$;

д) $z=\sqrt{9-\left(x^2+y\right)^2}$;

е) $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$;

ж) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-25}$;

и) $z=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin y}$.

5 Найти для функции $f(x;y)=\dfrac{2x-3y}{3x-2y}$ значения $f(2;1)$, $f(1;2)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

6 Выяснить, имеет ли предел при $x \to 0$, $y \to 0$ функция

$$f(x;y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}?$$

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}} \dfrac{(x-2)^2-(y+3)^2}{(x-2)^2+(y+3)^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}$.

8 Показать, что для функции

$$f(x;y)=(2x+3y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

не существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y)$, но существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)=0$.

9 Показать, что для функции

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^2-x+2y}{x+y}$$

существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y)$, а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует.

10 Имеет ли предел при $x\to\infty$, $y\to\infty$ функция

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}?$$

11 Найти точки разрыва следующих функций:

а) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$; г) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{\sin xyz}$;

б) $f(x;y)=\ln\left|1-(x+1)^2-(y-2)^2\right|$; д) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$;

в) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2-2x+3y}{x+y}$; е) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2-y^2+z^2}$.

Задания для домашней работы

1 Являются ли окрестностями точки $A(-1;-1)$ множества:

а) $\{(x;y)\mid -1<x<2,\ -1<y\le 1\}$;

б) $\{(x;y)\mid x^2+y^2\le 1\}$;

в) $\{(x;y)\mid -2<x<1,\ -3<y<0\}$?

2 Найти внутренние, граничные и предельные точки множеств:

а) $\{(x;y)\mid |x+y|<1\}$;

б) $\{(x;y;z)\mid x^2+y^2\le z\le 4\}$;

в) $\left\{(x;y;z)\ \Big|\ 1\le\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}<4\right\}$;

г) $\{(x;y)\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(1;0)\}$.

Какие из множеств являются открытыми, замкнутыми, связными, компактами?

3 Найти предел последовательности (x_n) в $\mathbf{R}^3$, где

$$x_n=\left(\frac{(-1)^n}{n};\frac{n^2-3n+5}{2n^2+5};\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\right).$$

4 Найти области определения функций:

а) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$;

б) $z=\ln(-x-y)$;

в) $z=\arccos\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$;

г) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{z^2+y^2}}{x}$;

д) $z=\dfrac{2x+3y-4}{x+4y}$;

е) $z=y\sqrt{\sin x}$;

ж) $u=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$;

и) $z=\dfrac{1}{\cos x\sin y}$.

5 Найти $f(-3;4)$, $f\left(1;\dfrac{x}{y}\right)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$, где

$$f(x;y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x^3-y}{x^2+y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+4y^2}}{(x-1)^2+y^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$.

7 Показать, что для функции $f(x;y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ существуют оба повторных предела $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x;y)$ а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x;y)$ не существует.

8 Показать, что для функции $f(x;y)=(x-y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ не существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x;y)$, а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x;y)$ существует.

9 Имеет ли предел функция $f(x;y)=\sin\ln(x^4+y^2)$ при $x\to 0$, $y\to 0$?

10 Найти точки разрыва функций:

а) $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$;

б) $f(x;y)=\ln(1-x^2-y^2)$;

в) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$;

г) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$;

д) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$;

е) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x+y)(y^2-x)}$.

2.1 Частные и полные приращения функции многих переменных

2.2 Частные производные

2.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных

2.4 Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл

2.1 Частные и полные приращения функции многих переменных

Пусть функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в окрестности точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0 оставим без изменения.

Частным приращением функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2} f(x_0)$, $\Delta_{x_3} f(x_0)$, ..., $\Delta_{x_n} f(x_0)$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Полным приращением в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Геометрически для функции $f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$ частные и полное приращения

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рисунок 2. 1).

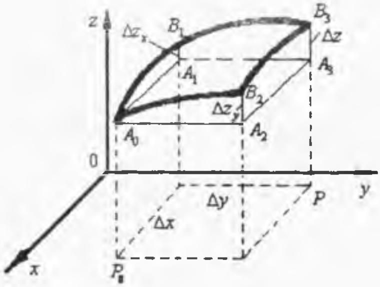

Рисунок 2. 1 – Геометрический смысл частных и полного приращений функции $f(x, y)$

2.2 Частные производные

Частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1} f\ (x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Для записи частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ используется также обозначение $f_{x_1}\Big|_{x = x_0}$.

Аналогично определяются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

2.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных

Геометрический смысл частных производных. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, графиком которой является поверхность Ω. Точке $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$ на поверхности Ω соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y = y_0$. В сечении получается кривая $z = f(x; y_0)$ (на рисунке 2.2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x; y_0)$ в плоскости $y = y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ (рисунок 2. 2).

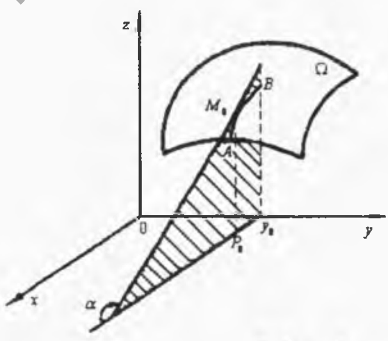

Рисунок 2. 2 – Геометрический смысл $\dfrac{\partial z(x; y)}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0; y_0)$

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z = f(x, y)$ по y.

<u>Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</u> Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ является некоторая поверхность Ω (рисунок 2. 3). Выберем на ней точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

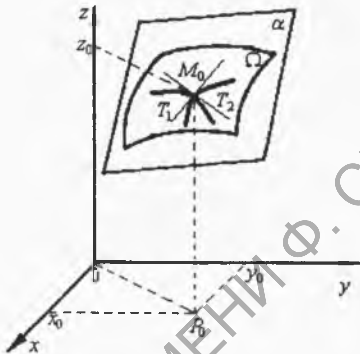

Рисунок 2. 3 – Касательная плоскость α к поверхности Ω

Касательной плоскостью к поверхности Ω в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости α к поверхности, проходящей через касательные T_1 и T_2 имеет вид

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

Нормалью к поверхности Ω в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде:

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Точка, в которой $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется *особой точкой поверхности*. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в данной точке $P_0(x_0; y_0)$, причем $f'_x(x_0, y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y = y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0, y_0)$ – в направлении прямой $x = x_0$ (относительно переменной y).

2.4 Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл

Пусть функция $f(x, y)$ определена в окрестности $U(\delta; P_0)$ точки $P_0(x_0; y_0)$. Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P_0(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f\Big|_{(x_0, y_0)} = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (2.1)$$

где A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Соотношение (2.1) называется *условием дифференцируемости* функции $f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Условие дифференцируемости записывается также в виде:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \qquad (2.2)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0; y_0)$ и $P(x; y)$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

Функция $f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется *дифференцируемой на* G.

В равенствах (2.1) и (2.2) слагаемое $A\Delta x + B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется *главной частью приращения функции.*

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности) Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)=A$, $f'_y(x_0,y_0)=B$.

Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны: из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x;y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми.*

Если функция $f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f\big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y . \qquad (2.3)$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции и называется *полным дифференциалом* функции:

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются *дифференциалами независимых переменных* x и y *и обозначаются* соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$ называются *частными дифференциалами* функции $f(x; y)$ и обозначаются $d_x f$ и $d_y f$.

Таким образом,

$$df = d_x f + d_y f .$$

Отбрасывая в формуле (2.2) слагаемое $o(\rho)$, т. е. заменяя приращение функции ее дифференциалом, получается равенство

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y, \quad (2.4)$$

которое используется для вычисления приближенного значения $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ при малых Δx и Δy.

Геометрический смысл дифференциала. Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0, y_0)$.

Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n .$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных?

2 Дайте определение частных производных.

3 В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных?

4 Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

5 Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.

6 Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции?

7 Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости функции в точке.

8 Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

9 Что называется полным дифференциалом функции многих переменных? В чем состоит его геометрический смысл?

Решение типовых примеров

1 Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Р е ш е н и е . Имеем

$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x$,

$\Delta_x z\big|_{(1,2)} = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$.

Аналогично

$$\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = x_0 (y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2,$$

$$\Delta_y z\Big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}84.$$

Тогда

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324.$$

2 Найти частные производные функций

а) $z = x^2 + \sin(x + y^2)$;

б) $u = xy + \ln(x - y - z)$;

в) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Решение. а) частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos(x + y^2).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x + y^2);$$

б) частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x - y - z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x - y - z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x - y - z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x - y - z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x - y - z};$$

в) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-t) = y - t\sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt) = \sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-x) = -x\sin 2(z - xt).$$

3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -2, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 3) = 0 \text{ или } 2x + 2y + z - 7 = 0,$$

канонические уравнения нормали –

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{-1} \text{ или } \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 3}{1}.$$

4 Доказать, что функция $z = xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy.

Решение. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x;y) \in \mathbf{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - xy^2 =$$

$$= y^2\Delta x + 2xy\Delta y + \left(2xy\Delta y + \Delta y^2\right)\Delta x + x(\Delta y)^2.$$

Положив $y^2 = A$, $2xy = B$, $2xy\Delta y + \Delta y^2 = \alpha$, $x\Delta y = \beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0;y_0)$ являются постоянными, а $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

5 Доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ не имеет частных производных.

