Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1

Гомель 2007

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть первая

Введение в анализ

Гомель 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.
Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч.1. Введение в анализ / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 118 с.

ISBN 978-985-439-249-3

В первой части практического пособия по темам «Числовые множества» и «Теория пределов» излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

ISBN 978-985-439-249-3

Содержание

Введение.. 4
Тема 1 Числовые множества.. 5
Практическое занятие 1 Числовые множества.................. 5
Практическое занятие 2 Грани числовых множеств......... 13
Практическое занятие 3 Множество комплексных чисел... 19
Тема 2 Теория пределов.. 30
Практическое занятие 1 Числовые последовательности.... 30
Практическое занятие 2 Предел последовательности....... 39
Практическое занятие 3 Предел функции......................... 50
Практическое занятие 4 Бесконечно малые функции........ 67
Практическое занятие 5 Непрерывность функции............ 75
Индивидуальные домашние задания.............................. 87
ИДЗ–1 Числовые множества.. 87
ИДЗ–2 Предел последовательности...................................... 99
ИДЗ-3 Предел и непрерывность функции............................ 105
ЛИТЕРАТУРА.. 118

Введение

Практическое пособие является первой частью комплекса практических пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физического факультета. Оно адресовано как студентам, так и преподавателям. Книга написана в соответствии с действующей программой по данному курсу и содержит наборы индивидуальных домашних заданий.

Пособие включает материал по темам «Числовые множества», «Предел последовательности», «Предел и непрерывность функции», которые условно можно назвать «Введение в анализ».

Структура пособия основана на рабочей программе по данному курсу, поэтому каждая тема разбита на части, соответствующие одному практическому занятию. Материал каждого занятия разбит на следующие пункты:

– основные теоретические сведения и формулы;
– вопросы для самоконтроля;
– типовые примеры;
– задания для аудиторной и домашней работ;
– варианты индивидуальных домашних заданий;
– список используемой литературы.

При подборе задач авторами использованы «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Математический анализ в вопросах и задачах» В. Ф. Бутузова (1984), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991) и другие. Поэтому многие задачи пособия не претендуют на оригинальность, хотя среди них есть целый ряд новых.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезным для преподавателей при проведении практических занятий и студентам в их самостоятельной работе над предметом. Они с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Тема 1 Числовые множества

Практическое занятие 1 Числовые множества

1.1 Язык теории множеств
1.2 Понятие функции

1.1 Язык теории множеств

Понятие множества считается первоначальным, неопределяемым. Под *множеством* понимается совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Способы задания множеств:

– перечислением его элементов – если множество A состоит из элементов a, b, c, d, то пишут $A = \{a,b,c,d\}$;

– указанием характеристики свойств элементов – если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, то пишут $A = \{x | P(x)\}$.

– диаграммы Эйлера-Венна – множество изображается в виде кругов, треугольников или геометрических фигур произвольной формы, внутри которых располагаются элементы множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A. Равенство множеств A и B обозначают $A = B$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов. Если множество A *не равно* множеству B, то пишут $A \neq B$.

Множество A, $A \neq \varnothing$, называется *подмножеством* множества B, $B \neq \varnothing$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если A – подмножество множества B, то пишут $A \subseteq B$.

Понятие подмножества определяет между двумя множествами *отношение включения*. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством* множества B и *обозначается* $A \subset B$.

Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется *основным* или *универсальным*. Обозначается универсальное множество буквой U.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или обоим одновременно):

$$A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A \cap B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

Разностью двух множеств B и A называется множество $B \setminus A$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат B, но не принадлежат A:

$$B \setminus A = \left\{ x \middle| x \in B \text{ и } x \notin A \right\}.$$

Разность $U \setminus A$ называется *дополнением* множества A до универсального множества U и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} = U \setminus A = \left\{ x \middle| x \notin A \right\}.$$

Пара элементов $(x; y)$, $x \in A$, $y \in B$, называется *упорядоченной*, если указан порядок записи элементов x и y. Элементы x и y упорядоченной пары $(x; y)$ называются *координатами*, при этом x – первая координата, y – вторая.

При этом $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$ тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

Основные числовые множества:

– множество *натуральных* чисел, т.е. чисел, которые используются при счете: $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$;

– объединение натуральных чисел, чисел, им противоположных и нуля составляет множество *целых* чисел $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\};$$

– множество чисел вида p/n, где $p \in \mathbf{Z}$; $n \in \mathbf{N}$, называется *множеством рациональных* чисел $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ q = \frac{p}{n} \,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\};$$

– числа, которые представимы в виде бесконечной непериодической десятичной дроби называются *иррациональными*;

– объединение рациональных и иррациональных чисел составляет *множество действительных* чисел $\mathbf{R}$.

Очевидно, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Множество действительных чисел $\mathbf{R}$, пополненное символами $-\infty$ и ∞, *обозначается* $\overline{\mathbf{R}}$ и называется *расширенным множеством действительных чисел*, бесконечности $-\infty$ и ∞ называются *бесконечно удаленными точками* числовой прямой, остальные точки – *конечными точками* числовой прямой.

Основными промежутками во множестве $\overline{\mathbf{R}}$ являются:

– *интервал* с концами a и b:

$$(a;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \right\};$$

– *отрезок* с концами a и b:

$$[a;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b \right\};$$

– *полуинтервалы*:

$$[a;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b \right\},\ (a;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b \right\};$$

– *бесконечные* интервалы и полуинтервалы:

$$[a;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \ge a \right\},\ (a;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x > a \right\},$$

$$(-\infty;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x < b \right\},\ (-\infty;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \le b \right\}.$$

$$(-\infty;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < \infty \right\}.$$

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x;y)$:

$$A \times B = \left\{ (x;y) \mid \forall x \in A, \forall y \in B \right\}.$$

Если $A = B$, то $A \times A$ называется *декартовым квадратом* и обозначается A^2, т.е. $A^2 = A \times A$.

Пусть X, Y – произвольные множества.

1.2 Понятие функции

ПРАВИЛО при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется *функцией* (*отображением*), заданной на множестве X со значениями во множестве Y, при этом элемент x называется *независимой* переменной (*аргументом*), элемент y – *зависимой* переменной.

Обозначается:

$$y = f(x),\ x \in X,\ f : x \mapsto y \text{ при } x \in X \text{ и } y \in Y;\ f : X \to Y.$$

Множество X называется *областью определения* функции f и *обозначается* $D(f)$. Множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, называется *множеством значений* функции f и *обозначается* $E(f)$. Очевидно, что $E(f) \subseteq Y$.

Определение функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f : x \mapsto y \Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists!\, y \in Y : y = f(x).$$

Элемент $y \in Y$, в который отображен $x \in X$, называется *образом* элемента x при отображении f и *обозначается* $f(x)$. Элемент x называется *прообразом* элемента $f(x)$. Поэтому отображение удобно записывать в виде $y = f(x),\ x \in X$.

Множество образов всех элементов $x \in X$ при отображении f называется *образом множества* X при этом отображении:

$$f(X) = \{ f(x) | x \in X \} \subseteq Y.$$

Полным прообразом множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество $f^{-1}(B)$, состоящее из всех прообразов всех элементов множества B:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X | f(x) \in B \} \subseteq X.$$

Функция f^{-1} называется *обратной* к функции f, если элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y.

Определение обратной функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f^{-1}: x \mapsto y \iff \forall y \in Y \, \exists x \in X : x = f^{-1}(y).$$

Если $f: x \mapsto y$ и $g: y \mapsto z$ функции, то функция $g \circ f : x \mapsto z$, ставящая в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $z \in Z$, $g \circ f = g(f(x))$, называется *сложной* функцией или *композицией* функций f и g.

Два множества A и B называются *эквивалентными* (*равномощными*), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое. *Обозначается*: $A \sim B$.

Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным*. Если множество счетное, то его элементы можно занумеровать. Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечными*. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Если A – конечное множество, то число его элементов обозначается $|A|$ или $\dim A$ и называется *мощностью множества* A.

Вопросы для самоконтроля

1 Что вы понимаете под термином «множество»? Какие существуют способы задания множества? Приведите примеры.

2 Какие множества называются равными? Приведите примеры.

3 Что называется подмножеством множества. Какое подмножество называется собственным подмножеством множества.

4 Запишите с помощью кванторов определение операций объединения, пересечения, разности и дополнения.

5 Что называется декартовым произведением множеств?

6 Что называется функцией? Дайте определение области определения, области значения функции.

7 Какие множества называются эквивалентными?

8 Какое множество называется счетным? Приведите примеры.

9 Какие числовые множества вы знаете?

Решение типовых примеров

1 Найдите пересечение, объединение, разность множеств $A=\left\{\frac{1}{5^n} \mid n\in\mathbf{N}\right\}$ и $B=\left\{\frac{1}{25^n}, \mid n\in\mathbf{N}\right\}$.

Решение. Поскольку

$$A=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};...\right\} \text{ и } B=\left\{\frac{1}{25};\frac{1}{625};\frac{1}{15625};...\right\},$$

то

$$A\cap B=\left\{\frac{1}{25};\frac{1}{625};...\right\}=B,\ A\cup B=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};...\right\}=A,$$

$$A\setminus B=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{125};...\right\}=\left\{\frac{1}{5^{2k-1}} \mid k\in\mathbf{N}\right\},\ B\setminus A=\varnothing.$$

2 Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

Решение. Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число m^2 есть четное число. Отсюда и m есть четное число. Если m – четное, то оно представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Следовательно, n^2 есть четное число, тогда и n – четное. Таким образом, числа m и n являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$.

3 Доказать, что $0{,}4(9)=0{,}5(0)$.

Решение. Пусть $x=0{,}4(9)$.

Тогда $100x-10x=49{,}(9)-4(9)=45$.

Откуда $x = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}5(0)$

Задания для аудиторной работы

1 Какие элементы множества

$$A = \{-40; -32{,}4; -8; -\frac{1}{9}; 0; \frac{5}{7}; 6; 12; 19\frac{2}{9}; 30\}$$

являются натуральными числами, целыми числами, дробными, рациональными числами, отрицательными числами, неотрицательными числами?

2 Составьте подмножества множества

$$B = \{-24; -23\frac{1}{3}; -22; -9; 0; \frac{1}{5}; 2; 5; 9; 10; 12; 24\},$$

элементами которых являются $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, нечетные, четные числа, отрицательные числа, числа кратные 4.

3 Какие из следующих утверждений $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Z}$ справедливы?

4 Укажите пустые множества среди:

а) множество целых корней уравнения $x^2 - 16 = 0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;

в) множество натуральных чисел, меньших 1.

5 Найдите пересечение, объединение, разность множеств из упражнения 1 и 2.

6 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A = \left\{ \frac{1}{3^n} \middle| \ n \in \mathbf{N} \right\} \text{ и } B = \left\{ \frac{1}{10^n} \middle| \ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

7 Доказать, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

8 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, не имеющую цифры 9 в периоде, можно получить как результат деления двух натуральных чисел.

9 Доказать, что $0{,}6(9) = 0{,}7(0)$.

Задания для домашней работы

1 Найдите пересечение, объединение, разность множеств
$$A=\{-2;-1;0;1;2;3;\ldots\} \text{ и } B=\{3;9;27;\ldots\}.$$

2 Верны ли равенства: $0{,}41(9)=0{,}42(0)=0{,}42$?

3 Какие из чисел $-\frac{5}{9}$, $1,(3)$, $\frac{27}{12}$, $-\frac{6}{7}$, $0,(4)$, 9, $-2{,}3$, $0,(2)$ являются рациональными? Каждое число представьте в виде соотношения $\frac{m}{n}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$.

4 Найдите пересечение, объединение, разность множеств
$$A=\{2^n \mid n\in\mathbf{N}\} \text{ и } B=\{(-1)^n\cdot 2 \mid n\in\mathbf{N}\}.$$

5 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, имеющую в периоде цифру 9, нельзя получать как результат деления двух натуральных чисел.

6 Доказать, что $\sqrt{6}$ – иррациональное число.

Практическое занятие 2 Грани числовых множеств

2.1 Точные грани числовых множеств
2.2 Метод математической индукции

2.1 Точные грани числовых множеств

Рассмотрим произвольное числовое множество $A \subset \mathbf{R}$.

Множество действительных чисел A называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число M, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \le M$, т.е.

$$\exists M \in \mathbf{R}: \forall x \in A \quad x \le M .$$

При этом число M называется *верхней гранью* множества A.

Множество A неограничено сверху, если

$$\forall M \in \mathbf{R}: \exists x_0 \in A \quad x_0 > M .$$

Элемент $c_1 \in A$ называется наибольшим элементом множества A, если $\forall x \in A \quad x < c_1$.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества $A \subset \mathbf{R}$ называется *точной верхней гранью.*

Обозначается:

$$M = \sup A \iff \forall x \in A : x \le M \text{ и } \forall M' < M \quad \exists x_0 > M', x_0 \in A .$$

Множество действительных чисел A называется *ограниченным снизу*, если существует такое действительное число m, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \ge m$, т.е.

$$\exists m \in \mathbf{R}: \forall x \in A \quad x \ge m .$$

При этом число m называется *нижней гранью* множества A.

Множество A *неограничено снизу*, если

$$\forall m \in \mathbf{R}: \exists x_0 \in A \quad x_0 < m .$$

Элемент $c_2 \in A$ называется *наименьшим элементом* множества A, если $\forall x \in A \quad x > c_2$.

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbf{R}$ называется *точной нижней гранью.*

Обозначается:

$$m = \inf A \iff \forall x \in A : x \ge m \text{ и } \forall m' > m \quad \exists x_0 \le m', x_0 \in A .$$

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*: $\exists K > 0: \ \forall x \in A \quad |x| \le K$.

Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

2.2 Метод математической индукции

Метод математической индукции используется при доказательстве утверждений, зависящих от натурального аргумента. Для доказательства необходимо:

1) проверить верность утверждения при $n = 1$ (либо для первого натурального числа, для которого доказывается утверждение);

2) в предположении, что утверждение верно для $n = k$, доказать его справедливость для следующего натурального числа $n = k + 1$.

