Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ч. 3

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Гомель 2007

а54
22.161я7
Д332

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть третья

2021

Интегральное исчисление функции
действительной переменной

УК 84260001
Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны універсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

Гомель 2007

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.
Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч. 3. Интегральное исчисление функции действительной переменной / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 149 с.

ISBN 978-985-439-264-6

Данное пособие посвящено интегральному исчислению функции действительной переменной. В нем излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

© Денисенко Т. А., Марченко Л. Н., Парукевич И. В., 2007
© УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007

ISBN 978-985-439-264-6

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Содержание

Введение..... 4
Тема 1 Неопределенный интеграл..... 5
Практическое занятие 1 Первообразная и неопределенный интеграл..... 5
Практическое занятие 2 Общие методы интегрирования.. 14
Практическое занятие 3 Интегрирование рациональных функций..... 23
Практическое занятие 4 Интегрирование иррациональностей..... 34
Практическое занятие 5 Интегрирование трансцендентных функций..... 45
Тема 2 Определенный интеграл..... 54
Практическое занятие 1 Формула Ньютона-Лейбница..... 54
Практическое занятие 2 Геометрические приложения определенного интеграла 70
Практическое занятие 3 Физические приложения определенного интеграла..... 84
Практическое занятие 4 Несобственные интегралы..... 98
Индивидуальные домашние задания..... 114
ИДЗ - 1 Неопределенный и определенный интегралы..... 114
ИДЗ - 2 Приложения определенного интеграла..... 138
Литература..... 149

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Введение

Пособие «Интегральное исчисление функции действительной переменной» является третьей частью комплекса практических пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физических факультетов вузов. В него включены темы «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл». Каждая тема разбита на части, соответствующие одному практическому занятию. Вначале каждой части даны определения, формулы и теоремы (без доказательств), необходимые для решения задач; приводятся решения типовых примеров; задания для аудиторной и домашней работ; варианты индивидуальных домашних заданий. Содержание данного пособия соответствует учебной программе по курсу «Математический анализ» для физических специальностей и связано с курсом лекций.

Пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по «Математическому анализу» и студентами в их самостоятельной работе над предметом.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Тема 1 Неопределенный интеграл

Практическое занятие 1 Первообразная и неопределенный интеграл

1.1 Определение первообразной функции
1.2 Неопределенный интеграл и его геометрический смысл
1.3 Основные свойства неопределенного интеграла
1.4 Таблица неопределенных интегралов

1.1 Определение первообразной функции

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной $f'(x)$ или дифференциала $df = f'(x)dx$ функции $f(x)$. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Таким образом, *основной задачей интегрального исчисления* является восстановление функции $F(x)$ по известной производной или дифференциалу этой функции. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т. д.

Функция $F(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}$, называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и имеет место соотношение:

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx .$$

Любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то все первообразные этой функции определяются выражением

$$F(x) + C ,$$

где C – произвольная постоянная.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.2 Неопределенный интеграл и его геометрический смысл

Операция отыскания первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется *интегрированием*.

Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной* функцией, x – *переменной интегрирования*, а C – *постоянной интегрирования*.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x)+C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с абсциссой $x = x_0$ параллельны между собой*:

$$\left(F(x)+C\right)'\Big|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

На рисунке 1.1 изображен неопределенный интеграл x^2+C от функции $f(x)=2x$:

$$\int 2xdx = x^2+C,$$

который представляет собой семейство парабол $\{y = x^2+C\}$.

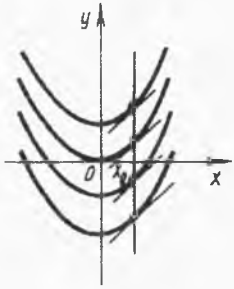

Рисунок 1.1 – Интегральные кривые $\{F(x)+C\}$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Кривые семейства $\{F(x)+C\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Oy.

1.3 Основные свойства неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл обладает *свойствами*:

– производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

– неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x)+C;$$

– постоянный множитель $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

– неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left(f_1(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx\pm\ldots\pm\int f_n(x)dx;$$

– (*инвариантность формул интегрирования*) любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad \text{или} \quad \int f(u)du = F(u)+C,$$

где u – дифференцируемая функция.

