

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ С ПОЗИЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

К задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

При принятии управленческих решений важно не только нахождение оптимального плана производства (при котором доход оптимален), но и определение степени влияния на оптимальный план изменений параметров (каким должно быть сочетание ресурсов для получения максимума дохода и какие изделия при этом являются рентабельными). Неизбежное колебание значений параметров задачи линейного программирования (например, таких экономических показателей, как цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке и т. д.) может привести к неоптимальности прежнего плана работы. Для учета подобных ситуаций проводится анализ чувствительности модели на изменение ее параметров.

Анализ чувствительности – анализ влияния возможных изменений параметров модели на оптимальное решение. Он основан на изучении решения специальной модели, называемой двойственной по отношению к исходной. Из математического программирования известно, что к задаче линейного программирования можно построить двойственную ей задачу. Экономическая интерпретация двойственной задачи иногда представляет серьезную проблему, особенно если в исходной задаче имеются различные знаки в основных ограничениях при неотрицательных правых частях. Такая проблема не возникает при анализе на чувствительность в задаче производственного планирования, поэтому далее рассматриваем эту задачу.

Задача производственного планирования формулируется в общем виде следующим образом. Пусть предприятие производит n различных изделий, соответственно, в объеме x_1, x_2, \dots, x_n единиц и использует при этом m различных видов ресурсов, запасы которых в планируемый период составляют, соответственно, b_1, b_2, \dots, b_m единиц. Известно, что для производства единицы

изделия j -го вида требуется a_{ij} единиц i -го ресурса ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$). Выручка, получаемая предприятием при реализации одного изделия j -го вида, равна c_j ($j = \overline{1, n}$).

Из теории двойственности известно, что для получения решения взаимно двойственных задач достаточно решить одну из них. Связь между планами взаимно двойственных задач устанавливают теоремы двойственности, из которых наибольший интерес для экономического анализа представляет вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости): для оптимальности планов (решений) $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)$ пары двойственных задач необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} z_i^* - c_j \right) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \text{ и } z_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Предельный (marginal) продукт ресурса в денежном выражении – дополнительный доход, полученный при использовании одной дополнительной единицы ресурса при неизменных других ресурсах. Каждому ресурсу i -го вида ($i = \overline{1, m}$) соответствует свое значение z_i предельного продукта в денежном выражении, которое и является двойственной переменной. Очевидно, предельный продукт ресурса в денежном выражении неотрицателен, т. е.

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Дополнительный доход при использовании имеющихся запасов всех ресурсов равен $F_D = \sum_{i=1}^m b_i z_i$. В экономической теории формулируется закон убывающей отдачи (доходности): последовательное увеличение ресурса при неизменности других ведет к снижению предельного продукта этого ресурса в денежном выражении. Согласно этому закону

$$F_D = \sum_{i=1}^m b_i z_i \rightarrow \min.$$

Заметим, что при этом общий доход $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ от производства продукции будет увеличиваться.

В условиях свободного рынка производство дополнительных единиц продукции прибыльно до такого объема, при котором предельный продукт ресурсов, используемых на производство единицы изделия, в денежном выражении равен доходу от реализации этого изделия.

На производство единицы продукции первого вида расходуется определенное по технологической матрице количество каждого ресурса. Сумма возможного дополнительного (предельного) дохода при использовании ресурсов на производство одной единицы изделия первого вида равна $a_{11} z_1 + a_{21} z_2 + \dots + a_{m1} z_m$. Производство прибыльно до такого объема, при котором предельный доход равен выручке c_1 , полученной от реализации единицы этой продукции. Предельный доход указывает на возможность окупаемости каждой добавочной единицы продукции, т.е. $a_{11} z_1 + a_{21} z_2 + \dots + a_{m1} z_m \geq c_1$. Рассуждая аналогично для остальных видов продукции, получим систему ограничений

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} z_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для каждого вида продукции разность $\sum_{i=1}^m a_{ij} z_i - c_j$, $j = 1, \dots, n$ определяет его рентабельность: если $\sum_{i=1}^m a_{ij} z_i - c_j > 0$, то данный вид продукции нерентабельный, если

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} z_i - c_j = 0, \text{ то рентабельный.}$$

Таким образом, из второй теоремы двойственности вытекает, что двойственные переменные как предельные продукты ресурса в денежном выражении обладают следующими экономическими свойствами:

1. Предельный продукт ресурса в денежном выражении является мерой дефицитности ресурса: дефицитнее тот ресурс, у которого предельный продукт больше (увеличение этого ресурса даст больший прирост дохода).

2. Предельный продукт ресурса в денежном выражении является мерой влияния запасов ресурса на значение общего дохода: при изменении запаса дефицитного ресурса доход изменяется, недефицитного – нет.

3. Предельные продукты ресурсов в денежном выражении являются инструментом определения выгодности выпуска новых изделий, эффективности инновационных технологических способов производства и т.д. Если при производстве $(n+1)$ -го нового изделия с технологическими коэффициентами $a_{1n+1}, a_{2n+1}, \dots, a_{mn+1}$, доходом c_{n+1} за единицу этого изделия и пре-

дельными продуктами в денежном выражении z_i ($i = \overline{1; m}$) имеющихся ресурсов разность

$\sum_{i=1}^m a_{in+1} z_i - c_{n+1}$ отрицательна (т. е. $\sum_{i=1}^m a_{in+1} z_i \leq c_{n+1}$), то принимается решение о выпуске

этого изделия.

4. Предельные продукты ресурсов являются мерой относительной заменяемости дефицитных ресурсов с точки зрения производственных нужд. Предельной нормой технологического замещения дефицитных ресурсов называется величина сокращения дефицитного ресурса за счет применения дополнительной единицы другого дефицитного ресурса. Она равна отноше-

нию $\frac{z_i^*}{z_k^*}$ и показывает, сколько единиц k -го ресурса может быть высвобождено при увеличении

объема i -го ресурса на единицу или сколько единиц k -го ресурса необходимо дополнительно ввести при уменьшении на единицу объема i -го ресурса, чтобы значение целевой функции не изменилось. Таким образом, предельная норма технологического замещения дефицитных ресурсов связана с предельными продуктами взаимодействующих ресурсов и их соотношениями. Непрерывное замещение одного ресурса другим приводит к росту предельного продукта первого и снижению предельного продукта другого при неизменности значения прибыли.