При решении задач часто используется *бином Ньютона*.

Пусть задано конечное множество элементов. Группы элементов, состоящие их одних и тех элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками*. Число возможных перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!, \ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \ 0! = 1.$$

Каждое множество, содержащее k элементов из числа n заданных, называется *сочетанием n элементов по k*. Число всевозможных сочетаний из n элементов по k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Число C_n^k можно последовательно находить с помощью треугольника Паскаля, который представляет собой треугольную таблицу.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Первые и последние числа во всех строчках таблицы равны 1. Начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки. В каждой n строчке стоят последовательно числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.

Число сочетаний используется при вычислении коэффициентов в формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n .$$

Вопросы для самоконтроля

1 В чем заключается метод математической индукции?

2 Какие множества называются ограниченными. Приведите примеры ограниченных и неограниченных множеств.

3 Дайте определение точной верхней грани, нижней грани множества. Приведите примеры множеств, ограниченных сверху, снизу.

4 Приведите примеры числовых множеств X, у которых: а) $\sup X \in X$; б) $\sup X \notin X$; в) $\inf X \in X$; г) $\inf X \notin X$. Имеет ли множество X в случаях а) и б) наибольше, а в случаях в) и г) наименьшее число?

5 Что означает запись $\sup X = +\infty$ и $\inf X = -\infty$?

Решение типовых примеров

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ $n \le 2^{n-1}$.

Решение. При $n = 1$ неравенство верно т.к. $1 \le 1$. Предположим, что неравенство верно для $k \in \mathbf{N} : k \le 2^{k-1}$. Докажем, что неравенство верно для $(k+1)$:

$$2^k = 2^{k-1} \cdot 2 \ge 2 \cdot k \ge k + 1 .$$

Последнее неравенство следует из очевидного неравенства: $(k-1)^2 \ge 0$.

Тем самым доказано, что неравенство верно $\forall n \in \mathbf{N}$.

2 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. При $n=1$ равенство очевидно.

Предположим, что оно верно для натурального числа k:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Проверим верность утверждения для следующего натурального числа $(k+1)$:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=$$

$$=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Следовательно, утверждение верно для любого $n\in\mathbf{N}$.

3 Найти точную верхнюю грань интервала $(0,1)$.

Решение. Так как для любого $x\in(0;1)\Rightarrow x<1$, то число 1 является верхней гранью. Покажем, что это точная верхняя грань, т.е. для любого $\bar{x}<1\ \exists\, a\in(0,1): a>\bar{x}$.

Действительно, если $\bar{x}\le 0$, то $\forall a\in(0;1): a>x$. Если $\bar{x}>0$, то на интеграле $(\bar{x};1)$ существует действительное число a: $\bar{x}<a<1$, т.е. $a>\bar{x}$.

Таким образом, для числа 1 выполнены оба условия определения точной грани $\sup(0;1)=1$ $(\sup(0;1)\notin(0;1))$.

4 Найти точные грани множества всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$ и показать, что это множество не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Решение. *Шаг 1.* Пусть $X=\left\{\frac{m}{n}\middle|\ m,n\in\mathbf{N}, m<n\right\}$. Так как $\frac{m}{n}>0$, $\forall m,n\in\boldsymbol{N}$, то $0-$ нижняя грань множества X. Более того, $\forall\bar{x}>0$, так как, если $\bar{x}\ge 1$, то $a=\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $a<\bar{x}$. Если $0<\bar{x}<1$, то число $\bar{x}$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: $\bar{x} = 0, x_1, x_2 \ldots x_k \ldots$, причем $\exists x_n : x_n \neq 0$.

Рациональное число $a = 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}(x_n - 1)$ удовлетворяет условию $0 < a < \bar{x} < 1$, т.е. является правильной рациональной дробью и $0 < \bar{x}$. Следовательно, для числа 0 выполнено определение точной, нижней грани: $\inf X = 0$. При этом $\inf X \notin X$, так как $\frac{0}{n} \notin X$, 0 – не натуральное число и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

Шаг 2. Так как X содержит только правильные дроби, то $\frac{m}{n} < 1$, то число 1 – верхняя грань множества X. Более того, $\forall \bar{x} < 1 \ \exists \frac{m}{n} \in X : \frac{m}{n} > \bar{x}$. Действительно, $\exists$ рациональное число $x_1 = \frac{m}{n} : \bar{x} < x_1 < 1$. Значит, $x_1 \in X$ и для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани. Следовательно, $\sup X = 1$. Но $\sup X \notin X$, т.к. $\frac{m}{n} = 1$ при $m = n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество X не имеет наибольшего элемента.

Задания для аудиторной работы

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Доказать, что для любого $n \in \mathbf{N}$ и для любого $x > -1$ справедливо неравенство Бернулли:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

3 Доказать, что для любых положительных чисел $y_1, y_2, \ldots y_n$, удовлетворяющих условию $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, имеет место неравенство: $y_1 + y_2 + \ldots y_n \geq n$.

4 Доказать неравенство для $n \in N$, $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

5 Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbf{N}$ и n – четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

6 Пусть A – множество чисел, противоположных по знаку чисел из множества B. Докажите, что

$$\sup A=-\inf B,\ \inf A=-\sup B.$$

Задания для домашней работы

1 Используя метод математической индукции, докажите равенство $n \in \mathbf{N}$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2 Докажите, что при любом натуральном n число n^3+5n кратно 3.

3. Используя метод математической индукции, докажите неравенства $n \in \mathbf{N}$:

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $(n \geq 2)$, б) $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $(n \geq 2)$.

4 Используя метод математической индукции, докажите неравенство

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},\ \text{при } x_k \geq 0,\ x=\overline{1,n}.$$

5 Найти точную нижнюю грань интервала $(0;1)$.

6 Пусть $X, Y \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset X$, X – ограничено сверху. Доказать, что Y также ограничено сверху и $\sup Y \leq \sup X$.

7 Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbf{N}$ и m – четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

Практическое занятие 3 Множество комплексных чисел

3.1 Понятие комплексного числа
3.2 Действия над комплексными числами

3.1 Понятие комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение вида $x+iy$, где $x, y \in \mathbf{R}$, где i удовлетворяет условию $i^2=-1$, при этом число x называется *действительной частью* а число y – *мнимой частью* комплексного числа z.

Для комплексного числа z приняты обозначения

$$z = x+iy\,,\ \operatorname{Re} z = x\,,\ \operatorname{Im} z = y\,.$$

Запись комплексного числа в виде $z=x+iy$ называется *алгебраической формой комплексного числа*. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbf{C}$. Любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число, т.е. $x = x + 0\cdot i$. Поэтому множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел: $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Отсюда

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}\,.$$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Комплексное число $z = 0 + i\cdot 0$, называется *нулем* и обозначается 0.

Понятие неравенства для комплексных чисел существует лишь в смысле отрицания равенства, т. е. $z_1 \neq z_2$ означает, что число z_1 не равно числу z_2. Понятия «меньше» и «больше» для комплексных чисел не определены.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x - iy$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

Комплексное число $z = x + iy$ геометрически изображается на плоскости $\mathbf{R}^2$ *точкой* с координатами x, y, или *вектором* $\bar{z}$, проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y. При этом координатную плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью* и обозначается $\mathbf{C}$, ось абсцисс – *действительной* осью, ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости (рисунок 3.1).

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние от точки $z(x, y)$ до начала координат и *обозначается* $|z|$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ, образованный положительным направлением оси Ox и вектором $\bar{z}$.

Обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент z ($z \neq 0$) определяется равенствами (рисунок 3.1):

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Модуль комплексного числа z определяется однозначно, а аргумент φ – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$, , называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$.

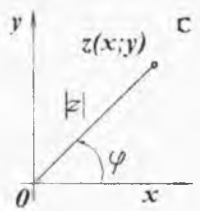

Рисунок 3.1 – Комплексная плоскость $\mathbf{C}$

Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.2 Действия над комплексными числами

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответственно действительных и мнимых частей этих чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексного числа z_1 *на* $z_1 \neq 0$ вводится как действие, обратное умножению, т.е. под *частным* $\frac{z_1}{z_2}$, $\forall z_2 \neq 0$, понимается комплексное число z, такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Частное получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на комплексно-сопряженное знаменателю число $\overline{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Возведение комплексного числа z *в степень* n, $n \in \mathbf{N}$, рассматривается как умножение z на себя n раз.

Обозначается: z^n.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любому комплексному числу $z \in \mathbf{C}$, заданному в алгебраической форме, соответствует точка $M(x; y) \in \mathbf{R}^2$, положение которой однозначно определяется ее декартовыми координатами x, y. Вводя полярные координаты (полярная ось u совпадает с положительным направлением действительной оси Ox, полюс O – с началом координат O, полярный угол φ равен углу между полярной осью и лучом OM), эту точку можно однозначно определить заданием главного значения аргумента $\arg z$ и модуля $|z|$ комплексного числа z.

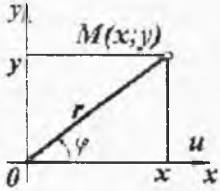

Рисунок 3.2 – Связь декартовых и полярных координат

Из рисунка 3.2 видно, что модуль $|z|$ совпадает с полярным радиусом r точки $M(x;y)$, главный аргумент $\arg z$ – с полярным углом φ, при этом $0 \le r < \infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

Очевидно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Тогда

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Тригонометрической формой комплексного числа удобно пользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbf{N}.$$

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

$$z=\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right),\ n\in\mathbf{N},$$

$$k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Показательная форма комплексного числа. Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, получаем

$$z=r\,e^{i\varphi}.$$

Выражение $z=r\,e^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа.

Здесь $r=|z|$; $\varphi=\arg z+2k\pi$; $k\in\mathbf{Z}$.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1=r_1\,e^{i\varphi}$, $z_2=r_2\,e^{i\varphi}$, то

$$z_1z_2=r_1r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Если $z_2\neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Если $n\in\mathbf{N}$, $z=r\,e^{i\varphi}$, то

$$z^n=\left(r\,e^{i\varphi}\right)^n=r^n\,e^{in\varphi}.$$

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}},\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение множества комплексных чисел.

2 Какие два комплексных числа называются равными, сопряженными? Приведите примеры.

3 Как изображаются комплексные числа на плоскости?

4 Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

5 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.

6 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.

7 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме.

Решение типовых примеров

1 Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -2 + 3i$. Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. Используя правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме, получим:

$$z_1 + z_2 = (1 - i) + (-2 + 3i) = (1 - 2) + i(3 - 1) = -1 + 2i,$$

$$z_1 - z_2 = (1 - i) - (-2 + 3i) = 1 - i + 2 - 3i = 3 - 4i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (-2 + 3i) = -2 + 2i + 3i - 3i^2 =$$
$$= -2 + 2i + 3i + 3 = 1 + 5i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(1 - i) \cdot (-2 - 3i)}{(-2 + 3i) \cdot (-2 - 3i)} = \frac{-2 + 2i - 3i - 3}{4 + 9} =$$
$$= \frac{-5 - i}{13} = -\frac{5}{13} - i\frac{1}{13}.$$

2 Представить комплексные числа $z = -1 + i$, $z = -4$, $z = i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. При решении используем определения модуля и аргумента комплексного числа.

Для комплексного числа $z = -1 + i$ имеем $x = -1$; $y = 1$. Тогда модуль равен

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Так как

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то аргумент $\mathrm{Arg}z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Отсюда главное значение аргумента $\arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Следовательно, число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

а в показательной – $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Аналогично для комплексного числа $z = -4$ имеем:

$x = -4$; $y = 0$ $\Rightarrow$ $r = 4$, $\arg z = \varphi = \pi$; $\Rightarrow$

$$z = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4e^{i\pi}.$$

Для комплексного числа $z = i$ имеем $x = 0$; $y = 1$ и

$$r = 1,\ \arg z = \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

3 Вычислить $\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{10}$.

Решение. Представим $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме. Так как $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$, то

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Подставляя в формулу $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, получим:

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{3\cdot10}{4}\pi + i\sin\frac{3\cdot10}{4}\pi\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{15}{2}\pi + i\sin\frac{15}{2}\pi\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{10}(0 - i) = -2^{10} i .$$

4 Найти все значения корня $\sqrt[5]{1-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Решение. Для комплексного числа $z = \sqrt[5]{1-i}$ имеем:

$$r = \sqrt{2}\,;\ \arg z = -\frac{\pi}{4},\ \Rightarrow\ z = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра получим:

$$\sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right),\ k = 0,1,2,3,4 .$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} - i\sin\frac{\pi}{20}\right)$,

при $k = 1$ имеем $z_1 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$,

при $k = 2$ имеем $z_2 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

при $k = 3$ имеем $z_3 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$,

при $k = 4$ имеем $z_4 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$.

Точки z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$ с центром в начале координат (рисунок 3.3). Полярный угол точки z_0 равен $\varphi_0 = -\pi/20$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $2\pi/5$ к φ_0, т.е. $\varphi_k = \varphi_0 + \dfrac{2\pi k}{5}$ при $k = 1,2,3,4$.

Рисунок 3.3 – Корни комплексного числа $\sqrt[5]{1-i}$

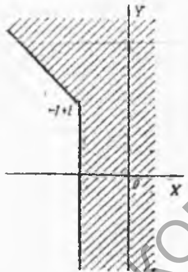

Рисунок 3.4 – Множество G

5 Изобразить на плоскости $\mathbf{C}$ множество

$$G = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le \arg\left(z + 1 - i\right) \le \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Решение. Комплексное число $z_1 = z + 1 - i = z - \left(-1 + i\right)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом – точка z. Угол между этим вектором и осью Ox есть $\arg(z+1-i)$, и он меняется в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью Ox углы в $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$. Данное множество G изображено на рисунке 3.4.

Задания для аудиторной работы

1 Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 для z_1 и z_2:

а) $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 5i$;

б) $z_1 = 5 - 2i$; $z_2 = 2 + 3i$;

в) $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 1 - 2i$;

г) $z_1 = \dfrac{-1+i}{-1-i}$; $z_2 = 2i$.