Так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то большинство из приводимых формул может быть

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

получено обращением соответствующих формул дифференцирования.

1.4 Таблица неопределенных интегралов

Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции:

1 $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

2 $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.

3 $\int e^u du = e^u + C$.

4 $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

5 $\int \sin u du = -\cos u + C$.

6 $\int \cos u du = \sin u + C$.

7 $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C, \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

8 $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C, \ x \neq \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

9 $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$.

10 $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$.

11 $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

12 $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$.

13 $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C, \ a \neq 0$.

14 $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \ a \neq 0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

15 $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-u}{a+u} \right| + C$, $a \neq 0$.

16 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$, $|u| > |a|$, $a \neq 0$.

17 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} = C$, $|u| < |a|$, $a \neq 0$.

18 $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$, $a \neq 0$

19 $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$, $a \neq 0$

Некоторые из приведенных формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей.

Если первообразная $F(x)$ функция $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл* $\int f(x)dx$ *выражается в элементарных функциях или функция* $f(x)$ *интегрируема в конечном виде*. Однако не всякий интеграл от элементарной функции выражается в элементарных функциях. Используя основные правила интегрирования, можно находить интегралы от более сложных функций.

В отличие от дифференциального исчисления, где, пользуясь таблицей производных, можно найти производную или дифференциал любой заданной функции, в интегральном исчислении нет общих приемов вычисления неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие свести данный интеграл к табличному.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение первообразной функции и перечислите свойства первообразной.

2 Приведите примеры функций, имеющих и не имеющих первообразных.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции $f(x)$.

4 Имеет ли функция

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ -2 \text{ при } x\le 0\end{cases}$$

первообразную?

5 Найдите первообразную для функции $f(x)=\sin x$, которая в точке $x=\frac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 10.

6 Известно, что две первообразные для функции $f(x)=e^x$ в точке $x=1$ отличаются на 2. На сколько отличаются эти же первообразные в точке $x=100$?

7 График какой первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ проходит через точку с координатами $(1;2\pi)$?

8 Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

9 В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

10 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

Решение типовых примеров

1 Используя основные свойства неопределенного интеграла, вычислить интегралы:

а) $\int 2^x\cdot 3^{2x}\,dx$;

б) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$;

в) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

г) $\int\frac{3x^4+2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}\,dx$

д) $\int(1-\sqrt{x})^3\,dx$;

е) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

ж) $\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx$;

и) $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

Решение. а) имеем:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int \left(2 \cdot 3^2\right)^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C .$$

б) имеем:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C .$$

в) имеем $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \right) dx =$

$$= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C .$$

г) имеем:

$$\int \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2} dx = \int \left(3x^2 - 2x + 5 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2} \right) dx =$$

$$= 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx - 7\int \frac{dx}{x} + 8\int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x - 7 \cdot \ln x + 8 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= x^3 - x^2 + 5x - 7\ln x - \frac{8}{x} + C .$$

д) имеем: $\int (1 - \sqrt{x})^3 dx = \int \left(1 - 3\sqrt{x} + 3x - \sqrt{x^3} \right) dx =$

$$= \int dx - 3\int \sqrt{x} dx + 3\int x dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx = x - 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= x - 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C .$$

е) имеем: $\int \cos^2\frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx =$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C .$$

ж) имеем: $\int \frac{x^2}{1 - x^2} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1 - x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1 - x^2} \right) dx =$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

и) имеем: $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\,dx =$

$$= \int\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx = \int|\sin x - \cos x|\,dx =$$

$$= (\sin x - \cos x)\cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

Задания для аудиторной работы

1 Используя основные правила интегрирования и таблицу интегралов, вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{(1-\sqrt{x})^3}{x^2}dx$;

б) $\int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{1}{x^7}\right)dx$;

в) $\int\frac{6x^4 + 5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 9x + 11}{x^2}dx$;

г) $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx$;

д) $\int\frac{3}{4+x^2}dx$;

е) $\int\frac{dx}{9-x^2}$;

ж) $\int\left(\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

и) $\int\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

к) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$;

л) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$;

м) $\int\frac{2-\sin x}{\sin^2 x}dx$;

н) $\int\operatorname{th}^2 x\,dx$.