Решение. Действительно,

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)+0-0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Функция $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $f_x'(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f_y'(0,0)$.

6 Найти полный дифференциал функции

$$f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда полный дифференциал равен

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=$$

$$=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy+\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}dz=$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)dz-z(xdx+ydy)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

7 Приближенно вычислить $\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}$.

Решение. Пусть $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Тогда искомое число будем рассматривать как значение функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$.

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то по формуле (2.4) получим:

$$\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}\approx$$

$$\approx\sqrt{4^2+3^2}+\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0,05+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0,07\approx 5+0,08=5,08.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти частные производные функций:

а) $z=x^2+y^3-3x^2y+4x+5y-7$; г) $z=y\sin(3x-4y)$;

б) $z=3^{x^2y^4}$; д) $z=\dfrac{3x-y^5}{x^2+4y^3}$;

в) $z=\arccos\dfrac{x}{y}$; е) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{1-xy}{x-y}$.

2 Вычислить значения частных производных в точке:

а) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$, $M_0(3,2)$; б) $u=\dfrac{y-z}{z-x}$, $M_0(2,1,3)$.

3 Найти полный дифференциал функций:

а) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{1+x^2}$; б) $z=e^{\frac{x}{y}}$.

4 Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при переходе от точки $M_0(1;1)$ к точке $M(1,1;0,8)$.

5 Показать, что функция $z=y\sin\left(ye^{-x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

6. Вычислить приближенно значение выражения:

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1,02}{0,95}$; б) $1,98^{2,02}$.

7 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=1+x^2=y^2$ в точке $M(1,1,3)$.

Задания для домашней работы

1 Найти частные производные функций:

а) $z=4x^2-2y^3-3xy^3-3xy+5y+8$; г) $z=x^2\cos(x+6y)$;

б) $z=5^{x^2y+xy^4}$; д) $z=\dfrac{4x^3+3y^5}{2x^2-5y^6}$;

в) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$; е) $z=\sqrt{y}\,e^{-2x}$.

2 Вычислить значения частных производных в точке:

а) $z=\dfrac{xy}{x+y}$, $M_0(4,-5)$;

б) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,-2,2)$.

3 Найти полный дифференциал функций:

а) $u=z^{y^x}$; б) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

4 Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z=x^2-xy+y^2$ при переходе от точки $M_0(2;1)$ к точке $M(2,1;0,9)$.

5 Показать, что функция $u=\ln\left(e^x+e^y+e^z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1.$$

6 Вычислить приближенно значение выражения:

а) $\sqrt{(1,03)^2+(2,98)^2}$; б) $\ln\left(0,09^3+0,99^3\right)$.

7 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M(1,0,0)$.

Практическое занятие 3 **Дифференцирование сложной и неявной функции**

3.1 Дифференцирование сложной функции
3.2 Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением
3.3 Дифференцирование неявной функции, заданной системой уравнений

3.1 Дифференцирование сложной функции

Пусть $f(x,y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u и v,

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v).$$

Тогда функция $f(x(u,v), y(u,v))$ является *сложной* функцией двух независимых переменных u и v. Переменные x и y называются *промежуточными переменными.*

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y), а функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u,v), то сложная функция $f(x(u,v), y(u,v))$ дифференцируема в точке (u,v) и ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3.1)$$

Для функции $f(x,y,z)$ трех переменных, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных u, v, w:

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

частные производные сложной функции $f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Аналогично для функции n переменных, $n>3$.

Для функции $f(x,y,z)$, где $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ функции независимой переменной t, сложная функция $f(x(t),y(t),z(t))$ является функцией одной переменной t. Производная

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{3.2}$$

сложной функции $f(x(t),y(t),z(t))$ называется *полной производной.*

3.2 Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением

Рассмотрим уравнение

$$F(x,y,z)=0 .$$

Теорема 2 Пусть функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\exists\,(x_0;y_0;z_0):F(x_0,y_0,z_0)=0$;

2) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$;

3) $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ и $F'_z(x,y,z)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0;z_0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) существует единственная непрерывная функция $z=f(x,y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x,y,z)=0$ и такая, что $f(x_0,y_0)=z_0$.

Если функция $F(x,y,z)$ в условиях теоремы 2 дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то функция $z = f(x, y)$ также дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \qquad (3.3)$$

Если уравнение поверхности Ω задано неявной функцией $F(x, y, z) = 0$, то уравнение *касательной* плоскости α к поверхности имеет вид

$$F'_x\big|_{(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) + F'_y\big|_{(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0) + F'_z\big|_{(x_0, y_0, z_0)}(z - z_0) = 0 \qquad (3.4)$$

и каноническое уравнение *нормали*:

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (3.5)$$

3.3 Дифференцирование неявной функции, заданной системой уравнений

Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; \ldots x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; \ldots x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1; x_2; \ldots x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) = 0. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, ..., y_m есть

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n), \\ y_2 = f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m = f_m(x_1; x_2; \ldots; x_n), \end{cases} \qquad (3.7)$$

и называется *совокупностью неявных функций*, определяемых системой уравнений (3.6).

Определитель

$$J=\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \qquad (3.8)$$

составленный из частных производных, называется *якобианом (определителем Якоби)* функций F_1, F_2, ..., F_m по переменным y_1, y_2, ..., y_m.

Теорема 3 Пусть

1) функции F_1, F_2, ..., F_m дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_1^0;y_2^0;...;y_m^0\right)$,

2) частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i,j=1,2,...,m$ непрерывны в P_0,

3) $F_1(P_0)=0$, $F_2(P_0)=0$, ..., $F_m(P_0)=0$, $\left.\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}\right|_{P_0}\neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки система уравнений (3.6) определяет единственную совокупность дифференцируемых неявных функций вида (3.7).

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+...+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+...+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0, \end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 3, якобиан отличен от нуля).

Пусть функции из системы (3.7) определены и дифференцируемы в некоторой области $G \subset \mathbf{R}^n$, $m \leq n$. Функция $y_k = f_k(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется *зависимой* в области G от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1; y_2; ... y_{k-1}; y_{k+1}; ...; y_m), \tag{3.9}$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Если ни одна из функций (3.7) не зависит от остальных, то функции (3.7) называются *независимыми* в G.

Теорема 4 (достаточное условие независимости) Пусть

1) функции (3.7) дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$;

2) якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в этой точке.

Тогда функции (3.7) независимы в некоторой окрестности точки $(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Следствие Если функции (3.7) зависимы в некоторой окрестности точки $(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, *то все якобианы* $\dfrac{D(y_1; y_2; ...; y_m)}{D(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n})}$ *равны нулю в этой окрестности.*

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

2 Какая функция называется неявной? Приведите примеры неявных функций.

3 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x; y; z) = 0$.

4 Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x, y, z) = 0$.

5 Что называется совокупностью неявных функций, определяемых системой уравнений?

6 Что называется якобианом?

7 Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

8 Какие функции называются зависимыми и независимыми?

9 Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

Решение типовых примеров

1 Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(x,y)=x\cdot\ln y$, где $x=3u-v$; $y=u^2+v^2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=3,\ \frac{\partial y}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial x}{\partial v}=-1,\ \frac{\partial y}{\partial v}=2v,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\ln y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y}.$$

По формулам (3.1) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=3\ln y+2x\frac{x}{y}=3\ln\left(u^2+v^2\right)+2u\frac{3u-v}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=-\ln y+2v\frac{x}{y}=-\ln\left(u^2+v^2\right)+2y\frac{3u-v}{u^2+v^2}.$$

2 Найти полную производную сложной функции $f(x,y,z)=x\sin y\cos z$, где $y=\ln\left(x^2+1\right)$; $z=-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin y\cos z,\ \frac{\partial f}{\partial y}=x\cos y\cos z,\ \frac{\partial f}{\partial z}=-x\sin y\sin z,$$

$$\frac{dx}{dx}=1,\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+1},\ \frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

по формуле (3.2) получим:

$$\frac{df}{dx}=\sin y\cos z+x\cos y\cos z\cdot\frac{2x}{x^2+1}-x\sin y\sin z\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\sin\ln\left(x^2+1\right)\left(\cos\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2\sin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\frac{2x^2\cos\ln\left(x^2+1\right)\cos\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}.$$

3 Доказать, что уравнение $y^3+2xy+x^4-4=0$ задает неявную функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую условию $f(1)=1$.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y)$. Проверим выполнение условий теоремы 2:

– $F(1,1)=0$;

– $F'_y(1,1)=\left(3y^2+2x\right)\Big|_{(1;1)}=5\neq 0$;

– частные производные $F'_x=2y+4x^3$ и $F'_y=3y^2+2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $(1,1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y=f(x)$, являющаяся решением уравнения $y^3+2xy+x^4-4=0$ и удовлетворяющая условию $f(1)=1$.