2 Вычислить:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1-i}{1+i}$; в) $\frac{2}{1-3i}$; г) $\frac{-2-i}{1+2i}$.

3 Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить числа на плоскости $\mathbf{C}$ комплексные числа:

а) $z=3i$; г) $z=-3-3i$;

б) $z=-2$; д) $z=-1+2i$;

в) $z=1-i$; е) $z=1$.

4 Изобразить на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ следующие множества:

а) $\left\{ z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z \right\}$; г) $\left\{ z\in\mathbf{C} \mid |z-1-i|\le 4 \right\}$;

б) $\left\{ z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z>0 \right\}$; д) $\left\{ z\in\mathbf{C} \,\middle|\, \left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 1 \right\}$;

в) $\left\{ z\in\mathbf{C} \,\middle|\, \arg z=\frac{\pi}{4} \right\}$; е) $\left\{ z\in\mathbf{C} \mid 0\le \operatorname{Im} z\le 1 \right\}$.

5 Вычислить:

а) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3}$; в) $(-1+i)^{10}$; д) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{25}$;

б) $(1-i)^{100}$; г) $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$; е) $(3+4i)^{3}$.

6 Найти все значения корня:

а) $\sqrt{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt[3]{-i}$; в) $\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[3]{-1+i}$.

7 Найти действительные решения уравнения:

$$(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i.$$

8 Найти все комплексные числа, удовлетворяющие уравнению: $\bar{z}=z^{2}$.

Задания для домашней работы

1 Для z_1 и z_2 найти z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2.

а) $z_1=2i$; $z_2=1-i$; в) $z_1=-1-i$; $z_2=2-i$;

б) $z_1=5-i$; $z_2=3i$; г) $z_1=5-i$; $z_2=-1+i$.

2. Выполнить действия:

а) $\frac{3-i}{5i}$; б) $\frac{2i}{1+i}$; в) $\frac{3}{2-i}$; г) $\frac{2-i}{3+4i}$.

3. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах. Изобразить числа на плоскости.

а) $z = ai$; б) $z = b$; в) $z = 2 + 2i$; г) $z = -5 + 2i$.

4 Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием:

а) $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{Im}\frac{z}{1+i} = 0$;

б) $|z + 2i| = 2$; д) $\operatorname{Re}\frac{z}{i} = 0$.

в) $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, е) $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Re} z \geq 1$.

5 Вычислить:

а) $(2-2i)^7$; в) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{80}$;

б) $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^6$; г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

6 Найти все значения корня:

а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$.

7. Найти действительные решения уравнения:

$$(x - iy)(1 - 2i) = i^5.$$

8 Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию:

а) $z = |z|$; б) $\frac{1}{|z|} \geq 1$, $z \neq 0$; в) $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 2$, $z \neq 0$.

Тема 2 Теория пределов

Практическое занятие 1 **Числовые последовательности**

1.1 Определение числовой последовательности
1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности
1.3 Монотонные последовательности
1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

1.1 Определение числовой последовательности

В курсе школьной математики кратко излагались элементы теории последовательности при изучении арифметической и геометрической прогрессий, при последовательных приближениях иррациональных чисел.

Числовой последовательностью $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел N и принимающая свои значения из множества действительных чисел $f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$.

Обозначается: $x_n = (x(1); x(2); ...; x(n); ...)$ или

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1; x_2; ...; x_n; ...).$$

Числа $x_1, x_2, x_3, ...$ называются *элементами* (*членами*) последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, x_n – *формула* общего члена последовательности, n – *номер* общего члена последовательности.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Основными *способами задания* последовательности являются: формула n-го члена, рекуррентный, словесный, графический.

Пусть даны две последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Суммой последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей.

Произведением последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на число m назыется последовательность $(m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m.

Произведением последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей.

Если все члены последовательности (y_n) отличны от нуля, то частным последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей.

1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n \le M$ ($x_n \ge m$). Числа M и m называются *верхней и нижней гранями* числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Символическая запись:

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – *ограничена сверху* $\Leftrightarrow\ \exists M \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N}\ \ x_n \le M$.

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – *ограничена снизу* $\Leftrightarrow\ \exists m \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N}\ \ x_n \ge m$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ – ограничена } \Leftrightarrow\ \exists m, M \in \mathbf{R} : \forall\ n \in \mathbf{N}\ \ m \le x_n \le M.$$

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n| < A$.

Последовательность (x_n) называется *неограниченной*, если для любого действительного числа $A > 0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| \ge A$, т.е. либо $x_n \ge A$ или $x_n < -A$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ – } \textit{неограниченна} \Leftrightarrow \ \forall\, 0 < A \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N} : |x_n| \ge A.$$

1.3 Монотонные последовательности

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *неубывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *возрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *невозрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *убывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *монотонной*, если является одной из выше перечисленных. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \text{ – б.м.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

– бесконечно малая последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена;

– сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малой последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ на ограниченную $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа $c>0$ существует такой номер $N(k)$ такой, что для всех номеров $n>N(k)$ выполняется неравенство $|x_n|>c$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.б.п.} \Leftrightarrow \ \forall c>0 \ \exists N(k): \forall n \geq N(k) \quad |x_n|>c .$$

Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обязательно бесконечно большая. Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательность. Если $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой последовательностью.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение числовой последовательности. Приведите примеры последовательностей с различным способом задания.

2 Перечислите арифметические действия над последовательностями.

3 Дайте определение ограниченной и неограниченной последовательности. Приведите примеры.

4 Какие последовательности называются монотонными, строго монотонными?

5 Может ли быть монотонной последовательностью: сумма двух немонотонных последовательностей; произведение двух немонотонных последовательностей?

6 Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Какими свойствами они обладают?

Решение типовых примеров

1 Напишите пять первых членов из следующих последовательностей:

а) $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$,

б) числа Фибоначчи $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$,

в) $y_n = \begin{cases} -n, \text{ если } n - \text{простое число}, \\ -n^2, \text{если } n - \text{составное число}. \end{cases}$

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

Решение. а) для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{4}{9}$, $x_4 = -\dfrac{5}{16}$, $x_5 = \dfrac{6}{25}$.

Поскольку $|x_n| = \left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}\right| = \dfrac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то последовательность является ограниченной.

Так как $x_3 > x_4$ и $x_4 < x_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

б) для чисел Фибоначчи имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = x_4 + x_3 = 5$.

Поскольку $x_n \geq 1 \ \forall n \in \mathbf{N}$, то последовательность ограничена снизу, но неограничена сверху. При этом $x_n \leq x_{n+1} \ \forall n \in \mathbf{N}$. Значит, числа Фибоначчи образуют неубывающую последовательность.

в) для последовательности (y_n) получим: $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -3$, $y_4 = -16$, $y_5 = -5$.

Данная последовательность ограничена сверху числом -1, но неограничена снизу. Она не является монотонной, так как $y_4 < y_3$ и $y_4 < y_5$.

2 Доказать по определению, что последовательность $\left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}; \ldots\right)$ является бесконечно малой последовательностью.

Решение. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbf{N}$, то $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$. Решая данное неравенство, получим $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{2n}$: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров n, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5$.

Начиная с шестого номера все члены последовательности $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

3 Доказать по определению, что последовательность $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty} = (1;4;9;...)$ является бесконечно большой.

Решение. Возьмем произвольное число $c > 0$. Из неравенства $|x_n| > c$ найдем $N(c)$:

$$n^2 > c \Rightarrow n > \sqrt{c}.$$

Возьмем за $N(k)$ целую часть числа $\sqrt{c}$: $N(k) = 1 + \left[\sqrt{c}\right]$. Тогда для всех номеров n, больших чем $N(c)$, выполняется неравенство $n^2 > c$.

Например, для $c = 0{,}16$ имеем $N(c) = 1 + \left[\sqrt{0{,}16}\right] = 1$. Значит, для всех членов последовательности, начиная со второго номера, выполняется неравенство $n^2 > c$. Если $c = 12$, то $N(c) = 1 + \left[\sqrt{12}\right] = 4$ и неравенство верно $\forall n > 4$.

4 Является ли неограниченная последовательность бесконечно большой?

Решение. Расcмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (1,0,2,0,3,0,4,0,...)$. Данная последовательность является неограниченной, поскольку для любого $A \in \mathbf{N}$ найдется элемент последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, для которого $x_n > A$. Однако она не является бесконечно большой, так как это неравенство не выполняется для любого $n \in \mathbf{N}$. Поэтому не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Задания для аудиторной работы

1 Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{2n+1}$; г) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$, при $n > 1$;

б) $x_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$; д) $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}$, при $n > 1$;

в) $x_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$; е) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

2 Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены с четными номерами равны 1, а члены с нечетными равны -1;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\cos \pi x = 0$.

3 Может ли быть монотонной последовательностью:

а) сумма двух немонотонных последовательностей;

б) произведение двух немонотонных последовательностей?

4 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, б) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$, в) $x_n = 2^{-n}$.

являются бесконечно малыми.

5 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \ln(n+1)$, б) $x_n = 2^{2n+1}$, в) $x_n = (-1)^n n$.

являются бесконечно большими.

Задания для домашней работы

1 Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{n+2}{n+3}$; в) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; д) $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n$:

б) $x_n = \sin n$; г): $x_n = \ln n$; е) $x_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{n^2}$.

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными?

2 Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены номерами. кратными 3 равны 1, а остальные равны 0;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\sin\frac{\pi x}{2}=0$.

3 Определить, какие из указаных последовательностей являются возрастающими, убывающими, а какие из них не являются монотонными?

а) $x_n=\frac{1}{n+1}$; г) $x_n=3^{-n}$; ж) $x_n=n^2-2n+4$;

б) $x_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$; д) $x_n=\sin\frac{1}{n^2}$; и) $x_n=\frac{2^n+(-1)^n}{n}$;

в) $x_n=2^n$; е) $x_n=\lg(1+n)$ к) $x_n=\sqrt{n+2}$.

4 Может ли быть ограниченной последовательностью:

а) сумма двух неограниченных последовательностей;

б) произведение двух неограниченных последовательностей;

в) произведение ограниченной и неограниченной последовательностей.

5 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$, б) $x_n=\frac{\arcsin n}{n}$.

являются бесконечно малыми.

5. Доказать по определению, что последовательность $x_n=\frac{n^2}{n+1}$ является бесконечно большой.

Практическое занятие 2 **Предел последовательности**

2.1 Определение и свойства предела последовательности
2.2 Критерий Коши сходимости последовательности
2.3 Замечательные пределы

2.1 Определение и свойства предела последовательности

Число $a \in \mathbf{R}$ называется *пределом* последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Символическая запись:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \;\; |x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся* (к числу a), а последовательности, не имеющие конечного предела, – *расходящимися*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что последовательность $(x_n - a)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Бесконечно большая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall\, A > 0 \;\exists N(A) : \forall n \geq N(A) \quad |x_n| > A.$$

Сходящиеся последовательности обладают следующими *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Rightarrow \ \exists M \in \mathbf{R} : |x_n| \le M;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

– частное двух сходящихся последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n};$$

– если все элементы сходящейся последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ ($x_n \le b$), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \ge b$ ($a \le b$);

– пусть последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ таковы, что $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;

– каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

2.2 Критерий Коши сходимости последовательности

Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для любого малого действительного числа ε найдется номер

$N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Символическая запись: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall\ p \in \mathbf{N}\quad \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Из определения следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{n+p} - x_n\right| = 0$.

Критерий Коши сходимости последовательности: Для того, чтобы последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

2.3 Замечательные пределы

Пределы, к которым сводятся вычисления многих пределов условно называются замечательными пределами. Ниже приводятся некоторые из них:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0,\ (a \in \mathbf{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ \ (a \in \mathbf{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение предела последовательности.

2 Сформулируйте с помощью логических символов определение расходящейся последовательности, бесконечно большой последовательности.

3 Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

4 Перечислите свойства сходящихся последовательностей.

5 Всякая ли монотонная последовательность является сходящейся?

6 Какая последовательность называется фундаментальной?

7 В чем суть критерия Коши?

Решения типовых примеров

1 Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Найдем номер $N(\varepsilon)$.

Из неравенства $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ получим $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$. Отсюда $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Если взять $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ (так как при $\varepsilon\geq 1$ получим $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]=0\notin\mathbf{N}$), то для всех номеров $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

Например, при $\varepsilon=0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 100, 101, ..., а при $\varepsilon=2$ неравенство верно $\forall\ n\in\mathbf{N}$.

2 Доказать, что ограниченная последовательность $x_n=(-1)^n$ не имеет предела.

Решение. Предположим, что она имеет предел, равный $a\in\mathbf{R}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n=a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon=\frac{1}{2}\ \exists N(\varepsilon):\forall n\geq N(\varepsilon)\quad \left|(-1)^n-a\right|<\frac{1}{2}.$$

При $n=2k$ получим $|1-a|<\frac{1}{2}$, при $n=2k-1$ получим

$$|-1-a|<\frac{1}{2}\text{ или }|1+a|<\frac{1}{2}.$$

С учетом этого $\forall n\geq N(\varepsilon)$

$$2=|1-a+a+1|\leq|1-a|+|1+a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

т. е. $2<1$. Получили противоречие.

Значит, последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

3 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ сходится к нулю, но она не является монотонной.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)\ \left|\frac{(-1)^n}{2n} - 0\right| < \varepsilon .$$

Найдем номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется это неравенство:

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \Leftrightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 .$$

Следовательно, последовательность сходится.

Так как $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = -\frac{1}{6}$, …, то последовательность не является монотонной.

4 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Решение. Покажем, что $x_n = \frac{2^n}{n!}$ монотонна.

Рассмотрим $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1} \cdot x_n$.

Следовательно, $x_{n+1} < x_n \quad \forall n > 2$, т.е. x_n – убывающая и ограничена снизу числом 0. По свойству сходимости монотонной ограниченой последовательности существует предел последовательности $x_n = \frac{2^n}{n!}$, равный b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{2}{n+1} \cdot x_n$ при $n \to \infty$, получим $b = b \cdot 0$. Отсюда $b = 0$.