2 Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку $x = 0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Задания для домашней работы

1 Используя основные правила интегрирования и таблицу интегралов, вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;

б) $\int (x^4+1)x^3dx$;

в) $\int (\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$;

д) $\int \frac{x^2-9}{x^2-8}dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

ж) $\int \left(\sqrt[5]{x^4}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$;

и) $\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

к) $\int \frac{2x+3}{3x+2}dx$;

л) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{1+x^2}\right)dx$;

м) $\operatorname{ctg}^2 x dx$;

н) $\int 5^x 7^{2x} 2^{4x}dx$;

о) $\int \sin(2x+3)dx$;

п) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Практическое занятие 2 Общие методы интегрирования

2.1 Непосредственное интегрирование
2.2 Метод замены переменной (подстановка)
2.3 Метод интегрирования по частям

2.1 Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов, основанное на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла, называется *непосредственным интегрированием*.

2.2 Метод замены переменной (подстановка)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

Теорема 1 Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T. И пусть X – множество значений функции $x=\varphi(t)$, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула замены переменной:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \qquad (2.1)$$

Суть метода замены переменной состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, учитывая $dx=\varphi'(t)dt$.

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют *«подведением» множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала*. Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\,.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x)=u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du.$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

2.3 Метод интегрирования по частям

Вычисление некоторых типов неопределенных интегралов основывается на теореме 2.

Теорема 2 Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x на промежутке X. И пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $v'(x)u(x)$ также имеет производную и справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (2.2)$$

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла $\int udv$ сводится к вычислению другого интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл $\int vdu$ более прост для вычисления, чем исходный.

Методом интегрирования по частям вычисляются интегралы:

– $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{R}$. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u=P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз;

$\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg}xdx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}xdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$. Данные интегралы вычисляются по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

– $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a, $b \in \mathbb{R}$. Они вычисляются двукратным интегрированием по частям и решением уравнения относительно искомого интеграла.

Вопросы для самоконтроля

1 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

2 Как осуществляется интегрирование с помощью замены переменной?

3 Как осуществляется интегрирование с помощью интегрирования по частям?

4 Какие подынтегральные функции удобно интегрировать по частям?

5 Требуется найти $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ для $x \in [-2,2]$. Допустима ли для этой цели замена переменной

а) $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

б) $x = \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

в) $x = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

г) $x = 2\cos t$; $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

д) $x = 2\cos t$, $\pi \le t \le 2\pi$?

Решение типовых примеров

1 С помощью метода замены переменной найти интегралы:

а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int\frac{x^3}{x^4-2}dx$;

д) $\int \mathrm{tg}x\,dx$;

е) $\int\frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$;

г) $\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$; и) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

Решение. а) имеем:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \left[1-x^2=t\right] = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}2t^{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

б) имеем: $\int \frac{x^3}{x^4-2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}d(x^4)}{(x^4)^2-2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}d\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2\left(1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right| + C.$$

в) имеем: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{-d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C.$$

г) имеем:

$$\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x} = \int \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln\left|\ln\ln x\right| + C.$$

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны універсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

д) имеем:

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = [u = \cos x] = -\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\ln|\cos x| + C .$$

е) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x + 2)} = \int \frac{\sqrt{2} d\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(1 + \left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}}\right) + C .$$

ж) по формуле (2.1) имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{3x+1} = u, x = \frac{u^2 - 1}{3} \\ 3x + 1 = u^2, dx = \frac{2}{3} u du \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{3} u du}{\frac{u^2 - 1}{3}} = 2\int \frac{du}{u^2 - 1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{3x+1} - 1}{\sqrt{3x+1} + 1}\right| + C .$$

и) имеем: $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{bmatrix} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \mathrm{tg}\, t + C =$

$$= \mathrm{tg}(\arcsin x) + C = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C .$$

2 Используя метод интегрирования по частям, вычислить следующие интегралы:

а) $\int \mathrm{arctg}\, x dx$;

б) $\int x^2 e^{-x} dx$;

г) $\int (x - 1) \ln x dx$;

д) $\int \sin(\ln x) dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

в) $\int x^2 \sin 2x dx$; г) $\int e^{-x} \cos 2x dx$.