4 Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Решение. Обозначим через $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$. Имеем:

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\ F'_y=\frac{2y}{b^2}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

5 Найти частные производные неявной функции $z=f(x,y)$, заданной уравнением $e^{-xy}-2z+e^z=0$.

Решение. Обозначим $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z$. Частные производные этой функции равны:

$$F'_x=-ye^{-xy},\ F'_y=-xe^{-xy},\ F'_z=-2+e^z.$$

По формулам (3.3) получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

6 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0(0,1,1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x,y,z)=2x$, $\quad F'_x(0,1,1)=0$,

$F'_y(x,y,z)=4y$, $\quad F'_y(0,1,1)=4$,

$F'_z(x,y,z)=6z$, $\quad F'_z(0,1,1)=6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1)+6(z-1)=0$ или

$$2y+3z-5=0.$$

Уравнение нормали $\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6}$ или

$$\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

7 Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

Решение. Для данной системы имеем

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=u+v-x, \\ F_1(x,y,u,v)=u-yv. \end{cases}$$

Якобиан системы имеет вид

$$J=\frac{D(F_1;F_2)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -y\end{vmatrix}=-y-1,$$

при этом $J\neq 0$ при $y\neq -1$.

Дифференцированием равенств (3.10) находим два уравнения, связывающих дифференциалы четырех переменных:

$$\begin{cases} du+dv=dx,\\ u-ydv-vdy=0.\end{cases}$$

Решая эту систему относительно du, dv при $y\neq -1$, получим

$$du=\frac{ydx+vdy}{1+y},$$

$$dv=\frac{dx-vdy}{1+y}.$$

Дифференцируя повторно, имеем:

$$d^2u=\frac{(dydx+dvdy)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{\left(dydx+\frac{dx-vdy}{1+y}dy\right)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{(1+y)dxdy+dxdy-vdy^2-ydxdy-vdy^2}{(1+y)^2}=\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2},$$

$$d^2v=\frac{-dvdy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{dx-vdy}{1+y}dy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=\frac{-dxdy+vdy^2-dxdy+vdy^2}{(1+y)^2}=$$

$$=-\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2}=-d^2u.$$

8 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = cv. \qquad (3.11)$$

Решение. Имеем

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u;v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0$$

при $u \neq 0$.

Дифференцированием равенств (3.11) находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx = \cos v\, du - u\sin v\, dv,$$

$$dy = \sin v\, du + u\cos v\, dv,$$

$$dz = c\, dv.$$

Из первых двух уравнений находим dv:

$$dv = \frac{\cos v\, dy - \sin v\, dx}{u}.$$

Подставим в третье уравнение, получим

$$dz = \frac{c}{u}(\cos v\, dy - \sin v\, dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\sin v}{u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}.$$

9 Доказать, что функции $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Решение. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J = \frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

В точке $(0,0)$ якобиан равен нулю $\left.\frac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(0,0)}=0$. Для любой точки (x_1,x_2), где $x_1\neq x_2$, из окрестности точки $(0,0)$ якобиан отличен от нуля $\left.\frac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(x_1,x_2)}\neq 0$. Согласно теореме 3.4, функции y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $(0,0)$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти $\frac{dz}{dt}$, если

а) $z=e^{x^2+y^2}$, где $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

б) $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$, если $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$, где $y=e^x$.

3 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

4 Дана дифференцируемая функция $z=f(x;y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Выражение $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ представить в полярных координатах.

5 Найти dz, если $z=u^2v-v^2u$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

6 Найти производные неявной функции в точке:

а) $x^2+y^2-2xy+4x-6y-3=0$, $M(-1;1)$;

б) $2\left(x^2+y^2\right)^2=25\left(x^2-y^2\right)$, $M(3;1)$.

7 Записать уравнение касательной и нормали в точке:

а) $xy-4x+6y-14=0$, $M(-1;2)$;

б) $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$, $M(1;0)$.

8 Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases} 7x^2 + y^2 - 3z^2 + 1 = 0, \\ 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2z}{dx^2}$ в точке $M(1;-2;2)$.

9 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = u + v, \; y = u - v, \; z = u^2v^2.$$

10 Найти dz, если $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$.

Задания для домашней работы

1 Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если

а) $z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{u}{v}$, где $v = \mathrm{ctg}^2 x$, $u = \mathrm{tg}^2 x$;

б) $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$.

2 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{dz}{dx}$, если $z = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = 4x + 1$.

3 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

а) $z = u^2 + v^2$, где $u = x + y$, $v = x - y$;

б) $z = u^2 \ln v$, где $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

4 Дана дифференцируемая функция $z = f(x;y)$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Выражение $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ представить в полярных координатах.

5 Найти dz, если $z=\dfrac{u}{v}$, где $u=x^2+y$, $v=xy$.

6 Найти производные неявной функции в точке:

а) $x^2+y^2-xy-1=0$, $M(1;1)$;

б) $x^3+y^3-x^2-y^2=0$, $M(2;1)$.

7 Записать уравнение касательной и нормали в точке:

а) $x^2-y^2+2x-4y-6=0$, $M(1;-1)$;

б) $e^y-x+y+3=0$, $M(4;0)$.

8 Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 3z^2=0, \\ x^2+2y^2+3z^2-1=0. \end{cases}$$

Найти dy, dz, d^2y, d^2z.

9 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=a\cos u\,\mathrm{ch}\,v,\quad y=b\sin u\,\mathrm{ch}\,v,\quad z=c\,\mathrm{sh}\,v.$$

10 Найти dz, если $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$.

Практическое занятие 4 **Частные производные и дифференциалы высших порядков**

4.1 Частные производные высших порядков
4.2 Дифференциалы высших порядков
4.3 Формула Тейлора для функции двух переменных

4.1 Частные производные высших порядков

Пусть функция $f(x,y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ в точке $(x;y)\in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f_x'(x,y)$ и $f_y'(x,y)$ называются *частными производными первого порядка*. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f(x,y)$ в точке $(x;y)$ и обозначаются:

$f_{xx}''(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$f_{xy}''(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$f_{yx}''(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$f_{yy}''(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Если производные второго порядка являются непрерывными функциями, то их можно дифференцировать по переменным x и y. Получим частные производные третьего порядка и т. д. Частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется *частной производной n-го порядка* и обозначается $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$, … называются *смешанными производными*.

Теорема 1 Если функция $f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $(x_0;y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Теорема 1 имеет место и для функции любого числа переменных.

4.2 Дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Выражение вида:

$$df=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy,$$

называется *дифференциалом первого порядка* функции $f(x,y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $(x;y)\in D(f)$, если он существует, называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается:

$$d^2 f=d(df).$$

Аналитическое выражение для $d^2 z$ имеет вид:

$$d^2 f=f''_{xx}(x,y)dx^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{yy}(x,y)dy^2. \qquad (4.1)$$

Аналогично для *дифференциала третьего порядка* $d^3 f$:

$$d^3 f=d\left(d^2 f\right)=$$

$$=f'''_{xxx}(x,y)dx^3+3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy+3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2+3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Функция f называется k *раз непрерывно дифференцируемой* в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Аналитическое выражение для дифференциала n-го порядка кратко записывается в виде символической формулы:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z, \qquad (4.2)$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

Если $f(x,y)$ дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

4.3 Формула Тейлора для функции двух переменных

Теорема 2 (Тейлора) Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ непрерывна со всеми частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой δ-окрестности точки $(x_0;y_0) \in D(f)$. Тогда справедлива формула Тейлора::

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0,y_0) + R_n,$$

где $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi,\eta)$, $x_0 < \xi < x$; $y_0 < \eta < y$.

Следствие. При условиях теоремы 2 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n),$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = y_0 = 0$, то имеет место *формула Маклорена*:

$$f(x,y)=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(0,0)+R_n.$$

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

Вопросы для самоконтроля

1 Как находятся частные производные высших порядков?

2 Что называется смешанной производной?

3 Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.

4 Сформулируйте теорему Тейлора.

5 Какой вид имеет формула Маклорена?

Решение типовых примеров

1 Найти частные производные второго порядка функции

$$f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\mathbf{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\cos\left(x^2+y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\mathbf{R}^2$. Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Видно, что $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4^2 x \sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2 \sin\left(x^2 + y^2\right).$$

2 Найти частные производные второго порядка функции

$$u = xyz - e^{x+y}.$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\mathbf{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z - e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3 Найти dz и $d^2 z$, если $z = \ln(x - y) + \sqrt{xy}$.

Решение. Так как

$$z'_x = \frac{1}{x-y} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$z'_y = \frac{-1}{x-y} + \frac{x}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y},$$

то

$$dz = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{x-y}\right)dx + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}} - \frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда по формуле (4.1) дифференциал второго порядка равен:

$$d^2z = \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2 + 2\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy -$$

$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

4 Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y) = 2^{xy}$.