5 Доказать, что $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ – сходится.

Решение. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1,$$

то x_n – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

т .е. $\ln x_n < 1$. Откуда $x_n < e$.

Значит, x_n – монотонна и ограничена. Тогда по свойству о сходимости монотонной и ограниченной последовательности x_n сходится.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}\right)$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n$.

Решение. а) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3} = \left\|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n\end{matrix}\right\| = \lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}} =$$

$$= \left[\!\left[\text{по свойствам пределов}\right]\!\right] = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)} =$$

$$= \left[\!\left[\text{по свойствам пределов}\right]\!\right] = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}8 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{8-0}{2+0} = \frac{8}{2} = 4.$$

б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\text{умножим и разделим}\\ \text{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{matrix}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

в) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{n+3}\right)\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}}=\mathrm{e}^{-4}.$$

7 Доказать, что последовательность $x_n=a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$, где $|a_k|<M\quad\forall k=\overline{1,n}$, $|q|<1$, сходится.

Решение. Для доказательства используется критерий Коши.

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и рассмотрим разность

$$\left|x_n-x_{n+p}\right|=\left|a_{n+p}q^{n+p}+a_{n+p-1}q^{n+p-1}+\ldots+a_{n+1}q^{n+1}\right|\le$$

$$\le M\left|q^{n+p}\right|+\ldots+M\left|q^{n+1}\right|\le Mp\left|q^{n+1}\right|\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, существует $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{\varepsilon}{M}\right]+1$, такое, что $\forall n<\mathbf{N}$ и $\forall p>0$ выполняется неравенство $\left|x_n-x_{n+p}\right|<\varepsilon$. Следовательно, последовательность (x_n) является фундаментальной и согласно критерию Коши она сходится.

8 Доказать, что $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ расходится.

Решение. Построим отрицание к критерию Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall N \ \exists n \geq N \ \ \exists p \geq N : \left| x_{n+p} - x_n \right| \geq \varepsilon_0 .$$

Для этого рассмотрим разность

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \left| \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right| \geq p \cdot \frac{1}{n+p} .$$

Пусть $p = n$. Тогда получим $\left| x_{2n} - x_n \right| \geq \dfrac{1}{2}$.

Значит, $\exists \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, такое, что $\forall N \ \exists n = p \geq N$, $\left| x_{2n} - x_n \right| \geq \varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит и не сходится.

9 Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

Решение. Доказательство проведем от противного.

Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin(n+2) - \sin n \right) = 0 .$$

С другой стороны

$$\sin(n+2) = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sin 1 \cdot \cos(n+1) - \sin n \right) = 0 .$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0 .$$

С учетом того, что $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$, имеем

$$\sin n = \frac{1}{\sin 1} \left(\cos n \cos 1 - \cos(n+1) \right) .$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = \frac{1}{\sin 1} \lim_{n\to\infty} \left(\cos n \cos 1 - \cos(n+1) \right) = 0 .$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$, что противоречит равенству $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$.

Следовательно, $\sin n$ расходится.

Задания для аудиторной работы

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, указав для каждого положительного числа ε такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, если x_n равно:

а) $\dfrac{2n+1}{n} - 1$; в) $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

б) $1 + \dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}$; г) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

2 Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(0.8)^n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n + 5\cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$.

3 Докажите, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ расходится.

4 Докажите, что число $a = -1$ не является пределом последовательности $x_n = \cos \pi n$.

5 Докажите по определению, что последовательность $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ имеет бесконечный предел при $n \to \infty$.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{2n+3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n^2+4n-1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+3+5+\ldots+n}$

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n-5}\right)^{3n+1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$; о) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$; п) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$.

Задания для домашней работы

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, указав для каждого положительного числа ε такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, если x_n равно:

а) $2+\dfrac{1-n}{1+n}$; в) $1+5^{-n}$;

б) $1+\dfrac{\cos\pi n}{n}$; г) $\dfrac{n^2-1}{n^2}$.

2 Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n 2 = 0$.

3 Докажите, что последовательность $x_n = \ln n$ расходится.

4 Докажите, что число $a = 0$ не является пределом последовательности $x_n = (-1)^n + 1$.

5 Выясните существование предела у следующих последовательностей и найдите его, если он существует:

а) $x_n = -\dfrac{1}{5n}$; в) $x_n = \dfrac{1}{5+(-1)^n}$; д) $x_n = \cos n$;

б) $x_n = \dfrac{1}{3^n}$; г) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, е) $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+4}{10n+251}$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+27n+30}{n^3+n^2-15}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^4+7n^2+3}{2n^4-9n^2-n+7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[7]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n+1]{3}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{n-7}\right)^{2n-1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{6}$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-1}{n-1}$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{3n-7}\right)^{2n-1}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{3n-7}\right)^{2n-1}$;

о) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$;

п) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4n]{n}$.

Практическое занятие 3 Предел функции

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции
3.2 Способы задания функции
3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши
3.4 Односторонние пределы функции

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции

Под функциями понимается отображение числовых множеств.

Пусть X – произвольное подмножество действительных чисел, $X \subset \mathbf{R}$.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция* f. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, y – *зависимой переменной*, множество X называется *областью определения* функции и *обозначается* $D(f)$, а множество $Y = \left\{ y \in \mathbf{R} \middle| \ y = f(x), x \in D(f) \right\}$ – *множеством значений* функции и *обозначается* $E(f)$.

Если о функции говорить как об отображении $f : X \to Y$, то $f(x)$ называется *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* $f(x)$. При этом множество Y называется *образом множества* X, множество X – *прообразом множества* Y.

Чтобы определить функцию $y = f(x)$, нужно задать множество X и закон (правило, соответствие) f, переводящий элементы x множества X в элементы y множества Y.

Пусть функции $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ определены на множествах X и U соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения f. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y: $x \overset{\varphi}{\mapsto} u \overset{f}{\mapsto} y$.

Таким образом, каждому значению x ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y = f(\varphi(x))$. В этом случае y называется *сложной* функцией (*композицией* функций f и φ) аргумента x. При этом функция $u = \varphi(x)$ называется *промежуточным* аргументом, x – *независимым* аргументом. *Обозначается*: $y = f(\varphi(x))$ или $f \circ \varphi$.

Обратная функция. Пусть функция $y = f(x)$ такова, что каждое значение y она принимает только при одном значении x. Такая функция называется *обратимой*. Тогда уравнение $y = f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x, т.е. каждому y соответствует единственное значение x. Это соответствие определяет функцию, которая называется *обратной* к функции f.

Обозначается: $x = f^{-1}(y)$ или f^{-1}.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к f^{-1}, т.е. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*, т.е. $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.

Если числовая функция $y = f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy, т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

3.2 Способы задания функции

Функция задается одним из следующих способов.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде $f(x_0)$ или $y|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл.

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ может быть ***неявно*** задана уравнением $F(x;y) = 0$, если $\forall x \in [a;b]$ $F(x; f(x)) = 0$.

В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x;y) = 0$ относительно y, удается получить явное задание функции $y = f(x)$.

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в *параметрическом* виде. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \in T$. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на T, то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$$

задана *параметрическими уравнениями* и пишут:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t, $t \in T$, *параметр.*

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрическими уравнениями.

Действительно,

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр t, оказываются простыми.

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1; x_2; ...; x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1; y_2; ...; y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Графиком Γ *функции* $y = f(x)$ называется множество точек $M(x; y)$ плоскости $\mathbf{R}^2$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью:

$$\Gamma = \{M(x; y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = f(x) x \in D(f)\}.$$

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем функции*, т.е. нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox, а в интервале, на котором она отрицательна,– ниже оси Ox; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox.

Четность и нечетность функции. Числовая функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O, т. е. для каждой точки $x \in D(f)$ существует точка $-x \in D(x)$;

2) для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями ***общего*** вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны.

При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x > 0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x < 0$.

Периодичность функции. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D(f)$, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $\forall\ x \in D(f)$ выполняются следующие условия:

1) $x - T,\ x + T \in D(f)$;

2) $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Число T называется *периодом* функции.

Если число T является периодом функции $y = f(x)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется *основным периодом*. Если T – период функции $y = f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной T, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k \in \mathbf{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\frac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x) = c$, $c = \text{const}$, $D(f) = \mathbf{R}$. Любое число $T \in \mathbf{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода T функция не имеет.

Монотонность функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x) \textit{ возрастает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2);$$

$$f(x) \textit{ убывает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции:

$$f(x) \textit{ не убывает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2);$$

$$f(x) \textit{ не возрастает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*, а неубывающие и невозрастающие – *монотонными*.

Ограниченность функции. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$, что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$):

$$f(x) \textit{ ограничена сверху на } X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \le M;$$

$$(f(x) \textit{ ограничена снизу на } X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \ge M).$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \le M$:

$$f(x) \text{ ограничена на } X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le M.$$

Функция $y = f(x)$ называется *неограниченной сверху (снизу)* на множестве $X \subset D(f)$ если условия ограниченности не выполняются:

$f(x)$ неограничена сверху на X $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbf{R} \; \exists x \in X : \; f(x) > M$;

(*$f(x)$ неограничена снизу на X* $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbf{R} \; \exists x \in X : \; f(x) < M$).

3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\dot{U}(\delta; x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$. В точке x_0 значение $f(x_0)$ может быть не определено.

Число A называется *пределом* (*по Гейне*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности точек $x_n \in \dot{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к A.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \in \dot{U}(\delta; x_0) : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a.$$

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0 : \forall x \;\; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определения предела функции в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Предел функции обладает следующими *свойствами*.

функция $f(x)$ в точке x_0 не может иметь больше одного предела;

– если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в некоторой окрестности $U(\delta; x_0)$;

– если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = a^n$ при любом $n \in \mathbf{N}$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$ при $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$.

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливо функциональное неравенство $f(x) \leq \varphi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливы функциональные неравенства $\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $A \in \mathbf{R}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;

– если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y = f(u(x))$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$ ($u(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$), $\lim\limits_{x \to x_0} f(u) = A$, то существует предел сложной функции $y = f(u(x))$ в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

3.4 Односторонние пределы функции

Левой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - x_0 \le 0$:

$$U(\delta; x_0 - 0) = \{x \mid -\delta < x - x_0 \le 0\}.$$

Правой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $0 \le x - x_0 < \delta$:

$$U(\delta; x_0 + 0) = \{0 \le x - x_0 < \delta\}.$$

Число A называется *левым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in U(\delta; x_0 - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in U(\delta; x_0 - 0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется *правым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in U(\delta; x_0 + 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in U(\delta; x_0 + 0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы и они равны между собой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Критерий Коши существования предела функции: для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки x_0 такая, что для любых $\forall x', x'' \in U(\delta; x_0)$ имеет место неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \iff$$

$$\iff |f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение функции, ее области определения, множества значений.

2 Перечислите способы задания функций.

3 Какими элементарными свойствами обладают функции.

4 Дайте определение сложной функции.

5 Дайте определение обратной функции. Как для взаимно однозначной функции получить обратную ей? Как располагаются графики взаимно-обратных функций?

6 Сформулируйте определения предела функции в точке по Гейне и по Коши.

7 Сформулируйте отрицания этих определений.

8 Сформулируйте определения по Коши, соответствующие следующим символическим обозначениям:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; в) ; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

9 Дайте определения односторонних пределов функции. Какая связь между односторонними пределами и пределом функции?

10 Сформулируйте критерий Коши существования предела функции.

Решение типовых примеров

1 Найти область определения D и множество значений E функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ определена, если $4-x^2>0$, т.е. если $|x|<2$. Поэтому областью определения функции является множество

$$D(f)=\left\{x\in\mathbf{R}\,\big|\,|x|<2\right\}=(-2;2).$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \ge \frac{1}{2}$ для всех x из области определения, то множество значений есть

$$E(f) = \left\{ y \middle| y \ge \frac{1}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right).$$

2 Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является неограниченной сверху на множестве $(0;1)$.

Решение. По определению:

$$f(x) \textit{ ограничена сверху на } (0;1) \Leftrightarrow$$
$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in (0;1) \Rightarrow f(x) \le M .$$

Построим отрицание для этого определения:

$$f(x) \textit{ неограничена сверху на } (0;1) \Leftrightarrow$$
$$\forall M \in \mathbf{R} : \exists x \in (0;1) \Rightarrow f(x) > M .$$

Возьмем $x = \frac{1}{1+|M|}$.

Тогда $f\left(\frac{1}{1+|M|}\right) = 1 + |M| > M$ для любого M.

Следовательно, существует такое число $x \in (0;1)$, что $f(x) > M$. Поэтому функция неограничена.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная

а) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$, б) $f(x) = x^2 + 5x$, в) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$?

Решение.

а) изменим знак аргумента, тогда получим:

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2\sin x = -f(x).$$

Следовательно, функция нечетная.

б) здесь $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x$. Таким образом, эта функция общего вида.

в) имеем

$$f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x).$$

4 Найти период функции $y = \cos 3x + \cos 4x$.

Решение. Функция $\cos 3x$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, а функция $\cos 4x$ – период $T_2 = \frac{2\pi}{4}$. Поскольку $3T_1 = 4T_2 = 2\pi$, то число 2π является периодом данной функции.

5 Показать, что функция $y = 3x + 2$ имеет обратную, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y = 3x + 2$ $\forall x \in \mathbf{R}$ монотонно возрастает. Следовательно, имеет обратную.

Решив уравнение $y = 3x + 2$ относительно x, получим $x = f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$. Поменяв местами обозначения, найдем обратную функцию $y = f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

Графики этих функций изображены на рисунке 3.1.

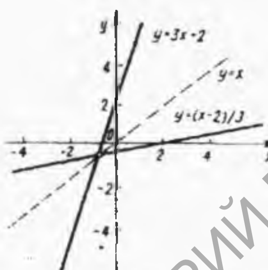

Рисунок 3. 1. – Графики функции $y = 3x + 2$ и обратной ей $y = f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

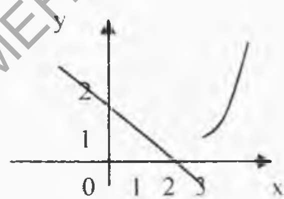

Рисунок 3. 2 – График функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$

6 Построить график функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$

Решение. При $x < 3$ функция представляется лучом прямой $y = 2 - x$, при $x \geq 3$ – параболой $y = 0{,}1x^2$. График данной функции представлен на рисунке 3.2.