Решение. а) с учетом формулы (2.2) имеем:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, x = v \end{bmatrix} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left|1 + x^2\right| + C .$$

б) имеем:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx\right) =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C .$$

в) имеем:

$$\int x^2 \sin 2x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \sin 2x dx, v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \int x \cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = \cos 2x dx \\ du = dx, v = -\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin x +$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2x + C .$$

г) имеем:

$$\int (x-1)\ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{1}{x}dx; \\ dv = (x-1)dx;\ v = \dfrac{(x-1)^2}{2} \end{bmatrix} =$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \int \frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-2x+1}{x}dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{(x-1)^2}{2}\ln x -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right).$$

д) имеем: $\int \sin(\ln x)dx = \begin{bmatrix} u = \sin\ln x, du = \frac{1}{x}\cos\ln x\,dx \\ dv = dx, v = x \end{bmatrix} =$

$$= x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,dx = x\sin\ln x - \left(x\cos\ln x + \int \sin\ln x dx\right).$$

Пусть $I = \int \sin\ln x dx$. Тогда

$$I = x(\sin\ln x - \cos\ln x) - I.$$

Откуда $I = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$.

е) имеем: $\int e^{-x}\cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x};\ du = -e^{x}dx; \\ dv = \cos 2x;\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$

$$= -e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cdot\sin 2x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x};\ du = -e^{x}dx; \\ dv = \sin 2x;\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx\right) =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{e^{-x}}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx.$$

Отсюда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx = -\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x + \frac{e^{-x}}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx.$$

Выразим искомый интеграл

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int e^{-x}\cos 2x dx\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{e^{-x}}{4}\left(-2\sin 2x+\cos 2x\right).$$

Тогда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx=\frac{e^{-x}\left(-2\sin 2x+\cos 2x\right)}{5}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить методом замены переменной:

а) $\int\frac{dx}{\sin x}$;

б) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$;

в) $\int\operatorname{ctg} x dx$;

г) $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$;

д) $\int x5^{-x^2}dx$;

е) $\int\frac{x^2 dx}{(1+x)^6}$;

ж) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$;

и) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

к) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

л) $\int\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh} x dx$;

м) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$;

н) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}dx$;

о) $\int x\sqrt{x-8}\,dx$;

п) $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$.

2 Вычислить методом интегрирования по частям:

а) $\int x\operatorname{arctg}^3 x dx$;

б) $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\int x^2\operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$;

д) $\int(x+4)\cos 3x dx$;

е) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Задания для домашней работы

1 Вычислить методом замены переменной:

а) $\int \frac{dx}{x+5}$;

б) $\int x\sqrt{x^2-1}dx$;

в) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

г) $\int \frac{xdx}{4+x^2}$;

д) $\int \sqrt{1+3\cos x}\sin xdx$;

е) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

ж) $\int e^{3x+1}dx$;

и) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

к) $\int x^2 e^{-x^3}dx$;

л) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$;

м) $\int \operatorname{cth} xdx$;

н) $\int e^{x^3}x^2dx$;

о) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+13}}$;

п) $\int \frac{xdx}{4x^2+5}$;

р) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$;

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}}$

2 Вычислить методом интегрирования по частям:

а) $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$;

б) $\int \sin x\ln(\operatorname{tg} x)dx$;

в) $\int x\operatorname{arcctg}\sqrt{x}dx$;

г) $\int xe^{x+1}dx$;

д) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$;

е) $\int e^x\sin^2 xdx$;

ж) $\int x\cos^2 xdx$;

и) $\int (x+1)\sin xdx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Практическое занятие 3 **Интегрирование рациональных функций**

3.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

3.2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

3.3 Интегрирование рациональных функций

3.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

Рациональной дробью $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}, \; n, m \in \mathbf{N}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$), то дробь называется *неправильной*. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$), то дробь называется *правильной*.

Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geq 2)$;

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geq 2)$.