Решение. Для любой точки $P(x,y) \in U(\varepsilon; P_0)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2!}d^2f(P_0) + o(\rho^2).$$

С учетом $dx = x-1$, $dy = y-1$ имеем:

$f(P_0) = 2$,

$$df(P_0) = f'_x(P_0)dx + f'_y(P_0)dy =$$

$$= \left(y \cdot 2^{xy}\ln 2 \cdot (x-1) + x \cdot 2^{xy}\ln 2 \cdot (y-1)\right)\Big|_{P_0} =$$

$$= 2\ln 2 \cdot (x-1) + 2\ln 2 \cdot (y-1),$$

$$d^2f(P_0) = f''_{xx}(P_0)dx^2 + 2f''_{xy}(P_0)dxdy + f''_{yy}(P_0)dy^2 =$$

$$= \left(y^2 \cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2 + 2\left(2^{xy}\ln 2 + xy \cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right) +$$

$$+ x^2 \cdot 2^{xy}\ln 2 \cdot (y-2)^2\Big)\Big|_{P_0} =$$

$$= 2\ln^2 2 \cdot (x-1)^2 + 2\left(\ln 2 + 2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1) + 2\ln 2 \cdot (y-1)^2.$$

Следовательно,

$$2^{xy} = 2 + 2\ln 2 \cdot (x-1) + 2\ln 2 \cdot (y-1) + \ln^2 2 \cdot (x-1)^2 +$$

$$+ (1 - 2\ln 2)\ln 2 \cdot (x-1)(y-1) + \ln 2 \cdot (y-1)^2 + o(\rho^2),$$

где $\rho^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = xy + \frac{x}{y}$;

б) $z = y^x$;

в) $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$;

г) $z = xe^{-xy}$;

д) $z = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

е) $u = \ln(x + y + z)$.

2 Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ в точке $M(3;2)$.

3 Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = \cos\frac{y}{x}\arccos\frac{x}{y}$.

4 Найти дифференциал второго порядка функции:

а) $z = x^3y^3$;

б) $z = e^{xy}$.

5 Найти дифференциал третьего порядка функций:

а) $z = x^4 - y^4 + x^2y^2$;

б) $z = \sin(x + \cos y)$.

6 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;-1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4.$$

7 Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

8 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Задания для домашней работы

1 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$;

в) $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

б) $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$;   г) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

2 Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^3y^2 - xy + 4x - 2y - 5$ в точке $M(1;-1)$.

3 Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x\sin(2x + 3y)$.

4 Найти дифференциал второго порядка от функций:

а) $z = \dfrac{x}{x + y}$;   б) $z = \ln xy$.

5 Найти дифференциал третьего порядка функций:

а) $z = x^3y - xy^3$;   б) $z = \cos(2x + e^y)$.

6 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy.$$

7 Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y) = e^y \cos x$.

8 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

Практическое занятие 5 Экстремум функции многих переменных

5.1 Определение и необходимые условия экстремума
5.2 Некоторые сведения о квадратичных формах
5.3 Достаточные условия экстремума

5.1 Определение и необходимые условия экстремума

Пусть дана функция $f(x_1;x_2;...;x_n)=f(P)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

Точка $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $f(P)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1;x_2;...;x_n)\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0)>f(P)$$
$$(f(P_0)<f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют *локальным максимумом (минимумом)* функции и обозначается:

$$\max_{P\in U(\delta;P_0)} f(P)=f(P_0)$$
$$(\min_{P\in U(\delta,P_0)} f(P)=f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума* функции, а максимумы и минимумы функции – *экстремумами функции.*

Очевидно, что если функция $f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ локальный экстремум, то в случае локального максимума

$$\Delta f=f(P)-f(P_0)<0 \quad \forall \quad P(x_1;x_2;...;x_n)\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0),$$

а в случае локального минимума –

$$\Delta f=f(P)-f(P_0)>0 \quad \forall \quad P(x_1;x_2;...;x_n)\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0).$$

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума) Если в точке P_0 дифференцируемая функция $f(P)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n} = 0, \qquad (5.1)$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Следствие. Если функция $f(P)$ имеет в точке P_0 локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке $du(P_0)$ равен нулю или не существует.

Точки, в которых выполняется условие (5.1), называются *стационарными.* Точки, в которых дифференциал функции равен нулю или не существует, называются *точками возможного экстремума* или *критическими.*

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$.

5.2 Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция вида

$$Q(x_1; x_2; \ldots; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + $$
$$+ a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

называется *квадратичной формой* от переменных x_1, x_2, …, x_n, числа a_{ij}, $i, j = 1,2,\ldots,n$, называются *коэффициентами квадратичной формы*, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы.*

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется *симметричной*.

Главными минорами матрицы A называются определители:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется:

– *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных x_1, x_2, ..., x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения;

– *знакоопределенной*, если она является положительно определенной или отрицательно определенной;

– *квазизнакоопределенной*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$;

– *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 2 (критерий Сильвестра) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ldots.$$

5.3 Достаточные условия экстремума

Для функции $f(x_1;x_2;...;x_n)$ второй дифференциал представляет собой квадратичную форму

$$d^2 f=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}dx_k dx_m$$

от переменных dx_1, dx_2, ..., dx_n с коэффициентами $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, ..., $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума) Пусть функция $f(x_1;x_2;...;x_n)=f(P)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке P_0, причем P_0 – стационарная точка. Тогда

1) если второй дифференциал $d^2 f\big|_{P_0}$ является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных dx_1, dx_2, ..., dx_n, то функция $f(P)$ имеет в точке P_0 локальный минимум (максимум);

2) если $d^2 f\big|_{P_0}$ является знакопеременной квадратичной формой, то функция $f(P)$ в точке P_0 экстремума не имеет.

В случае $df\big|_{P_0}=0$, а $d^2 f\big|_{P_0}$ является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция $f(P)$ может иметь в точке P_0 локальный экстремум, а может и не иметь.

В частности, для функции двух переменных $f(x;y)$ имеем теорему 4.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных) Пусть $P_0(x_0;y_0)$ стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности $U(\delta;P_0)$ функции

$f(x;y)$. *И пусть*

$$\Delta(P_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2. \qquad (5.2)$$

Тогда точка $P_0(x_0;y_0)$ *является:*

1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$;

2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$;

3) если $\Delta(P_0)<0$, *то в стационарной точке* P_0 *локального экстремума нет,*

4) $\Delta(P_0)=0$, *то локальный экстремум в стационарной точке* P_0 *может быть, а может и не быть.*

В случае $\Delta(P_0)=0$ необходимо провести дополнительные исследования знака функции $f(x,y)$ в $U(\delta;P_0)$.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение локального экстремума функции многих переменных.

2 Сформулируйте необходимые условия локального экстремума.

3 Какие точки называются стационарными и критическими?

4 Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?

5 Какая квадратичная форма называется:

а) положительно определенной;

б) отрицательно определенной;

в) знакоопределенной;

г) квазизнакоопределенной;

д) знакопеременной?

6 Сформулируйте критерий Сильвестра.

7 Сформулируйте достаточные условия экстремума в точке:

а) функции многих переменных; б) двух переменных.

Решение типовых примеров

1 Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 2\right), \; z'_y = 2ye^{\frac{x}{2}}.$$

Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 0, \\ z'_y &= 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y^2 + 2 &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = -2$, $y_0 = 0$.

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2;0)$, в которой функция z может достигать экстремума.

Вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 4\right)\Big|_{(-2;1)} = \frac{1}{2e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = ye^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2,1)} = \frac{2}{e}.$$

Так как определитель

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} > 0$$

и $A > 0$, то согласно теореме 4 точка $P_0(-2;0)$ является точкой локального минимума: $z_{\min} = z(-2,0) = -\frac{2}{e}$.

2 Исследовать на экстремум функцию $z = e^{-x}\left(x + y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = e^{-x}\left(1 - x - y^2\right),\ z'_y = 2ye^{-x}.$$

Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 - x - y^2 = 0, \\ y = 0. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

Частные производные второго порядка функции z в точке P_0 равны:

$$A = z''_{xx}(P_0) = e^{-x}\left(x + y^2 - 2\right)\Big|_{(1,0)} = -\frac{1}{e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(1;0)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{-x}\Big|_{(1;0)} = \frac{2}{e}.$$

Так как $\Delta(P_0) = AC - B^2 = -\frac{2}{e^2} < 0$, то по теореме 4 в точке $P_0(1;0)$ локального экстремума нет.

3 Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка функции z:

$$z'_x = 4x^3,\ z'_y = 4y^3.$$

Решая систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x^3 = 0, \\ 4y^3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

Так как

$$A = z''_{xx}(P_0) = 0,\ B = z''_{xy}(P_0) = 0,\ C = z''_{yy}(P_0) = 0,$$

то $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 0$. Следовательно, по теореме 4 нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

Поскольку $\forall P(x,y)\in \dot{U}(\delta;P_0)$ имеет место

$$\Delta z(P)=z(x+\Delta x,y+\Delta y)-z(x,y)=$$
$$=(x+\Delta x)^4+(y+\Delta y)^4-(x^4+y^4)>0,$$

то точка возможного экстремума $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума. При этом $z_{\min}=z(0,0)=0$.