7 Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (рисунок 3.3) не определена в точке $x_0=1$, но определена для любой $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность с общим членом $x_n\neq 1$ $\forall n\in\mathbf{N}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Образуем последовательность $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-1}{x_n-1}$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Так как $x_n\neq 1$, то $f(x_n)=x_n+1$ $\forall n\in\mathbf{N}$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)=2$.

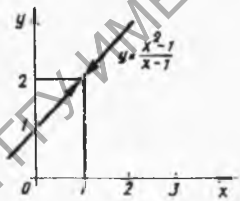

Рисунок 3.3 – График функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

8 Доказать, что функция $y(x)=\cos x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

Решение. Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению предела функции при $x\to+\infty$ по Гейне:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n>0,\ x_n\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0):\ \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, что последовательность $(\cos x_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится. Положим $x_n = \pi n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и последовательность $\cos x_n = (1,-1,1,-1,\ldots)$ расходится. Следовательно, функция $\cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

9 Используя определение предела по Коши, доказать, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

Решение. Возьмем произвольное малое $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \varepsilon$. Известно, что $\forall x \in U(\delta;0)$ выполняется неравенство $|\sin x| \le |x| < \delta = \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

10 Докажите, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \ge 0, \\ 0, \text{если } x < 0 \end{cases}$$

число 1 не является пределом при $x \to 0$.

Решение. Положим $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\forall \delta > 0$ существуют $x \ge 0$ и $x < 0$ такие, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Для $x < 0$ имеем

$$|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ \ 0 < |x - x_0| < \delta: \quad |f(x) - 1| \ge \varepsilon_0.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne 1$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти область определения следующих функций:

а) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x-2}$; б) $y = \arccos\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$; в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2-9}} - \sqrt{\sin x}$.

2 Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y=\frac{3}{x-2}$ на $(1;3)$, б) $y=\frac{\cos x}{x^2+1}$ на $\mathbf{R}$.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y=|x|-5\ln(x^2+1)$;

б) $y=x^3+3\sin x$;

в) $y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

4 Найти период следующих функций:

а) $y=\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x$, б) $y=\sin|x|$.

5 Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2} 3x=6$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4)=-2$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)=+\infty$.

6 Доказать, что функция $y(x)=\sin x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

7 Доказать, что число 1 не является пределом функции $f(x)$ при $x\to 0$, если $f(x)=\sin x$.

8 Привести пример функции, удовлетворяющей условию:

а) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$, б) $f(x)$ не имеет предела в точке $x=2$.

9 Привести пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x=0$, но их сумма, произведение, разность; частное имеет предел в точке $x=0$.

10 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=B$. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x)$, $n\in\mathbf{N}$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+1)(q(x)-2)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-q(x)}{q^2(x)+1}$; г) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}$.

11. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+\frac{1}{x}+3x-2\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$;

е) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2+6x+1}}{x^2-3x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to2}\lg\left(4x-1+\sqrt{2x+5}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{2x-7}\right)^x$.

12 Для функции $f(x)=\frac{x^2-4}{(x+2)(x+1)}$ найти:

а) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Задания для домашней работы

1 Найти область определения следующих функций:

а) $y=\log_3\left(x^2-9\right)+\arcsin(x-6)$; б) $y=\ln(\sin x)$;

в) $y=\frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$.

2 Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y=\frac{5}{x+2}$ на $(-4;4)$; б) $y=\frac{\sin x}{e^x+1}$ на $\mathbf{R}$.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $y=2x^4+5\cos x-3$; в) $y=\frac{e^{-x}-1}{e^x+1}$.

4 Найти период следующих функций:

а) $y=\cos 4x+\sin 5x$, б) $y=|\cos 2x|$.

5 Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=0$; в) $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2-3}=1$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^3-1\right)=-1$.

6 Доказать, что функция:

$$y(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

не имеет предела в точке 0.

7 Привести пример функции, удовлетворяющей условию: $f(x)$ не имеет предела в точке $x=2$, но функция $|f(x)|$ имеет предел в этой точке.

8 Привести пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x=1$, но их сумма, произведение, разность, частное имеет предел в точке $x=1$.

9 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=B$. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)+q^2(x)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\sin x}{q^2(x)+\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos f(x)$.

10 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x^3+2\cos x\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\sin x\left(4x^2+1\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$;

е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

з) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-6x}$.

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций
4.2 Сравнение асимптотического поведения функций

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

– конечная сумма бесконечно малых функций есть функция. бесконечно малая;

– произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции ограниченной $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция;

– произведение некоторого числа и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция;

– произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

– частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, есть бесконечно малая функция;

– если функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая.

4.2 Сравнение асимптотического поведения функций

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=e.$$

Под *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки* $x_0\in\mathbf{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0,$$

то они называются *бесконечно малыми одного порядка малости.*

Обозначается: $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ *ограничена*, т.е. $O(1)$ – множество ограниченных функций при $x\to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ то они называются *эквивалентными* (*асимптотически равными*) при $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim$$

$$\sim \ln(1+\alpha(x)) \sim e^{\alpha(x)} - 1, \ \sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n}\alpha(x).$$

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если при $x \to x_0$ $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Данное свойство используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$. *Обозначается*: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x) \in o(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x \to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \neq 0$, $k > 0$, то $\alpha(x)$ называется функцией *k-го порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), \ \alpha(x) = o(\beta(x)), \ \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$

называются *асимптотическими оценками*.

Ниже приведены некоторые важные пределы, которые используются при вычислении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение бесконечно малой функции.

2 Перечислите свойства бесконечно малых функций.

3 Докажите первый замечательный предел.

4 Докажите второй замечательный предел.

5 Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных функций.

Решение типовых примеров

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$; д) $\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$; и) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

Решение.

а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

б) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{2y}=[\![2y=x]\!]=$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 .$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} .$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} bx}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b}{\cos bx} =$$

$$= 1\cdot b = b .$$

д) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 0} 3\cdot\frac{\ln(1+3y)}{3y} = [\![3y = x]\!] =$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 3\cdot 1 = 3 .$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x-1)} = [\![x-5 = t]\!] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+4)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4} = 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4} .$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = \left\|\begin{array}{l}\text{введем новую}\\ \text{переменную } y = 2x\end{array}\right\| =$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2 = e^2.$$

и) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{2y}{2}} = \left[\!\left[\frac{y}{2}=x\right]\!\right] = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x \to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x) = \sin(x-2)$ при $x \to 2$;

б) $\alpha(x) = x^2 - 3x + 2$ при $x \to 1$;

в) $\alpha(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^3 - 2x^5}{5x + 3x^3 + x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin 2x}-1}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt[4]{x^4 - 7x^8}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{\arcsin^2 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt[4]{16x^4 + x^8}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x} - e^{-2x}}{2\sin^2 x - \mathrm{arctg}\, 2x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{e^{3t}-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos^2 x}{x^2}$;

н) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{2x^2}{x^2-4}\right)$.

Задания для домашней работы

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ при $x\to\infty$;

б) $\alpha(x)=\cos x$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$;

в) $\alpha(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin 4x)^2}{1-\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^2-3x+3\right)}{x^2-7x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x - \sin 2x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(x+3)}{2x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^6}}{\ln(1+3x)}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{\sin^2 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3t}{\sqrt{1-2t}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 10x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-2t}-1}{3t}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$;

н) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)$.

Практическое занятие 5 Непрерывность функции

5.1 Определение непрерывности функции
5.2 Точки разрыва и их классификация
5.3 Свойства непрерывных функций

5.1 Определение непрерывности функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется *разрывной в точке* x_0, а точка x_0 – *точкой разрыва*.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Коши*), если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ есть приращение аргумента, а $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 переменной x приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 5. 1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется *непрерывной слева (справа)* в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$$f(x) \text{ *непрерывна справа в точке* } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

$$f(x) \text{ *непрерывна слева в точке* } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

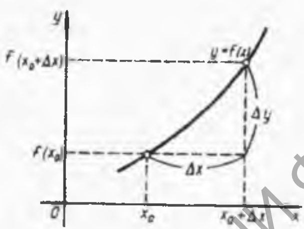

Рисунок 5. 1 – Определение непрерывности функции

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Гейне*), если для любой последовательности точек $x_n \in U(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x_0)$.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in U(\delta; x_0): \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется *непрерывной на множестве* X.

Если $X = [a; b]$, то для непрерывности функции на $[a; b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $C[a;b]$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x)\neq 0$, также непрерывны в этой точке.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Число M (m) называется *точной верхней (нижней) гранью* функции $y=f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x\in X \quad f(x)\leq M$ ($f(x)\geq m$);

2) для любого числа $M' < M$ ($m' > m$) найдется такая точка $x'\in X$, что $f(x')>M'$ ($f(x')<m'$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y=f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то пишут $\sup\limits_X f(x)=+\infty$, если снизу, то $\inf\limits_X f(x)=-\infty$.

5.2 Точки разрыва и их классификация

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)=A \text{ и } f(x_0)\neq A.$$

Вводя новую функцию

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_0, \\ A, \text{ если } x = x_0, \end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f_1(x) = A = f_1(x_0),$$

т. е. новая функция является непрерывной.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ будет *непрерывной слева*, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ – *непрерывной справа.*

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел: равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется *кусочно-*

непрерывной на числовой прямой $\mathbf{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $a_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{0,n}$, является функцией, непрерывной для любого $x \in \mathbf{R}$.

Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbf{R}$, для которой $Q(x) \neq 0$. Здесь $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Тогда справедливы следующие равенства для непрерывных функций:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right), \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x = f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

5.3 Свойства непрерывных функций

Непрерывные функции обладают следующими свойствами.

1 (устойчивость знака непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

2 (прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:

$$f(x):\ f(a)f(b)<0\ \Rightarrow\ \exists x_0\in(a;b):\ f(x_0)=0.$$

3 Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c\in[a;b]$, что $f(c)=C$.

Свойство 3 можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения между ними.

4 (ограниченность непрерывных функций). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

5 (достижение непрерывной функцией своих точных граней). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что

$$M=f(x_1)=\sup_{[a;b]}f(x),\quad m=f(x_2)=\inf_{[a;b]}f(x).$$

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определения непрерывной функции.

2 Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности.

3 Дайте определение точек разрыва.

4 Какие точки называются точками разрыва функции?

5 Дайте определение точек устранимого разрыва и точек разрыва 1 и 2 рода.

6 Перечислите основные свойства непрерывных функций: о непрерывности сложной функции, основных элементарных функций, об устойчивости знака непрерывной функции, о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, о достижении непрерывной функцией своих точных граней.

Решение типовых примеров

1 Доказать непрерывность функции $y = ax + b$.

Решение. Функция $y = ax + b$ определена при всех значениях x, т.е. $\forall x \in \mathbf{R}$. Фиксируем некоторое значение x_0 из этого множества.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ $|y(x) - y(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |ax - ax_0| = |a| \cdot |x - x_0|$.

Как только $|x - x_0| < \delta$, то $|y(x) - y(x_0)| < |a| \cdot \delta$.

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow$$

$$|y(x) - y(x_0)| < |a| \cdot \delta = |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

2 Исследовать на непрерывность сложные функции

а) $y = e^{-\frac{1}{x}}$, б) $y = \sin x^4$.

Решение. а) функция $y = e^{-\frac{1}{x}}$ является композицией следующих элементарных функций: $y = -\frac{1}{x}$ и $f = e^y$. Так как функция $y = -\frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$, то функция не является непрерывной в этой точке. В остальных точках она непрерывна как композиция непрерывных функций.

б) функция $y = \sin x^4$ является композицией функций $y = \sin z$ и $z = x^4$. Так как функции y и z непрерывны при всех значениях своих аргументов, то по теореме о непрерывности сложной функции $y = \sin x^4$ также непрерывна при всех x.

3 Доопределить функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$$

задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0.

Решение. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

непрерывна во всех точках числовой прямой кроме точки $x=0$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0$, то в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв. Этот разрыв можно устранить, положив

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

4 Доказать, что уравнение $x^3-4x+2=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке $(0,1)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-4x+2$. Она непрерывна при всех x (как сумма непрерывных функций $f_1=x^3$, $f_2=-4x$, $f_3=2$). Так как $f(0)=2>0$ и $f(1)=-1<0$, то между точками 0 и 1 найдется точка x_0, в которой эта функция обращается в нуль: $f(x_0)=0$. Поэтому x_0 – корень уравнения.

5 Найти точки разрыва функции $y=[x]$, где $[x]$ – целая часть числа, и построить график.

Решение. Функция $E(x)$ определена следующим образом: если $x=n+q$, где n – целое число, а $0\leq q\leq 1$, то $[x]=n$, т.е. функция равна целой части числа. Областью определения данной функции является множество $\mathbf{R}$. Функция $y=[x]$ терпит разрыв при каждом целочисленном значении x. Действительно, пусть $x_0=n$, тогда $y(x_0)=n$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} y=n-1$, а $\lim\limits_{x\to x_0+0} y=n$. Причем каждая из этих точек является точкой разрыва первого рода (рисунок 5. 2).

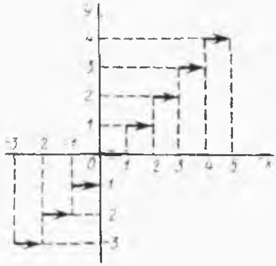

Рисунок 5. 2 – График функции $y=[x]$

Во всех точках $x\in \mathbf{R}\setminus \mathbf{Z}$ функция $y=[x]$ является непрерывной как постоянная.

6 Определить точки разрыва функции $y=e^{\frac{2}{x-1}}$.

Решение. Данная функция не определена в точке $x=1$.

Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{2}{x-1}}=0, \quad \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{2}{x-1}}=+\infty .$$

Поскольку один из односторонних пределов является бесконечностью, то $x=1$ является точкой разрыва второго рода этой функции.

Задания для аудиторной работы

1 Докажите непрерывность следующих функций:

а) $y=x^2$; б) $y=\cos x$; в) $y=\sqrt{x}$.

2 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопределите функцию $f(x)$ задав

$f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{\sin(1-x)}{x-1}$.

3 Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

4 Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } x<0,\\ x+1, \text{ при } 0\le x<1,\\ -x^2+4x-1, \text{ при } 1\le x<3,\\ 5-x, \text{ при } x\ge 3?\end{cases}$$

5 Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=a$, чтобы функция в этой точке была непрерывна:

а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x=0$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$.

6 Докажите, что уравнение $x^3+4x-6=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1,2)$.

7 Исследовать функцию $y=\dfrac{[x]}{x}$ на непрерывность, и построить график функции.

8 Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$; г) $y=\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$;

б) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$;

в) $y=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$; е) $y=\begin{cases}-2x+3, \text{ если } x<1\\ 3x+2, \text{ если } x\ge 1.\end{cases}$

Задания для домашней работы

1 Доказать непрерывность функции

а) $y=\sqrt[3]{x}$; б) $y=\sin x$; в) $y=x^3$.

2 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопредеите функцию $f(x)$ задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, б) $f(x)=(1-x)\operatorname{ctg}\pi x$.

3 Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=\sqrt{x}\sin 2x$.

4 Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=0$, чтобы функция $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$ в этой точке была непрерывна:

5 Докажите, что уравнение $x^4-2{,}15x+0{,}95=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1,2)$.

6 Исследовать функцию

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ -1 \text{ при } x<0\end{cases}$$

на непрерывность и построить график.

7 Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$, в) $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$,

б) $y=\ln|\sin x|$, г) $y=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

8 Изобразите схематически график какой-либо функции, которая в точке $x_0=3$:

а) непрерывна;

б) имеет конечный предел, но не непрерывна;

в) имеет бесконечный предел; не имеет предела:

г) непрерывна слева и имеет конечный предел справа, но не непрерывна справа;

д) имеет конечные пределы и слева, и справа, но не непрерывна ни слева, ни справа;

е) непрерывна слева и имеет бесконечный предел справа;

ж) непрерывна слева и не имеет предела справа;

и) имеет бесконечный предел слева и не имеет предела справа;

к) не имеет предела ни слева, ни справа.

ИДЗ–1 Числовые множества

1 Составьте подмножества множества A элементами которых являются $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа и числа кратные 2:

1.1 $A=\left\{-20;-1;\frac{3}{4};2;0\right\}$.

1.2 $A=\left\{-10;-\frac{3}{5};0;2;13;7\right\}$.

1.3 $A=\left\{1;2;3;17;\frac{200}{10}\right\}$.

1.4 $A=\left\{0;1;-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$.

1.5 $A=\{2,5;3,5;6,7;12\}$.

1.6 $A=\{-10^4;-10^3;-10^2;-10;0;1;10^2\}$.

1.7 $A=\left\{-7;-5;-3;-1;0;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7}\right\}$.

1.8 $A=\left\{-\frac{9}{10};-\frac{8}{10};-\frac{7}{10};-\frac{6}{10}\right\}$.

1.9 $A=\{24;25;26;27;28\}$.

1.10 $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{1}{8}\right\}$.

1.11 $A=\{-12;0;21;23;27\}$.

1.12 $A=\{2,5;2,6;2,7;2,8;2,9;3\}$.

1.13 $A=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$.

1.14 $A=\{3;7;9;11;13;15;17\}$.

1.15 $A=\{-3;3;-4;4;-5;5;-6;6\}$.

1.16 $A=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};0;-\frac{1}{3};-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$.

1.17 $A=\left\{10;100;1000;3\frac{1}{4};5\frac{2}{4}\right\}$.

1.18 $A=\left\{-3;-9;-12;-15\frac{3}{4}\right\}$.

1.19 $A=\left\{7;12;4;48;77\frac{1}{3}\right\}$.

1.20 $A=\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$.

1.21 $A=\left\{7\frac{1}{4};7\frac{2}{4};7\frac{3}{4};8\right\}$.

1.22 $A=\left\{-15\frac{1}{3};18;-4\frac{1}{4};-16\right\}$.

1.23 $A=\left\{-\frac{1}{10};-12;-8;-7;-1\right\}$.

1.24 $A=\left\{\frac{24}{3};\frac{23}{3};\frac{22}{3};\frac{21}{3};\frac{20}{3};\frac{18}{3}\right\}$.

1.25 $A=\{-40;-30;-20;-10;-1;0;1\}$.

1.26 $A=\left\{2;17;19\frac{2}{3};21\frac{4}{5};47\right\}$.

1.27 $A=\left\{-3;8;21;-100\frac{1}{3}\right\}$.

1.28 $A=\left\{2;-100;42\frac{2}{3};41;3\right\}$.

1.29 $A=\{-8;-10;-16;-17;-18;20\}$.

1.30 $A=\left\{-10;8;20\frac{3}{10};-14\frac{1}{3};27\right\}$.

2 Найди пересечение, объединение, разность множеств A и B:

2.1 $A=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$, $B=\{4;16;8;12;20;\ldots\}$.

2.2 $A=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$, $B=\{9;18;27;36;\ldots\}$.

2.3 $A=\{4;16;8;12;20;\ldots\}$, $B=\{8;16;24;\ldots\}$.

2.4 $A=\{5;10;15;20;\ldots\}$, $B=\{10;20;30;\ldots\}$.

2.5 $A=\{6;12;18;24;\ldots\}$, $B=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$.

2.6 $B=\{7;49;7^3;7^4;\ldots\}$.

2.7 $A=\{8;16;24;\ldots\}$, $B=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$.

2.8 $A=\{9;18;27;\ldots\}$, $B=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$.

2.9 $A=\{10;100;1000;\ldots\}$, $B=\{10;20;30;\ldots\}$.

2.10 $A=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$. $B=\{2;4;8;16;\ldots\}$.

2.11 $A=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$, $B=\{1;3;5;7;9;\ldots\}$.

2.12 $A=\{-10;-100;-1000;\ldots\}$, $B=\{-10;-20;-30;\ldots\}$.

2.13 $A=\{-4;-8;-12;-16;-20;\ldots\}$, $B=\{-8;-16;-24;\ldots\}$.

2.14 $A=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\right\}$, $B=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots\right\}$.

2.15 $A=\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\ldots\right\}$, $B=\left\{1;\frac{1}{9};\frac{1}{81};\ldots\right\}$.

2.16 $A=\{0{,}1;0{,}01;0{,}001;\ldots\}$, $B=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$.

2.17 $A=\{-1;-2;-3;-4;\ldots\}$, $B=\{-1;-3;-5;-7;\ldots\}$.

2.18 $A=\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$, $B=\{-10;-100;-1000;\ldots\}$.

2.19 $A=\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$. $B=\{-10;-20;-30;\ldots\}$.

2.20 $A=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{15};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$.

2.21 $A=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$, $B=\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$.

2.22 $A=\left\{\frac{1}{10};\frac{2}{10};\frac{3}{10};\ldots\right\}$. $B=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$.

2.23 $A=\{-7;-14;-21;-28;\ldots\}$, $B=\{-7;(-7)^2;(-7)^3;\ldots\}$.

2.24 $A=\{-3;-6;-9;-12;\ldots\}$, $B=\{-3;(-3)^2;(-3)^3;\ldots\}$.

2.25 $A=\{-2;-4;-6;-8;\ldots\}$, $B=\{-2;(-2)^2;(-2)^3;\ldots\}$.

2.26 $A=\{-1;1;-1;1;\ldots\}$, $B=\{-1;0;0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$.

2.27 $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{4};\frac{3}{5};\frac{4}{6};\ldots\right\}$.

2.28 $A=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$, $B=\{-0{,}1;-0{,}01;-0{,}001;\ldots\}$.

2.29 $A=\left\{1\frac{1}{3};1\frac{2}{3};2\frac{1}{3};2\frac{2}{3};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};\ldots\right\}$.

2.30 $A=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{100};\frac{1}{1000};\ldots\right\}$, $B=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$.

3 Доказать иррациональность числа:

3.1 $\sqrt{3}$.

3.2 $\sqrt{5}$.

3.3 $\sqrt{7}$.

3.4 $\sqrt{11}$.

3.5 $\sqrt{10}$.

3.6 $\sqrt{13}$.

3.7 $\sqrt{15}$.

3.8 $\sqrt{17}$.

3.9 $\sqrt{19}$.

3.10 $\sqrt{20}$.

3.11 $\sqrt{21}$.

3.12 $\sqrt{22}$.

3.13 $\sqrt{33}$.

3.14 $\sqrt{23}$.

3.15 $\sqrt{27}$.

3.16 $\sqrt{30}$.

3.17 $\sqrt{35}$.

3.18 $\sqrt{37}$.

3.19 $\sqrt{40}$.

3.20 $\sqrt{41}$.

3.21 $\sqrt{43}$.

3.22 $\sqrt{47}$.

3.23 $\sqrt{50}$.

3.24 $\sqrt{51}$.

3.25 $\sqrt{52}$.

3.26 $\sqrt{53}$

3.27 $\sqrt{57}$.

3.28 $\sqrt{59}$.

3.29 $\sqrt{60}$.

3.30 $\sqrt{61}$.

4. Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества:

4.1 $X=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7};\frac{1}{9}\right\}$.

4.2 $X = \left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{7}; -\frac{1}{9} \right\}$.

4.3 $X = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots \frac{1}{2^n} \dots \right\}$.

4.4 $X = \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \dots -\frac{1}{2^n} \dots \right\}$.

4.5 $X = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots \frac{1}{3^n} \dots \right\}$.

4.6 $X = \left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \dots -\frac{1}{3^n} \dots \right\}$.

4.7 $X = \left\{ \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \dots \frac{1}{10^n} \dots \right\}$.

4.8 $X = \left\{ -\frac{1}{10}; -\frac{1}{100}; \dots -\frac{1}{10^n} \dots \right\}$.

4.9 $X = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \dots \right\}$.

4.10 $X = \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}; \dots \right\}$.

4.11 $X = \{x \in Q : |x| < 4\}$.

4.12 $X = \{x \in Q : |x| < 1\}$.

4.13 $X = \{x \in Q : |x| \le 2\}$.

4.14 $X = \{x \in Q : |x| > 3\}$.

4.15 $X = \{x \in Q : |x| \ge 3\}$.

4.16 $X = (2;3]$.

4.17 $X = [2;3)$.

4.18 $X = (2;3)$.

4.19 $X = [2;3]$.

4.20 $X = \left\{ 1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{3}; \dots 1 + \frac{1}{n} \dots \right\}$.

4.21 $X = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{2^n + 1}{2^n} \ldots\right\}$.

4.22 $X = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \ldots; \ldots\right\}$.

4.23 $X = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \ldots\right\}$.

4.24 $X = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; -\frac{2}{4}; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{5}; \ldots\right\}$.

4.25 $X = \left\{-1; -1 - \frac{1}{2}; -1 - \frac{1}{3}; \ldots; -1 - \frac{1}{n} \ldots\right\}$.

4.26 $X = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; \ldots; -\frac{2^n - 1}{2^n} \ldots\right\}$.

4.27 $X = \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \ldots\right\}$.

4.28 $X = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \ldots\right\}$.

4.29 $X = \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}; \ldots\right\}$.

4.30 $X = \left\{0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}; \ldots\right\}$.

5 С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений $n \in \mathbf{N}$ **:**

5.1 $n^3 + 5n$ кратно 6.

5.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5.3 $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ кратно 6.

5.4 $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

5.5 $7^{2n} - 1$ кратно 24.

5.6 $2\cdot 2+3\cdot 5+\cdots(n+1)(3n-1)=\dfrac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

5.7 13^n+5 кратно 6.

5.8 $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\cdots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$.

5.9 15^n+6 кратно 7.

5.10 $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\cdots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}$.

5.11 9^n+3 кратно 4.

5.12 $1+6+20+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$.

5.13 $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

5.14 $(1-\dfrac{1}{4})\cdot(1-\dfrac{1}{9})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{n+1}{2n}$.

5.15 7^n+3n-1 кратно 9.

5.16 $(1-\dfrac{4}{1})(1-\dfrac{4}{9})(1-\dfrac{4}{25})\cdots(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2})=\dfrac{1+2n}{1-2n}$.

5.17 $7^n+12n+17$ кратно 18.

5.18 $\dfrac{1}{5\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 19}+\cdots+\dfrac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\dfrac{n}{5(7n+5)}$.

5.19 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}$.

5.20 $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\dfrac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

5.21 $6^n+20n+24$ кратно 25.

5.22 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{7}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$.

5.23 $5^n+2\cdot 3^n+5$ кратно 8.

5.24 $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{n(n+30)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+1)}{n+2)}$.

5.25 5^n-3^n+2n кратно 4.

5.26 $4^n > 7n - 5$.

5.27 $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19.

5.28 $3^n - 2^n \geq n$.

5.29 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$.

5.30 $4^n \geq n^2 + 3^n$.

6 Вычислить:

6.1 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$.

6.2 $\left(\frac{1-i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

6.3 $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^9$.

6.4 $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2+2i}\right)^{10}$.

6.5 $\left(\frac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^6$.

6.6 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^9$.

6.7 $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{4-4i}\right)^{12}$.

6.8 $\left(\frac{3+3i}{-\sqrt{3}+i}\right)^7$.

6.9 $\left(\frac{-1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$.

6.10 $\left(\frac{3+3\sqrt{3}i}{1-i}\right)^7$.

6.11 $\left(\frac{5-5i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$.

6.12 $\left(\frac{3+3i}{7-7\sqrt{3}i}\right)^{11}$.

6.13 $\left(\frac{1-i}{3\sqrt{3}-3i}\right)^8$.

6.14 $\left(\frac{6+6i}{4\sqrt{3}-4i}\right)^7$.

6.15 $\left(\frac{7-7i}{2+2\sqrt{3}i}\right)^6$.

6.16 $\left(\frac{7+7i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^5$.

6.17 $\left(\frac{1-i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^8$.

6.18 $\left(\frac{3+3i}{5-5\sqrt{3}i}\right)^7$.

6.19 $\left(\dfrac{4+4i}{5\sqrt{3}-5i}\right)^{9}$.

6.20 $\left(\dfrac{2-2i}{6\sqrt{3}+6i}\right)^{5}$.

6.21 $\left(\dfrac{4-4i}{7-7\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

6.22 $\left(\dfrac{5+5i}{3\sqrt{3}-3i}\right)^{8}$.

6.23 $\left(\dfrac{7+7i}{5\sqrt{3}-5i}\right)^{3}$.

6.24 $\left(\dfrac{2-2i}{5\sqrt{3}+5i}\right)^{8}$.

6.25 $\left(\dfrac{3-3i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^{9}$.

6.26 $\left(\dfrac{5+5i}{3+3\sqrt{3}i}\right)^{8}$.

6.27 $\left(\dfrac{8-8i}{-3+3\sqrt{3}i}\right)^{8}$.

6.28. $\left(\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{5-5i}\right)^{7}$.

6.29 $\left(\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{7+7i}\right)^{9}$.

6.30. $\left(\dfrac{3+3i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^{7}$.

7 Найти все значения корня и изобразить в комплексной плоскости все корни.

7.1 $\sqrt[4]{-3+3i}$.

7.2 $\sqrt[5]{5-5i}$.

7.3 $\sqrt[6]{5+5i}$.

7.4 $\sqrt[4]{3-3i}$.

7.5 $\sqrt[3]{5\sqrt{3}+5i}$.

7.6 $\sqrt[4]{-2+2i}$.

7.7 $\sqrt[5]{5\sqrt{3}-5i}$.

7.8 $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$.

7.9 $\sqrt[4]{-3+3i}$.

7.10 $\sqrt[6]{5+5\sqrt{3}i}$.

7.11 $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$.

7.12 $\sqrt[5]{-2-2i}$.

7.13 $\sqrt[4]{3-3i}$.

7.14 $\sqrt[6]{3\sqrt{3}-3i}$.

7.15 $\sqrt[4]{5\sqrt{3}-5i}$.

7.16 $\sqrt[7]{3-3\sqrt{3}i}$.

7.17 $\sqrt[4]{3-3i}$.

7.18 $\sqrt[6]{2+2i}$.

7.19 $\sqrt[8]{1+i}$.

7.20 $\sqrt[4]{-2+2i}$.

7.21 $\sqrt[8]{-3+3\sqrt{3}i}$.

7.22 $\sqrt[5]{7\sqrt{3}+7i}$.

7.23 $\sqrt[4]{8\sqrt{3}-8i}$.

7.24 $\sqrt[6]{-5+5\sqrt{3}i}$.

7.25 $\sqrt[3]{2-2i}$.

7.26 $\sqrt[4]{3\sqrt{3}-3i}$.

7.27 $\sqrt[6]{-2\sqrt{3}+2i}$.

7.28 $\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i}$.

7.29 $\sqrt[4]{-7\sqrt{3}-7i}$.

7.30 $\sqrt[5]{-2\sqrt{3}-2i}$.

8 Найти множества точек на плоскости C, которые определяются заданными условиями:

8.1 $|z-1|<4,\ |z+1|\geq 3$.

8.2 $|z-i|\leq 2,\ \operatorname{Re} z>1$.

8.3 $|z+1|<1,\ |z-i|<1$.

8.4 $|z-1-i|<1,\ \operatorname{Im} z>1,\ \operatorname{Re} z\geq 1$.

8.5 $|z+i|>1,\ |z|<2$.

8.6 $|z|<2,\ \dfrac{\pi}{4}\leq \arg z\leq \pi$.

8.7 $|z-1+i|>1,\ |z+2|\leq 1$.

8.8 $|z-i|<4,\ 0\leq \arg z\leq \dfrac{\pi}{2}$.

8.9 $|z+1+i|>1,\ |z-i|\leq 2$.

8.10 $|z-1|<1,\ 0\leq \operatorname{Im} z\leq 1,\ 1\leq \operatorname{Re} z\leq 2$.

8.11 $|z+2i|\leq 2,\ \operatorname{Re} z\geq 1$.

8.12 $|z+i|<2,\ |z+1+i|\geq 1$.

8.13 $|z-i|<1,\ \operatorname{Im} z>2,\ -1\leq \operatorname{Re} z\leq 1$.

8.14 $|z-2i|<2,\ -\dfrac{\pi}{4}\leq \arg z\leq \dfrac{\pi}{4}$.

8.15 $|z+i|\geq 1,\ \operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Re} z<3$.

8.16 $|z-1-2i|<1,\ |z+1+i|\le 3$.

8.17 $|z|<4,\ -1\le \operatorname{Im} z\le 1,\ 0\le \operatorname{Re} z\le 1$.

8.18 $1\le |z-1|<4,\ |z|\ge 3$.

8.19 $2\le |z-i|<4,\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$.

8.20 $|z-1+i|<4,\ |z|\ge 2$.

8.21 $|z-i|<1,\ \operatorname{Im} z\le 4,\ \operatorname{Re} z\ge 1$.

8.22 $|z|<4,\ |z+i|\ge 2$.

8.23 $|z-1|<2,\ -\dfrac{\pi}{3}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}$.

8.24 $|z-i|<1,\ \operatorname{Re} z\ge -1$.

8.25 $|z|<2,\ |z-1|\ge 1$.

8.26 $|z-1-i|<2,\ 0\le \arg z\le \pi$.

8.27 $|z-1|<1,\ 0\le \operatorname{Im} z\le 3,\ 1\le \operatorname{Re} z\le 2$.

8.28 $|z-i|<2,\ |z+1+i|\ge 3$.

8.29 $1\le |z-1|<5,\ |z|\ge 3$.

8.30 $|z-1-i|<1,\ \operatorname{Im} z>2,\ \operatorname{Re} z\ge 1$.

9 Найти решение уравнения:

9.1 $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.2 $\dfrac{5}{z-i}+\dfrac{1-3i}{1+8i}=1$.

9.3 $\dfrac{5i}{z+2i}+\dfrac{4+3i}{1+2i}=3$.

9.4 $\dfrac{6i}{z-2i}+\dfrac{3+i}{1-i}=10$.

9.5 $\dfrac{6i}{2z+i}-\dfrac{3-i}{2-i}=1$.

9.6 $\dfrac{4}{z+6i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.7 $\dfrac{2}{4z+i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.8 $\dfrac{3i}{2z-i}+\dfrac{5+i}{1+9i}=7$.

9.9 $\frac{2}{z-2i}+\frac{9+6i}{1-9i}=5$.

9.10 $\frac{1}{z-2i}+\frac{3-4i}{4+5i}=3$.

9.11 $\frac{i}{7z+9i}+\frac{2+i}{6-3i}=7$.

9.12 $\frac{3}{z+3i}+\frac{4+3i}{6+8i}=6$.

9.13 $\frac{3i}{z+2i}+\frac{9-i}{1+3i}=1$.

9.14 $\frac{i}{2z+4i}+\frac{4-5i}{2+3i}=1$.

9.15 $\frac{2i}{6z-i}+\frac{1-5i}{5-i}=8$.

9.16 $\frac{5i}{4z-3i}+\frac{2-3i}{2-i}=5$.

9.17 $\frac{5i}{z+9i}+\frac{4-3i}{2-4i}=2$.

9.18 $\frac{1}{2z+3i}+\frac{4-3i}{2-5i}=16$.

9.19 $\frac{i}{8z-4i}+\frac{3+7i}{3-8i}=4$.

9.20 $\frac{1}{13z+23i}+\frac{4+23i}{1-19i}=4$.

9.21 $\frac{4i}{z-11i}+\frac{2+7i}{2+9i}=6$.

9.22 $\frac{1}{2z+3i}+\frac{9-5i}{3+25i}=4$.

9.23 $\frac{3}{z+7i}+\frac{2-7i}{1-5i}=8$.

9.24 $\frac{1}{2z+2i}+\frac{4-4i}{2-2i}=16$.

9.25 $\frac{5i}{9z+3i}+\frac{1-8i}{3+i}=3$.

9.26 $\frac{i}{8z-8i}+\frac{3+3i}{7-7i}=4$.

9.27 $\frac{i}{z+3i}+\frac{1-5i}{1+3i}=1$.

9.28 $\frac{3}{z+i}+\frac{3+3i}{8+8i}=6$.

9.29 $\frac{1}{z-i}+\frac{6-3i}{1+i}=4$.

9.30 $\frac{6i}{z-2i}+\frac{3+3i}{1-i}=10$.

ИДЗ–2 Предел последовательности

1 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$):

1.1 $a_n = \dfrac{n+1}{n+4}, a = 1$.

1.2 $a_n = \dfrac{n-3}{2n+1}, a = 1/2$.

1.3 $a_n = \dfrac{2n-2}{n+4}, a = 2$.

1.4 $a_n = \dfrac{2n+1}{n-4}, a = 2$.

1.5 $a_n = \dfrac{n-5}{n+3}, a = 1$.

1.6 $a_n = \dfrac{n}{n-3}, a = 1$.

1.7 $a_n = \dfrac{2n+6}{2n+7}, a = 1$.

1.8 $a_n = \dfrac{2n-1}{n+4}, a = 2$.

1.9 $a_n = \dfrac{n-1}{2n+4}, a = 1/2$.

1.10 $a_n = \dfrac{n+1}{n+4}, a = 1$.

1.11 $a_n = \dfrac{3n+1}{n+6}, a = 3$.

1.12 $a_n = \dfrac{3n}{n-6}, a = 3$.

1.13 $a_n = \dfrac{n-1}{n+5}, a = 1$.

1.14 $a_n = \dfrac{4n+1}{2n+1}, a = 2$.

1.15 $a_n = \dfrac{n}{2n+4}, a = 1/2$.

1.16 $a_n = \dfrac{2n-3}{2n+5}, a = 1$.

1.17 $a_n = \dfrac{2n-3}{n+4}, a = 2$.

1.18 $a_n = \dfrac{2n+1}{n-6}, a = 2$.

1.19 $a_n = \dfrac{3n+2}{3n+5}, a = 1$.

1.20 $a_n = \dfrac{n+3}{2n+4}, a = 1/2$.

1.21 $a_n = \dfrac{4n}{n+5}, a = 4$.

1.22 $a_n = \dfrac{2n}{n-3}, a = 2$.

1.23 $a_n = \dfrac{3n-1}{n+7}, a = 3$.

1.24 $a_n = \dfrac{n+3}{n-1}, a = 1$.

1.25 $a_n = \dfrac{5n-3}{n+1}, a = 5$.

1.26 $a_n = \dfrac{3n-2}{n-6}, a = 3$.

1.27 $a_n = \dfrac{n+2}{n+4}, a = 1$.

1.28 $a_n = \dfrac{n-7}{n+3}, a = 1$.

1.29 $a_n = \dfrac{4n-1}{n+6}, a = 4$.

1.30 $a_n = \dfrac{2n+7}{n-4}, a = 2$.

2 Вычислить пределы:

2.1

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-2n-1}\right)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+4}\right)^{n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

2. 2

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5}{6n^2+n-2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-1}-2n\right)$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+4}\right)^{n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

2.3

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n+2}{n^3+n-1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-3n+6}-2n\right)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+4}\right)^{n+5}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

2.4

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-4n^2+n-1}{2n^3+n^2-3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4n-5}-n\right)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n-5}\right)^{n-3}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

2.5

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+4}{n^2-n^2+3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-n+1}\right)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+6}{n-3}\right)^{2n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\cdot(n-1)}$.

2.6

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n+1}{n^2+n-4}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-n\right)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-2}{4n+1}\right)^{n+2}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+7^{n+1}}{7^n-5^n}$.

2.7

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+1}{n^3+n-4}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-2})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+7}\right)^{2n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$.

2.8

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n+3}{n^3+n^2-1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+4}-3n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+7}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+3)!}$.

2.9

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+4}{n^2+n+1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-4n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-7}\right)^{3n+5}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

2.10

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-2}{n^2+2n-7}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-8n+5}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-5}{n+9}\right)^{2n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

2.11

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n+3}{2n^3+n^2+5n+1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n+4})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{n-6}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!-(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

2.12

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n+7}{2n^3+n^2-3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+8}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n-5}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

2.13

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+4}{2n^2+n-3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2-6}-\sqrt{2n^2-7n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+9}\right)^{5n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+(2n)}$.

2.14

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-2n+1}{n^2+4n-8}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n+8}\right)^{3n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{6^n}}$.

2.15

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+6}{n^3-1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-6}-\sqrt{4n^2-5n})$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n+9}\right)^{n+7}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^n}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$.

2.16

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-4n+3}{n^3+n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-5}\right)^{n-2}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)!-(2n+1)!}{(2n+3)!}$.

2.17

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n+7}{n^2+2n^2-3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-5n-6})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+9}\right)^{2n-3}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n-1)!+(5n)!}{(5n+2)!}$.

2.18

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+7n+3}{n^3+5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+5}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+\ldots+3n}{n^2+1}$.

2.19

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+5n-1}{2n^3+n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2-3n+6}-\sqrt{2n^2+9})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n-5}\right)^{2n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{n!(3n^2+5)}$.

2.20

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3}{n^2+4n-2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{2n-3}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

2.21

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2}-\sqrt{4n^2-5n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)$.

2.22

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+n-5}{n^3-n^2+3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+7}\right)^{n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$.

2.23

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+2}{n^2-n+7}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-2n}-\sqrt{4n^2-23})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+4}\right)^{n-7}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+9+\ldots+3n}{2+4+\ldots+2n}$.

2.24

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+5}{n^2+4n-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2-3}-3n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-9}\right)^{n-2}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2n^2+5}$.

2.25

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n-9}{2n^2+n-4}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2-5}-\sqrt{3n^2-5n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!+(2n+1)!}{(6n^2+5n-7)(2n-1)!}$.