4 Найдите точки локального экстремума функции

$$u=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2.$$

Решение. Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные

$$u'_x=4x-y+2z,\ u'_y=-x-1+3y^2,\ u'_z=2x+2z.$$

Приравнивая их нулю и решая систему трех уравнений, получаем две точки возможного экстремума

$$M_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).$$

Вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$u''_{xx}=4,\ u''_{yy}=6y,\ u''_{zz}=2,\ u''_{xy}=-1,\ u''_{xz}=2,\ u''_{yz}=0.$$

Выражение для дифференциала второго порядка

$$d^2u=4dx^2+6ydy^2+2dz^2-2dxdy+2dxdz$$

есть квадратичная форма от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1=4>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=15>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=14>0.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz.

Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = 4 > 0$, то $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -\frac{1}{27}$.

Матрица квадратичной формы d^2u в точке M_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1 = 4 > 0, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u не является знакоопределенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке $M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ функция не имеет локального экстремума.

5 Найти локальные экстремумы функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0. \tag{5.3}$$

Решение. Уравнение (5.3) задает неявную функцию

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10,$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 2 практического занятия 3 и является дифференцируемой. Частные производные первого порядка находятся по формулам (3.3):

$$z'_x = \frac{x-1}{2-z}, \; z'_y = \frac{y+1}{2-z}$$

и дифференциал первого порядка имеет вид

$$dz = \frac{x-1}{2-z}dx + \frac{y+1}{2-z}dy.$$

Приравнивая к нулю частные производные первого порядка, получаем точки возможного экстремума $M_1(1,-1,-2)$, $M_2(1,-1,6)$.

Дифференцируя дважды равенство (5.3), получим:

$$dx^2 + dy^2 + z\,d^2z + dz^2 - 2d^2z = 0.$$

Отсюда находим дифференциал второго порядка

$$d^2z = \frac{1}{2-z}dx^2 + \frac{1}{2-z}dy^2 + \frac{1}{2-z}dz^2,$$

который представляет собой квадратичную форму от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. Согласно критерию Сильвестра, d^2z является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = 1/4 > 0$, то $M_1(1,-1,-2)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -2$.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$. Согласно критерию Сильвестра, d^2z является отрицательно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_2 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = -1/4 < 0$, то $M_2(1,-1,6)$ является точкой локального максимума, $z_{\max} = 6$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти экстремум функций двух переменных:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - x - 6y$;

б) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

в) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$; $x > 0$; $y > 0$;

г) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

д) $z = e^{-x^2 - y^2}\left(3x^2 + y^2\right)$;

е) $z = xy\ln\left(x^2 + y^2\right)$

2 Найти экстремум функций трех переменных:

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 8y - 6z + 40$;

б) $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3 Найти экстремум функции, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 9 = 0.$$

Задания для домашней работы

1 Найти экстремум функций двух переменных:

а) $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$;

б) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;

в) $z = xy^2(1 - x - y)$, $x, y > 0$;

г) $z = e^{-x^2 - y^2}\left(x^2 + 2y^2\right)$;

д) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

е) $z = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$.

2 Найти экстремум функций трех переменных:

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$;

б) $u = (x + y + z)e^{-x^2 - y^2 - z^2}$.

3 Найти экстремум функции, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

6.1 Понятие условного экстремума
6.2 Метод исключения части переменных
6.3 Метод Лагранжа
6.4 Глобальный экстремум функции двух переменных

6.1 Понятие условного экстремума

Рассмотрим функцию $f(P)$, $P(x_1;x_2;...;x_n)$. Будем считать, что ее аргументы являются связанными между собой

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...x_n)=0, \\ F_2(x_1;x_2;...x_n)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_k(x_1;x_2;...x_n)=0. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Соотношения (6.1) называются *уравнениями связи.* Пусть координаты точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ *условный минимум (максимум)* при условиях связи (6.1), если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1;x_2;...;x_n)\in U(\delta;P_0)$, $P\neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (6.1), выполняется неравенство

$$f(P)>f(P_0) \qquad (f(P)<f(P_0)).$$

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

Рассмотрим методы нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$, переменные x и y которой удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$.

6.2 Метод исключения части переменных

Пусть требуется найти локальный экстремум функции $f(x,y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т. е. выразить y как функцию x: $y=y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $f(x,y)$ вместо y функцию $y(x)$, получается функция одной переменной $f(x,y(x))$. Для этой функции проводится исследование на локальный экстремум известными методами. Найденные экстремумы являются точками условного экстремума для функции $f(x,y)$. Аналогично поступают, если уравнение $\varphi(x,y)=0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т. е. x выразить как функцию y.

Если условие связи задается параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $f(x,y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

Если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных или представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

6.3 Метод Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно переменной x или y.

Введем вспомогательную функцию, называемую *функцией Лагранжа*:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

где λ – некоторое действительное число.

Теорема 1 (необходимое условие Лагранжа условного экстремума) Пусть 1) функция $f(x,y)$ опре-

делена и дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $\varphi(x,y)=0$; 2) уравнение $\varphi(x,y)=0$ удовлетворяет в δ-окрестности точки P_0 условиям теоремы 2 практического занятия 3.

Тогда существует такое число λ, что

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0. \qquad (6.2)$$

Согласно этой теореме для нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$ с уравнением связи $\varphi(x,y)=0$ необходимо составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)$ и провести ее полное исследование на локальный экстремум как функции трех переменных x, y, λ.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $f(x_1;x_2;...;x_n)$.

6.4 Глобальный экстремум функции двух переменных

Пусть функция $f(x,y)$ определена на компакте D. Тогда на нем она достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо внутри D, либо на границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения на компакте называются *точками глобального экстремума*. Если точка глобального экстремума функции является внутренней точкой области, то она является точкой локального экстремума, а если граничной, то – точкой условного экстремума. Следовательно, чтобы найти глобальные экстремумы функции $f(x;y)$ на компакте D, необходимо найти локальные и условные экстремумы функции, сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется условным экстремумом функции?
2 В чем состоит метод исключения части переменных?

3 Какая функция называется функцией Лагранжа?

4 Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.

5 В чем состоит метод Лагранжа?

6 Как найти глобальные экстремумы функции?

Решение типовых примеров

1 Найти экстремум функции $z=x^2+y^2$ при уравнении связи $x+y-1=0$.

Решение. <u>1 способ.</u> Для решения воспользуемся методом исключения переменных. Выражая из уравнения связи переменную y и подставляя ее в функцию, получим функцию одной переменной x:

$$z=2x^2-2x+1.$$

Исследуем ее на локальный экстремум:

$z'=4x-2$, $z''=4>0$,

$z'=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, точка $x=\dfrac{1}{2}$ есть точка локального минимума для функции $z=2x^2-2x+1$, а соответственно точка $P\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ есть точка условного минимума функции $z=x^2+y^2$ при уравнении связи $x+y-1=0$.

<u>2 способ.</u> Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x=2x+\lambda,\ L'_y=2y+\lambda,\ L'_\lambda=x+y-1.$$

Решим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+\lambda=0 \\ 2y+\lambda=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $x_0=0{,}5$, $y_0=0{,}5$, $\lambda=-1$, т. е. точка $P_0(0{,}5;0{,}5;-1)$ единственная точка возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как $L''_{xx}=2$, $L''_{yy}=2$, $L''_{\lambda\lambda}=0$, $L''_{xy}=0$, $L''_{x\lambda}=1$, $L''_{y\lambda}=1$, то дифференциал второго порядка

$$d^2L=2dx^2+2dy^2+2dxd\lambda+2dyd\lambda$$

является квадратичной формой от переменных dx, dy, $d\lambda$. В точке $P_0(0{,}5;0{,}5;-1)$ матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$ и $a_{11}=2>0$. Следовательно, в точке $P_0(0{,}5;0{,}5;-1)$ функция Лагранжа имеет локальный минимум. Тогда функция $z=x^2+y^2$ при условии $x+y-1=0$ имеет в точке $M_0(0{,}5;0{,}5)$ условный минимум.

2 Найти экстремум функции $z=9-8x-6y$, если $x^2+y^2=25$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;\lambda)=9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25).$$

Находим ее частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-8+2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=-6+2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-25.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -8+2\lambda x=0, \\ -6+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2-25=0, \end{cases}.$$

получим

$$x_1 = 4\,,\ y_1 = 3\,,\ \lambda_1 = 1\,;$$
$$x_2 = -4\,,\ y_2 = -3\,,\ \lambda_2 = -1\,,$$

т. е. точки $P_1(4;3;1)$. $P_2(-4;-3;-1)$ являются точками возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda\,,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0\,,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda\,,$$

то выражение для второго дифференциала есть

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Видно, что $d^2 L\Big|_{P_1} > 0$ и $\left.\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 2 > 0$, то функция $L(x;y;\lambda)$ имеет в точке P_1 минимум. Следовательно, функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_1(4;3)$ имеет условный минимум, $z_{\min} = z(4;3) = -41$.

Аналогично, $d^2 L\Big|_{P_2} < 0$ и $\left.\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = -2 < 0$; функция $L(x;y;\lambda)$ имеет в точке P_2 максимум; функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_2(-4;-3)$ имеет условный максимум, $z_{\max} = z(-4;-3) = 59$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ на компакте D, ограниченном осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рисунок 6. 1).

Решение. Определим локальные экстремумы функции. Для этого вычислим частные производные:

$$z'_x = 6x^2 - 6y\,,\ z'_y = -6x + 6y\,.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0, \end{cases}$$

получаем две точки возможного экстремума $O(0;0)$ и $M(1;1)$.

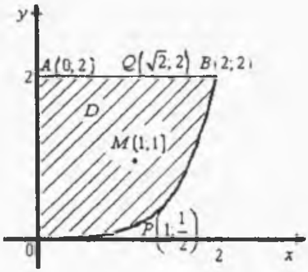

Рисунок 6. 1 – Область D типового примера 3

Внутренней точкой компакта D является только $M(1;1)$. Поскольку $z''_{xx} = 12x$, $z''_{yy} = 6$, $z''_{xy} = -6$ и

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 36,\ z''_{xx}\big|_M = 12 > 0,$$

то точка $M(1;1)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -1$.

Исследуем функцию на границе области.

Уравнение прямой OA есть $x = 0$ и, следовательно,

$$z = 3y^2 \ (0 \le y \le 2).$$

Функция $z = 3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной y на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает в точке $O(0;0)$ и $A(0;2)$.

Уравнение прямой AB есть $y = 2$, и поэтому здесь функция

$$z = 2x^2 - 12x + 12 \ (0 \le x \le 2)$$

представляет собой функцию одной переменной x. Так как $z'_x = 6x^2 - 12$, то из уравнения $z'_x = 0$ получим $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ находится только точка $x_1 = \sqrt{2}$, которой соответствует точка $Q(\sqrt{2};2)$. Глобальные экстремумы функции z на отрезке AB могут достигаться среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ имеем:

$$z=\frac{3}{4}x^4-x^3,\ (0\le x\le 2).$$

Так как $z'_x=3x^3-3x^2$, то из уравнения $x^2(x-1)=0$ находим точки возможного экстремума $x_1=0$, $x_2=1$, которым соответствуют точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т. е. среди значений

$z(O)=z(0;0)=0$, $\quad z(B)=z(2;2)=4$,

$z(A)=z(0;2)=12$, $\quad z(P)=z(1;1/2)=-\frac{1}{4}$,

$z(Q)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}$, $\quad z(M)=z(1;1)=-1$.

Откуда $\max\limits_D z=z(A)=12$, $\min\limits_D z=z(M)=-1$.

4 Из всех прямоугольных параллелепипедов с одинаковой площадью поверхности найти тот, который имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим длину, ширину и высоту параллелепипеда через x, y, z. И пусть V – объем параллелепипеда, S – его площадь. Тогда

$$V=xyz,$$

$$S=2xy+2yz+2xz.$$

Задача сводится к нахождению экстремума функции $V(x;y;z)=xyz$ при условии $2xy+2yz+2xz=S$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;z;\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$L_x=yz+\lambda(2y+2z),$$

$$L'_y = xz + \lambda(2x + 2z),$$
$$L'_z = xy + \lambda(2x + 2y),$$
$$L'_\lambda = 2xy + 2yz + 2xz.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + 2yz + 2xz = S \\ yz + \lambda(2y + 2z) = 0, \\ xz + \lambda(2x + 2z) = 0, \\ xy + \lambda(2x + 2y) = 0, \end{cases}$$

получаем $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$, $y = \sqrt{\frac{S}{6}}$, $z = \sqrt{\frac{S}{6}}$, $\lambda = -\frac{1}{24}\sqrt{\frac{6}{S}}$, т. е. при $\lambda = -\frac{1}{24}\sqrt{\frac{6}{S}}$ имеем единственную точку $P\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$ возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 0,$$

$$L''_{xy} = z - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},\ L''_{xz} = y - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},\ L''_{yz} = x - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},$$

то дифференциал второго порядка в точке $P\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$ имеет вид

$$d^2L = 2\left(\sqrt{\frac{S}{6}} - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}}\right)(dxdy + dxdz + dydz).$$

Главные миноры соответствующей матрицы квадратичной формы неотрицательны при $S > 3$. Поэтому можно считать, что в найденных значениях x, y, z объем будет наибольшим.

Следовательно, прямоугольный параллелепипед с заданной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем

$$V_{\max} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}},$$

является кубом со стороной $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти условные экстремумы функций:

а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$;

в) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

г) $u = xy^2 z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях:

а) $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8$ в области $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 0$;

б) $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$;

в) $z = 1 + 2x + 2y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

3 Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющей наибольший объем.

4 Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

5 В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

6 На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку наиболее удаленную от точки $P(0;0;3)$.

7 Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой плоскостью A_1B_1. Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй – v_2. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон преломления светового луча (рисунок 6. 2). (Принцип Ферма: световой луч распространяется вдоль той линии, для прохождения которой требуется минимум времени.)

Задания для домашней работы

1 Найти условные экстремумы функций:

а) $z = 8 - 2x - 4y$ при $x^2 + 2y^2 = 12$;

б) $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y = 6$;

в) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 4$;

г) $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях:

а) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$;

б) $z = x^2 + y^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 9$;

в) $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

3 В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

4 Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

5 Представить положительное число в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

6 Найти наименьшее из расстояний между точками параболы $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

7 Пользуясь принципом Ферма, вывести закон отражения светового луча от плоскости в однородной среде (рисунок 6.3).

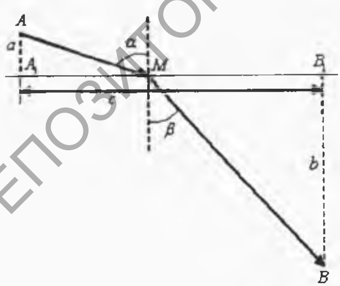

Рисунок 6. 2 – Рисунок к задаче 7 аудиторной работы

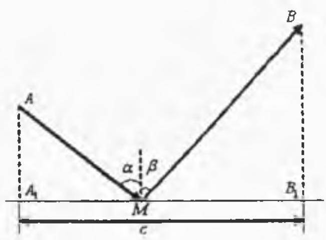

Рисунок 6. 3 – Рисунок к задаче 7 домашней работы

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ-1 Вычисление частных производных

1 Найти область определения функций:

1.1 $z = 3xy/(2x-5y)$.

1.2 $z = \arcsin(x-y)$.

1.3 $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

1.4 $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

1.5 $z = 2/(6 - x^2 - y^2)$.

1.6 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.

1.7 $z = \arccos(x+y)$

1.8 $z = 3x + y/(2 - x + y)$.

1.9 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

1.10 $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$.

1.11 $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$.

1.12 $z = 4xy/(x - 3y + 1)$.

1.13 $z = \sqrt{xy}(x^2 + y^2)$.

1.14 $z = \arcsin(x/y)$.

1.15 $z = \ln(y^2 - x^2)$.

1.16 $z = x^3y/(3 + x - y)$.

1.17 $z = \arccos(x + 2y)$.

1.18 $z = \arcsin(2x - y)$.

1.19 $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

1.20 $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

1.21 $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.

1.22 $z = \dfrac{4x + y}{2x - 5y}$.

1.23 $z = \dfrac{\sqrt{3x - 2y}}{x^2 + y^2 + 4}$.

1.24 $z = 5/(4 - x^2 - y^2)$.

1.25 $z = \ln(2x - y)$.

1.26 $z = 7x^3y/(x - 4y)$.

1.27 $z = \sqrt{1 - x - y}$.

1.28 $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

1.29 $z = 1/(x^2 + y^2 - 6)$.

1.30 $z = 4xy/(x^2 - y^2)$.

2 Найти частные производные и частные дифференциалы функций:

2.1 $z = \ln(y^2 - e^{-x})$.

2.2 $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$.

2.3 $z = \arcsin\sqrt{xy}$.

2.4 $z = \arcsin(2x^3y)$.

2.5 $z=\mathrm{arctg}(x^2+y^2)$.

2.6 $z=\mathrm{arctg}(x^2/y^3)$.

2.7 $z=\cos(x^3-2xy)$.

2.8 $z=\cos(x-\sqrt{xy^3})$.

2.9 $z=\sin\sqrt{y/x^3}$.

2.10 $z=\sin\dfrac{x+y}{x-y}$.

2.11 $z=\mathrm{tg}(x^3+y^2)$.

2.12 $z=\mathrm{tg}\dfrac{2x-y^2}{x}$.

2.13 $z=\mathrm{ctg}\sqrt{xy^3}$.

2.14 $z=\mathrm{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$.

2.15 $z=e^{-x^2+y^2}$.

2.16 $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.17 $z=\ln(3x^2-y^4)$.

2.18 $z=\ln(3x^2-y^2)$.

2.19 $z=\arccos(y/x)$.

2.20 $z=\arccos(x-y^2)$.

2.21 $z=\mathrm{arcctg}(xy^2)$.

2.22 $z=\mathrm{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$.

2.23 $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$.

2.24 $z=\cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

2.25 $z=\sin\sqrt{x-y^3}$.

2.26 $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$.