2.26

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-6n+1}{n^2+2n-2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{16n^2-3n}-4n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+3}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n-5^n}{5^{n-1}+6^n}$.

2.27

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n+4}{n^3+6n^2-1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{7n^2-4}-\sqrt{7n^2+4n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n+4}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{8^n}}$.

2.28

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-1}{n^3+2n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2-5n}-3n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-5}\right)^{n-4}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{5n^2-4n+7}$.

2.29

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+5n+3}{n^2+5n^2-2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+4n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-4}\right)^{n+4}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+3)!+(4n+1)!}{7n^2+n-8}$.

2.30

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+3}{n^2+6n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-1}-2n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^{n-5}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+16+\ldots+4n}{1+3+\ldots+(2n-1)}$.

ИДЗ-3 Предел и непрерывность функции

1 Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

1.1 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$.

1.2 $\lim\limits_{x\to 11} \dfrac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23$.

1.3 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7$.

1.4 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x^2-24x-5}{x-5} = 26$.

1.5 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2+x-1}{x+\frac{1}{2}} = -5$.

1.6 $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13$.

1.7 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2-1}{x+3} = -6$.

1.8 $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10$.

1.9 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}} = -4$.

1.10 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x+5} = -8$.

1.11 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = 2$.

1.12 $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} = -19$.

1.13 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^2-5x+1}{x-\frac{1}{3}} = -1$.

1.14 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-5x+2}{x-\frac{1}{2}} = -3$.

1.15 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+x-1}{x-\frac{1}{3}} = 5$.

1.16 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}} = 8$.

1.17 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6$.

1.18 $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13$.

1.19 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10$.

1.20 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7$.

1.21 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}} = 5$.

1.22 $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{5}} \dfrac{10x^2+9x-7}{x+\frac{7}{5}} = 19$.

1.23 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$.

1.24 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2+x-1}{x-\frac{1}{3}}=5$.

1.25 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$.

1.26 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-\frac{1}{2}}=-3$.

1.27 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-\frac{1}{2}}=5$.

1.28 $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}=23$.

1.29 $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$.

1.30 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$.

2. Вычислить пределы функций:

2.1

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{x-2}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}3x$.

2.2

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2+7x+12}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{2}{x}}$.

д) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{7}{x-5}-\dfrac{x}{x^2-25}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}3x$.

2.3

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$,

б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x^2-64}$,

2.4

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{14+x}-4}{x^2-4}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{x\sin 7x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x+5}\right)^{x-2}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

2.5

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$,

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin 5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^{x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{ctg}\,6x$.

2.6

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x^2+3x-28}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)^{2x}$,

д) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{7}{x^2-9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{ctg}\,5x$.

2.7

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 8x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x+1}\right)^{x+2}$,

2.8

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-2x-35}{x^2-8x+7}$,

б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{x^2-25}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 7x}{x\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{3}{x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{4}{x^2-9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\cdot\operatorname{tg}\pi x$.

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{3x^2-7}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

2.9

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$,

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{3+x}-3}{x^2-36}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}5x}{\cos x-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-8}-\sqrt{x^2+9x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}4x$.

2.10

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^2-11x+30}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x-1}\right)^{5x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x^2-16}-\dfrac{3}{x-4}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

2.11

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{8-x}-1}{x^2-49}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}8x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{4x+1}\right)^{5x}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{2}$.

2.12

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+8x-9}{x^2-8x+7}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}4x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{8}{x-1}\right)^{2x}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}4x$.

2.13

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-13x-12}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{\sin^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{7}\right)^{\frac{5}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\mathrm{ctg}\,2x$.

2.14

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{5}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^3+1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}(x+\dfrac{\pi}{4})\cdot\mathrm{tg}\,2x$.

2.15

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{4x+1}\right)^{8x}$,

д) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\cdot\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{6}$.

2.16

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^3-8}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,6x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{6}{3x+4}\right)^{2x-4}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\mathrm{ctg}\,6x$.

2.17

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^3-125}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$,

2.18

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{12-x}-3}{x^2-9}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-6}\right)^{4x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+4}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\pi}{4}-x)\cdot\operatorname{tg} 2x$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4x+3}\right)^{x+6}$,

д) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{5}{x+4}-\dfrac{x}{x^2-16}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$.

2.19

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x+1}\right)^{4x+1}$,

д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5}{x^3-8}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

2.20

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-15}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{8x-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\sin 9x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-3}\right)^{4x}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

2.21

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-64}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{1-\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{5}{x}}$,

2.22

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-2}{x^2-3x+2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 8x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{12}{x}}$, д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+6}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

2.23

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2-7x+2}{x^2-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x\sin 6x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x-6}\right)^{x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{6}$.

2.25

а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+8x+15}$,

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 4x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{2x+1}\right)^{2x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to3}(3-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

д) $\lim\limits_{x\to-6}\left(\dfrac{5}{x+6}-\dfrac{x}{x^2-36}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{8}$.

2.24

а) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$,

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{x^3-27}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x+1}\right)^{x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

2.26

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2x\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{4}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{5}{x^3-8}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{7}$.

2.27

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\sin^2 5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{4}{x-10}\right)^{x-2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}7x$.

2.28

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{x^3-27}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 4x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-1}\right)^{x+4}$,

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-5x+2}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x-\dfrac{1}{2})\cdot\operatorname{tg}\pi x$.

2.29

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-10x+24}$,

б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{1-\cos 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{3}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x^2-7}-\sqrt{x^2+2}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}$.

2.30

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-64}$,

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{x^2-25}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\operatorname{tg}2x}{\sin 6x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{4}{2x-10}\right)^{3x+2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}9x$.

3 Вычислить пределы функций, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+6x)}$.

3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^6}}{\ln(1+5x)}$.

3.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\ln(1+2x)}$.

3.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{(1+4x)^4-1}$.

3.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

3.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{(1+5x)^6-1}$.

3.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$.

3.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\ln(1+6x)}$.

3.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}$.

3.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 4x}{\ln(1+8x)}$.

3.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sqrt{1+2x}-1}$.

3.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin 5x-\operatorname{arctg} x}$.

3.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+5x^4)^2-1}{e^{2x}-1}$.

3.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\arcsin 3x}$.

3.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\ln(1+6x)}$.

3.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\ln(1+x)}$.

3.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 4x-\sin 4x}$.

3.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{\ln(1+4x)}$.

3.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{(1+3x^4)^5-1}$.

3.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{4x}-1}$.

3.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x-\arcsin 2x}{\ln(1+4x)}$.

3.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+\sin 2x}-1}$.

3.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\operatorname{arctg} 3x}$.

3.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$.

3.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a\arcsin x)^2}{tg^2 4x}$.

3.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+7x)}$.

3.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 3x+\sin x}$.

3.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

4 Исследовать функцию на непрерывность (построить график):

4.1 $f(x)=\begin{cases}|x|-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.2 $f(x)=\begin{cases}3x-3 \text{ при } x<2,\\ x^2+1 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$

4.3 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 \text{ при } x<-2,\\ x-3 \text{ при } x\ge -2.\end{cases}$

4.4 $f(x)=\begin{cases}2|x| \text{ при } x<1,\\ -x^2+3 \text{ при } x\ge 1.\end{cases}$

4.5 $f(x)=\begin{cases}-2x+1 \text{ при } x\le 0,\\ x^2-1 \text{ при } x>0.\end{cases}$

4.6 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 \text{ при } x\le 0,\\ -x-3 \text{ при } x>0.\end{cases}$

4.7 $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ при } x<3,\\ -x^2 \text{ при } x\ge 3.\end{cases}$

4.8 $f(x)=\begin{cases}-x+2 \text{ при } x\le -1,\\ -x^2+2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.9 $f(x)=\begin{cases}x-1 \text{ при } x\le 2,\\ |x|+1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

4.10 $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ при } x\le 3,\\ -x^2+2 \text{ при } x>3.\end{cases}$

4.11 $f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2+1 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.12 $f(x)=\begin{cases}x^2-2 \text{ при } x\le 1,\\ x+3 \text{ при } x>1.\end{cases}$

4.13 $f(x)=\begin{cases}x+3 \text{ при } x<-1,\\ 2x^2-1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.14 $f(x)=\begin{cases}-2x-1 \text{ при } x\le 3,\\ x^2+2 \text{ при } x>3.\end{cases}$

4.15 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 \text{ при } x<1,\\ x+3 \text{ при } x\ge 1.\end{cases}$

4.16 $f(x)=\begin{cases}|x|-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.17 $f(x)=\begin{cases}-3|x| \text{ при } x\le 2,\\ x^2+1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

4.18 $f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } x\le 1,\\ -x^2 \text{ при } x>1.\end{cases}$

4.19 $f(x)=\begin{cases}2x-2 \text{ при } x<-1,\\ -2x^2 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.20 $f(x)=\begin{cases}-3x+1 \text{ при } x\le 0,\\ x^2+2 \text{ при } x>0.\end{cases}$

4.21 $f(x)=\begin{cases}2|x| \text{ при } x<-2,\\ x^2-1 \text{ при } x\ge -2.\end{cases}$

4.22 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 \text{ при } x<2,\\ x+4 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$

4.23 $f(x)=\begin{cases}2x-2 \text{ при } x\le 1,\\ -x^2+1 \text{ при } x>1.\end{cases}$

4.24 $f(x)=\begin{cases}3|x| \text{ при } x\le -2,\\ x^2-1 \text{ при } x>-2.\end{cases}$

4.25 $f(x)=\begin{cases}3|x| \text{ при } x\le 2,\\ x^2+2 \text{ при } x>2.\end{cases}$

4.26 $f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ при } x<0,\\ x^2-4 \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$

4.27 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 \text{ при } x\le 3,\\ x^2-1 \text{ при } x>3.\end{cases}$

4.28 $f(x)=\begin{cases}-2|x| \text{ при } x\le -1,\\ x^2+1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.29 $f(x)=\begin{cases}4x-2 \text{ при } x\le -1,\\ x^2-1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.30 $f(x)=\begin{cases}-3x-1 \text{ при } x\le 2,\\ x^2+2 \text{ при } x>2.\end{cases}$

5 Определить характер точки разрыва функции:

5.1 $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$.

5.2 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

5.3 $f(x)=\dfrac{9}{x-3}$.

5.4 $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$.

5.5 $f(x)=\dfrac{x}{2x+2}$.

5.6 $f(x)=\dfrac{5}{x^2-9}$.

5.7 $f(x)=\dfrac{4}{x^2-1}$.

5.8 $f(x)=\dfrac{4}{x^2-1}$.

5.9 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

5.10 $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$.

5.11 $f(x)=-\dfrac{5}{2x+4}$.

5.12 $f(x)=3^{-\frac{1}{x-2}}$.

5.13 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$.

5.14 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$.

5.15 $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$.

5.16 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$.

5.17 $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$.

5.18 $f(x)=4^{\frac{1}{x}}$.

5.19 $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$.

5.20 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

5.21 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$.

5.22 $f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}$.

5.23 $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$.

5.24 $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$.

5.25 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

5.26 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

5.27 $f(x)=2^{-\frac{1}{x}}$.

5.28 $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$.

5.29 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-9}$.

5.30 $f(x)=7^{-\frac{1}{x-5}}$.

6 Определить, имеет ли уравнение хотя бы один корень на данном отрезке:

6.1 $0.25x^4+2x-1=0$, $[-3;3]$.

6.2 $3x^4-16x^3+2=0$, $[-2;2]$.

6.3 $x^3-3x^2-9x+14=0$, $[-3;2]$.

6.4 $x^4-8x^3=0$, $[-3;4]$.

6.5 $x^4-2x^2-3=0$, $[-2;1]$.

6.6 $x^3-3x+1=0$, $[-3;3]$.

6.7 $x^3-3x^2+3x-2=0$, $[-1;3]$.

6.8 $x^3-12x+7=0$, $[0;4]$.

6.9 $x^3+x^2-4x-4=0$, $[-10;2]$.

6.10 $x^3-5x-12=0$, $[0;5]$.

6.11 $x^3+3x^2-6x-8=0$, $[-5;3]$.

6.12 $8x^3-6x^2+3x-1=0$, $[-1;4]$.

6.13 $x^3+3x^2-16x-48=0$, $[-6;5]$.

6.14 $24x^4+16x^3-3x-2=0$, $[-2;2]$.

6.15 $x^3+5x^2+15x+27=0,\ [-5;2]$.

6.16 $27x^3-15x^2+5x-1=0,\ [-3;2]$.

6.17 $x^4-7x^3+14x^2-7x=0,\ [-1;5]$.

6.18 $25x^4+66x^2-27=0,\ [-2;3]$.

6.19 $x^4+4x-1=0,\ [-3;3]$.

6.20 $2x^3-3x^2+7x-3=0,\ [-4;2]$.

6.21 $x^6+9x^3+8=0,\ [-4;0]$.

6.22 $x^3-4x^2+x+6=0,\ [-2;4]$.

6.23 $x^3+3x+4=0,\ [-3;2]$.

6.24 $10x^3-3x^2-2x+1=0,\ [-4;1]$.

6.25 $x^8-15x^4-16=0,\ [-3;3]$.

6.26 $38x^3+7x^2-8x-1=0,\ [-1;5]$.

6.27 $3x^3-2x^2+x-10=0,\ [0;4]$.

6.28 $4x^3+6x^2+4x+1=0,\ [-5;1]$.

6.29 $3x^3-13x^2+9x-2=0,\ [-1;5]$.

6.30 $x^3+5x^2-x-3=0,\ [-4;3]$.

Литература

1 Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / Л. И Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1970.

2 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

3 Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ [Текст] : учебное пособие для вузов: в 6 ч. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление / Э. И. Зверович. – Мн. : БГУ, 2003.

4 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

5 Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

6 Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1984.

7 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

8 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1 / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

9 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть первая
Введение в анализ

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04
Подписано в печать 29.06.07. Бумага писчая №1.
Формат 60х84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл. п. л. 6,88. Уч.-изд. л. 7,4. Тираж 150 экз.
Заказ № 39.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104