2.27 $z=\mathrm{tg}(x^3y^4)$.

2.28 $z=e^{-(x^3+y^3)}$.

2.29 $z=\mathrm{ctg}(3x-2y)$.

2.30 $z=e^{2x^2-y^5}$.

3 Вычислить с точностью до двух знаков после запятой значения частных производных функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

3.1 $f(x,y,z)=z/\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(0,-1,1)$.

3.2 $f(x,y,z)=\ln(x+\dfrac{y}{2z})$, $M_0(1,2,1)$.

3.3 $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$, $M_0(\dfrac{\pi}{6},1,2)$.

3.4 $f(x,y,z)=\ln(x^3+2y^3-z^3)$, $M_0(2,1,0)$.

3.5 $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $M_0(1,0,1)$.

3.6 $f(x,y,z)=\ln\cos(x^2y^2+z)$, $M_0(0,0,\frac{\pi}{4})$.

3.7 $f(x,y,z)=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$, $M_0(3,4,2)$.

3.8 $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(xy^2+z)$, $M_0(2,1,0)$.

3.9 $f(x,y,z)=\arcsin(x^2/y-z)$, $M_0(2,5,0)$.

3.10 $f(x,y,z)=\sqrt{z}\sin(y/x)$, $M_0(2,0,4)$.

3.11 $f(x,y,z)=y/\sqrt{x^2+z^2}$, $M_0(-1,1,0)$.

3.12 $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(xz/y^2)$, $M_0(2,1,1)$.

3.13 $f(x,y,z)=\ln\sin(x-2y+z/4)$, $M_0(1,1/2,\pi)$.

3.14 $f(x,y,z)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$, $M_0(1,1,2)$.

3.15 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$, $M_0(1,2,2)$.

3.16 $f(x,y,z)=\ln(x+y^2)-\sqrt{x^2z^2}$, $M_0(5,2,3)$.

3.17 $f(x,y,z)=\sqrt{z}x^y$. $M_0(1,2,4)$.

3.18 $f(x,y,z)=\dfrac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3.19 $f(x,y,z)=\ln(x^3+\sqrt[3]{y}-z)$, $M_0(2,1,8)$.

3.20 $f(x,y,z)=z/(x^4+y^2)$, $M_0(2,3,25)$.

3.21 $f(x,y,z)=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z}$, $M_0(3,2,1)$.

3.22 $f(x,y,z)=\ln(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z)$, $M_0(1,1,1)$.

3.23 $f(x,y,z)=-2x/\sqrt{y^2+z^2}$, $M_0(3,0,1)$.

3.24 $f(x,y,z)=ze^{-(x^2+y^2)/2}$, $M_0(0,0,1)$.

3.25 $f(x,y,z)=\frac{\sin(x-y)}{z}$, $M_0(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\sqrt{3})$.

3.26 $f(x,y,z)=\sqrt{z}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, $M_0(4,1,4)$.

3.27 $f(x,y,z)=\frac{xz}{x-y}$, $M_0(3,1,1)$.

3.28 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}$, $M_0(3,4,\frac{\pi}{2})$.

3.29 $f(x,y,z)=ze^{-xy}$, $M_0(0,1,1)$.

3.30 $f(x,y,z)=\arcsin(x\sqrt{y})-yz^2$, $M_0(0,4,1)$.

4 Найти полный дифференциал первого порядка функций:

4.1 $z=2x^3y-4xy^3$.

4.2 $z=xy^4-3x^2y+1$.

4.3 $z=x^2y\sin x-3y$.

4.4 $z=\ln(x+xy-y^2)$.

4.5 $z=\operatorname{arctg}x+\sqrt{y}$.

4.6 $z=2x^2y^2+x^3-y^3$.

4.7 $z=\arcsin(xy)-3xy^2$.

4.8 $z=\sqrt{3x^2-2y^2+5}$.

4.9 $z=5xy^4+2x^2y^7$.

4.10 $z=\arcsin\frac{x+y}{x}$.

4.11 $z=\cos(x^2-y^2)+x^3$.

4.12 $z=\operatorname{arcctg}(x-y)$.

4.13 $z=\ln(3x^2-2y^2)$.

4.14 $z=\sqrt{3x^2-y^2+x}$.

4.15 $z=5xy^2-3x^3y^4$.

4.16 $z=y^2-3xy-x^4$.

4.17 $z=\arcsin(x+y)$.

4.18 $z=\arccos(x+y)$.

4.19 $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.

4.20 $z=\ln(y^2-x^2+3)$.

4.21 $z=7x^3y-\sqrt{xy}$.

4.22 $z=2-x^3-y^3+5x$.

4.23 $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$.

4.24 $z=7x-x^3y^2+y^4$.

4.25 $z=e^{x+y-4}$.

4.26 $z=e^{y-x}$.

4.27 $z=\cos(3x+y)-x^2$.

4.28 $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.

4.29 $z=\operatorname{tg}(x+y)/(x-y)$.

4.30 $z=\operatorname{ctg}(y/x)$

5 Вычислить с точностью до двух знаков после запятой значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, в точке $t = t_0$:

5.1 $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

5.2 $u = \ln(e^x + e^{-y}$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$.

5.3 $u = y^x$, $x = \ln(t-1)$, $y = e^{t/2}$, $t_0 = 2$.

5.4 $u = e^{y-2x+2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi/2$.

5.5 $u = x^2 e^y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi$.

5.6 $u = \ln(e^x + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 1$.

5.7 $u = x^y$, $x = e^t$, $y = \ln t$, $t_0 = 1$.

5.8 $u = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$.

5.9 $u = x^2 e^{-y}$, $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $t_0 = \pi/2$.

5.10 $u = \ln(e^{-x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$.

5.11 $u = e^{y-2x-1}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi/2$.

5.12 $u = \arcsin(x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.13 $u = \arccos(2x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.14 $u = x^2/(y+1)$, $x = 1-2t$, $y = \mathrm{arctg}\, t$, $t_0 = 0$.

5.15 $u = x/y$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$.

5.16 $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, $x = t^2$, $y = \dfrac{1}{3}t^3$, $t_0 = 1$.

5.17 $u = \sqrt{x + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$.

5.18 $u = \arcsin(x^2/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

5.19 $u = y^2/x$, $x = 1-2t$, $y = 1 + \mathrm{arctg}\, t$, $t_0 = 0$.

5.20 $u = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

5.21 $u=\sqrt{x^2+y+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$, $t_0=1$.

5.22 $u=\arcsin\dfrac{x}{2y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$.

5.23 $u=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$, $x=\sin 2t$, $y=tg^2 t$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

5.24 $u=\sqrt{x+y+3}$, $x=\ln t$, $y=t^2$, $t_0=1$.

5.25 $u=y/x$, $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$, $t_0=0$.

5.26 $u=\arcsin(2x/y)$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$.

5.27 $u=\ln(e^{2x}+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^4$, $t_0=1$.

5.28 $u=\operatorname{arctg}(x+y)$, $x=t^2+2$, $y=4-t^2$, $t_0=1$.

5.29 $u=\sqrt{x^2+y^2+3}$, $x=\ln t$, $y=t^3$, $t_0=1$.

5.30 $u=\operatorname{arctg}(xy)$, $x=t+3$, $y=e^t$, $t_0=0$.

6 Вычислить с точностью до двух знаков после запятой значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

6.1 $x^3+y^3+z^3-3xyz=4$, $M_0(2,1,1)$.

6.2 $x^2+y^2+z^2-xy=2$, $M_0(-1,0,1)$.

6.3 $3x-2y+z=xz+5$, $M_0(2,1,-1)$.

6.4 $e^z+x+2y+z=4$, $M_0(1,1,0)$.

6.5 $x^2+y^2+z^2-z-4=0$, $M_0(1,1,-1)$.

6.6 $z^3+3xyz+3y=7$, $M_0(1,1,1)$.

6.7 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=\dfrac{3}{2}$, $M_0(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4})$.

6.8 $e^{z-1}=\cos x\cos y+1$, $M_0(0,\dfrac{\pi}{2},1)$.

6.9 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $M_0(1,2,1)$.

6.10 $xy = z^2 - 1$, $M_0(0,1,-1)$.

6.11 $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, $M_0(1,1,1)$.

6.12 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$, $M_0(0,2,1)$.

6.13 $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi/2$, $M_0(0,\pi/2,\pi)$.

6.14 $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$, $M_0(2,1,2)$.

6.15 $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, $M_0(1,1,1)$.

6.16 $x + y + z + 2 = xyz$, $M_0(2,-1,-1)$.

6.17 $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, $M_0(0,1,-1)$.

6.18 $e^z - xyz - x + 1 = 0$, $M_0(2,1,0)$.

6.19 $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, $M_0(1,-1,2)$.

6.20 $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, $M_0(0,-2,2)$.

6.21 $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, $M_0(1,2,0)$.

6.22 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0$, $M_0(1,-1,1)$.

6.23 $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, $M_0(0,1,-1)$.

6.24 $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$, $M_0(4,3,1)$.

6.25 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$, $M_0(3,1,4)$.

6.26 $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17$, $M_0(-2,-1,2)$.

6.27 $x^3 + 3xyz - z^3 = 27$, $M_0(3,1,3)$.

6.28 $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$, $M_0(1,1,3)$.

6.29 $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0$, $M_0(2,1,1)$.

6.30 $z^2 = xy - z + x^2 - 4$, $M_0(2,1,1)$.

ИДЗ-2 Приложения частных производных

1 Найти уравнение касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ к поверхности Ω, заданной уравнением:

1.1 $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,\ M_0(2,1,-1)$.

1.2 $x^2 - 4y^2 + z^2 = -2xy, M_0(-2,1,2)$.

1.3 $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7,\ M_0(1,2,1)$.

1.4 $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8,\ M_0(-1,1,2)$.

1.5 $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13,\ M_0(2,1,-1)$.

1.6 $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0,\ M_0(2,1,-1)$.

1.7 $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46,\ M_0(1,2,-3)$.

1.8 $x^2 + y^2 - xz - yz = 0,\ M_0(0,2,2)$.

1.9 $x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2,\ M_0(1,1,1)$.

1.10 $x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x = z,\ M_0(1,1,1)$.

1.11 $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y,\ M_0(-1,-1,-1)$.

1.12 $z = -x^2 + y^2 + 2xy - 3y,\ M_0(1,-1,1)$.

1.13 $z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,\ M_0(-1,1,1)$.

1.14 $x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13,\ M_0(3,1,2)$.

1.15 $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,\ M_0(1,-2,1)$.

1.16 $z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2,\ M_0(2,1,0)$.

1.17 $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3,\ M_0(1,2,1)$.

1.18 $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,\ M_0(3,1,4)$.

1.19 $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,\ M_0(1,1,2)$.

1.20 $x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5,\ M_0(-2,1,0)$.

1.21 $x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11,\ M_0(1,4,-1)$.

1.22 $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8,\ M_0(0,2,0)$.

1.23 $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0,\ M_0(-1,-1,1)$.

1.24 $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z,\ M_0(1,0,1)$.

1.25 $2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0,\ M_0(1,-1,1)$.

1.26 $x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8,\ M_0(1,1,0)$.

1.27 $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10,\ M_0(-1,1,3)$.

1.28 $z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15,\ M_0(-1,3,4)$.

1.29 $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10,\ M_0(-7,1,8)$.

1.30 $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1,\ M_0(1,-1,2)$.

2 Найти частные производные второго порядка и убедиться в равенстве смешанных производных для функции:

2.1 $z = e^{x^2 - y^2}$

2.2 $z = \arccos(4x - y)$.

2.3 $z = \operatorname{ctg}(x + y)$.

2.4 $z = \operatorname{arctg}(5x + 2y)$.

2.5 $z = \operatorname{tg}(x / y)$.

2.6 $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

2.7 $z = \cos(xy^2)$.

2.8 $z = \ln(4x^2 - 5y^3)$.

2.9 $z = \sin(x^2 - y)$.

2.10 $z = e^{\sqrt{x - y}}$.

2.11 $z = \operatorname{arctg}(x + y)$.

2.12 $z = \arcsin(4x + y)$.

2.13 $z = \arcsin(x - y)$.

2.14 $z = \arccos(x - 5y)$.

2.15 $z = \arccos(2x + y)$.

2.16 $z = \sin\sqrt{xy}$.

2.17 $z = \operatorname{arcctg}(x - 3y)$.

2.18 $z = \cos(3x^2 - y^3)$.

2.19 $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.

2.20 $z = \operatorname{arctg}(3x + 2y)$.

2.21 $z = e^{2x^2 - y^2}$.

2.22 $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$.

2.23 $z = \operatorname{ctg}(y / x)$.

2.24 $z = \operatorname{arcctg}(x - 4y)$.

2.25 $z = \operatorname{tg}\sqrt{xy}$.

2.26 $z = \ln(3xy - 4)$.

2.27 $z = \cos(x^2 y^2 - 5)$.

2.28 $z = \operatorname{tg}(xy^2)$.

2.29 $z = \sin\sqrt{x^3 y}$.

2.30 $z = \arcsin(x - 2y)$

3 Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению функция $u(x;y)$:

3.1 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\dfrac{y}{x}$.

3.2 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3),\ u=\ln\dfrac{y}{x}+x^3-y^3$.

3.3 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+(y+1)^2)$.

3.4 $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x},\ u=x^y$.

3.5 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u,\ u=\dfrac{xy}{x+y}$.

3.6 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=e^{xy}$.

3.7 $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=\sin^2(x-ay)$.

3.8 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

3.9 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3.10 $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=e^{-\cos(x+ay)}$.

3.11 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=(x-y)(y-z)(z-x)$.

3.12 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u,\ u=x\ln\dfrac{y}{x}$.

3.13 $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\ln(x^2+y^2)$.

3.14 $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0,\ u=\dfrac{y^3}{3x}+\arcsin(xy)$.

3.15 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy=0,\ u=e^{xy}$.

3.16 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

3.17 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+y^2+2x+1)$.

3.18 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0,\ u=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$.

3.19 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1,\ u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3.20 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u,\ \ u=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$.

3.21 $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$.

3.22 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=xe^{y/x}$.

3.23 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3.24 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

3.25 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ u=\ln(x+e^{-y})$.

3.26 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$.

3.27 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y},\ \ u=\dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$.

3.28 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x+y}{x-y},\ \ u=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

3.29 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{u},\ u=\sqrt{2xy+y^2}$.

3.30 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=\ln(x^2-y^2)$.

4 Исследовать на локальный экстремум функции:

4.1 $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$.

4.2 $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

4.3 $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$.

4.4 $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

4.5 $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

4.6 $z=2x^3+2y^3-6xy+5$.

4.7 $z=3x^3+3y^3-9xy+10$.

4.8 $z=x^2+y^2+xy+x-y+1$.

4.9 $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

4.10 $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$.

4.11 $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

4.12 $z=(x-2)^2+2y^2-10$.

4.13 $z=(x-5)^2+y^2+1$.

4.14 $z=x^3+y^3-3xy$.

4.15 $z=2xy-2x^2-4y^2$.

4.16 $z=x\sqrt{y}-x^2-y+18x+3$.

4.17 $z=2xy-5x^2-3y^2+2$.

4.18 $z=xy(12-x-y)$.

4.19 $z=xy-x^2-y^2+9$.

4.20 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

4.21 $z = x^3 + 9y^3 - 6xy + 1.$

4.22 $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

4.23 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

4.24 $z = xy(6 - x - y).$

4.25 $z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$

4.26 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

4.27 $z = (x-1)^2 + 2y^2.$

4.28 $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$

4.29 $z = x^2 + 3(y+2)^2.$

4.30 $z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$

5 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x;y)$ на компакте $\overline{D}$, ограниченном кривыми:

5.1 $z = 3x + y - xy, \quad \overline{D}: y = x, y = 4, x = 0.$

5.2 $z = xy - x - 2y, \quad \overline{D}: x = 3, y = x, y = 0.$

5.3 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$

5.4 $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$

5.5 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$

5.6 $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$

5.7 $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6.$

5.8 $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$

5.9 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0.$

5.10 $z = x^2 + 2xy - 10, \quad \overline{D}: y = 0, y = x^2 - 4.$

5.11 $z = xy - 2x - y, \quad \overline{D}: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4.$

5.12 $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad \overline{D}: y = 8, y = 2x^2.$

5.13 $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \ \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$

5.14 $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \ \overline{D}: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0.$

5.15 $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \ \overline{D}: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$

5.16 $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \ \overline{D}: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0.$

5.17 $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \ \overline{D}: x = 0, y = 2x, x = 0.$

5.18 $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \ \overline{D}: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$

5.19 $z = xy - 3x - 2y, \ \overline{D}: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4.$

5.20 $z = x^2 + xy - 2, \ \overline{D}: y = 4x^2 - 4, y = 0.$

5.21 $z = x^2 y(4 - x - y), \ \overline{D}: x = 0, y = 0, y = 6 - x.$

5.22 $z = x^3 + y^3 - 3xy, \ \overline{D}: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$

5.23 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \ \overline{D}: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$

5.24 $z = x^3 + y^3 - 3xy, \ \overline{D}: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$

5.25 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \ \overline{D}: x = 3, y = 0, y = x + 1.$

5.26 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \ \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$

5.27 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \ \overline{D}: x = 2, y = x + 2, y = 0.$

5.28 $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2, \ \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y = 6.$

5.29 $z = 4 - 2x^2 - y^2, \ \overline{D}: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}.$

5.30 $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \ \overline{D}: x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$

Литература

1 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

2 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3 Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

4 Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учебное пособие для студентов вузов в 2 ч. Ч. 2. Функции нескольких переменных / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1988.

5 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

6 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

7 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть пятая

Дифференциальное исчисление
функции многих переменных

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия №02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать 2.11.07. Формат 60x84 1/16. Бумага писчая №1. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл. печ. л. 5,46. Уч-изд. л. 5,8. Тираж 100 экз. Заказ № 66

1266-16

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия №02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104