Здесь A, a, p, q, M, N – действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Интегрирование простейших дробей проводится следующим образом:

1) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) =$

$= \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C;$

3) $\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left[\begin{array}{l} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx, \\ Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2} \end{array}\right] =$

$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$

$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$

4) $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n} = \left[\begin{array}{l} x+\frac{p}{2} = t, dx = dt, \\ x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2+a^2, \\ a = q - \frac{p^2}{4} \end{array}\right] =$

$= \int \frac{M(x+p/2) + N - Mp/2}{\left((x+p/2)^2 + q - p^2/4\right)^n}dx =$

$= M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = M\,I_0 + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)I_n.$

Вычислим интеграл I_0:

$I_0 = \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, представим его в виде

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\right).$$

Замечая, что $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} = I_{n-1}$, получаем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\right).$$

Вычислим интеграл $\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \left[\begin{array}{l} u = t, du = dt, \\ dv = \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}, v = \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}$$

Подставляя найденное выражение, имеем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Данная формула является *рекуррентной*. Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

находятся интегралы I_n, $n \geq 2$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Действительно, при $n=2$ имеем

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+a^2}+\frac{t}{2\left(t^2+a^2\right)}\right)=$$

$$=\frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

3.2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$$Q_m(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\left(x^2+px+q\right)^s,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{B_1}{(x-\beta)}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

где A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., B_l, M_1, N_1, M_2, M_2, ..., M_s, N_s – некоторые действительные числа.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Для определения коэффициентов разложения используется *метод неопределенных коэффициентов:*

– раскладывается правильная рациональная дробь на простейшие дроби;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

– простейшие дроби приводятся к общему знаменателю $Q_m(x)$;

– многочлен, получившийся в числителе, приравнивается к многочлену $P_n(x)$;

– приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества. В результате получается система m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k, M_1, N_1, \ldots, M_s, N_s$.

Если корни знаменателя рациональной дроби $Q_m(x)$ просты и действительны, вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты переменной x даются несколько частных значений (последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя).

3.3 Интегрирование рациональных функций

Всякая рациональная функция $R(x)$ представима в виде суммы многочлена $T_k(x)$ (целой части) и правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$:

$$R(x) = T_k(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \; k, \; n, \; m \in \mathbf{N}$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется рациональной дробью?

2 Какая рациональная дробь называется простейшей?

3 Как интегрируются простейшие рациональные дроби?

4 На какие простейшие множители можно разложить многочлен с действительными коэффициентами?

5 Какой вид имеет разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей?

6 В чем суть метода неопределенных коэффициентов?

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Решение типовых примеров

1 Найти интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx$;

б) $\int \frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx$;

в) $\int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx$;

г) $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx$;

д) $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx$.

Решение. а) выделим из неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате дробь на элементарные слагаемые:

$$x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Приведем к общему знаменателю в правой части

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}=\frac{Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+3\right)}.$$

Отсюда

$$1=Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2$$

Раскроем скобки в правой части и сгруппируем:

$$1=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x\cdot 3A+3B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^3: 0=A+C$,

$x^2: 0=B+D$,

$x^1: 0=3A$,

$x^0: 1=3B$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Отсюда $A=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\frac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}.$$

Тогда

$$\int\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}\right)dx=$$

$$=2\int xdx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=x^2-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C;$$

б) подынтегральное выражение является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть подынтегральной функции:

$$\frac{x^5-x+1}{x^3+x}=x^2-1+\frac{1}{x^3+x}$$

Разложим на элементарные последнюю дробь:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов, найдем неизвестные коэффициенты A, B, C. Имеем

$$1=(A+B)x^2+Cx+A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{cases}A+B=0,\\C=0,\\A=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\B=-1,\\C=0.\end{cases}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Значит,

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Подставляя полученное выражение в интеграл $\int\frac{dx}{x^3+x}$, получим

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Тогда

$$\int\frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^3+x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C;$$

в) подынтегральное выражение является правильной рациональной дробью. Разложим ее на элементарные дроби:

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2}.$$

Используя метод частных значений, получим:

$$A=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\Big|_{x=0}=1,$$

$$B=\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}\Big|_{x=1}=-\frac{3}{2},$$

$$C=\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}\Big|_{x=-1}=-\frac{1}{6},$$

$$D=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\Big|_{x=2}=\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-2}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Подставим в исходный интеграл

$$\int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{1}{6}}}\right| + C;$$

г) запишем исходный интеграл в виде:

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \int\left(x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx.$$

Подынтегральное выражение в третьем слагаемом есть правильная рациональная дробь. Разложим ее на элементарные и найдем коэффициенты:

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}.$$

Подставим в интеграл и вычислим его

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx +$$

$$+ \int\frac{dx}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int\frac{d\left(2x^2+2x+1\right)}{2x^2+2x+1} + \int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \operatorname{arctg}(2x+1) + C;$$

д) поскольку

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x+1)^2(x-1),$$

то

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

б) $\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x-1}dx$;

в) $\int \frac{x^4+5}{x^2+1}dx$;

г) $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$;

е) $\int \frac{x^3+2x+1}{x^3+1}dx$;

ж) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

и) $\int \frac{x^2-6x+8}{x-5}dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$;

л) $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$;

м) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

н) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Задания для домашней работы

Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+4}dx$;

б) $\int \frac{x^2+7}{x-3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x\left(x^2+2\right)}$;

г) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

д) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$;

е) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

ж) $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-1}dx$;

и) $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$;

к) $\int \frac{x+1}{\left(x^2+9\right)\left(x^2+1\right)}dx$;

л) $\int \frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Практическое занятие 4 **Интегрирование иррациональностей**

4.1 Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right)dx$

(m_i, n_i $\in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots$)

4.2 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

4.3 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$

(m, n, $p \in \mathbf{Q}$, a, $b \in \mathbf{R}$)

4.4 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

4.1 Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right)dx$

(m_i, n_i $\in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots$)

Через $R(u, v, w, \ldots)$ обозначается *рациональная функция* относительно переменных $u, v, w, \ldots$, т. е. выражение, которое получено из величин $u, v, w, \ldots$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

В интегралах $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$ (m_i, n_i $\in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots$) подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования x и радикалов $\sqrt[n_i]{x^{m_i}}$, $i = 1, 2, \ldots$. Для вычисления интегралов вводится замена

$$x = t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = r_1$, $\frac{m_2}{n_2} = r_2$, … являются целыми числами, и имеет место интеграл от рациональной

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

функции переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx = \int R\left(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots\right) s\, t^{s-1} dt .$$

Интегралы $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right)dx$ вычисляются с помощью замены

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s ,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$.

В результате получается интеграл от рациональной функции переменной t.

4.2 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

В общем случае интегралы данного типа сводятся к интегралам от рациональных функций подстановками Эйлера:

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c отрицательный, то используется первая подстановка Эйлера

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a} ;$$

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c положительный и $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, то используется вторая подстановка Эйлера

$$t = \pm\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1} .$$

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому в некоторых случаях удобнее применять другие методы интегрирования.

Для вычисления интеграла $I_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ выделяется полный квадрат под знаком радикала:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

и применяется замена $x+\frac{b}{2a}=u$, $dx=du$.

В результате этот интеграл сводится к табличному:

$$I_1=\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm k^2}}.$$

Для вычисления интеграла $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в числителе выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала. Тогда интеграл I_2 представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{A}{2a}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла $I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к вычислению интеграла I_1 заменой:

$$x=\frac{1}{u},\ dx=-x=\frac{1}{u^2}du.$$

При вычислении интеграла $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ также применяются тригонометрические подстановки. В этом случае

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной представляется в виде $u^2 \pm k^2$. В результате исходный интеграл приводится к одному из следующих интегралов:

$$I_4 = \int R\left(u, \sqrt{k^2-u^2}\right)du,$$

$$I_5 = \int R\left(u, \sqrt{k^2+u^2}\right)du,$$

$$I_6 = \int R\left(u, \sqrt{u^2-k^2}\right)du.$$

Интеграл $I_4 = \int R\left(u, \sqrt{k^2-u^2}\right)du$ заменой $u = k\sin t$ (или $u = k\cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_5 = \int R\left(u, \sqrt{k^2+u^2}\right)du$ заменой $u = k\,\mathrm{tg}\,t$ (или $u = k\,\mathrm{ctg}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_6 = \int R\left(u, \sqrt{u^2-k^2}\right)du$ заменой $u = k\sec t$ (или $u = k\,\mathrm{cosec}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

4.3 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ (m, n, $p \in \mathbf{Q}$, a, $b \in \mathbf{R}$)

Интегралы вида

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx \ (m, n, p \in \mathbf{Q},\ a,\ b \in \mathbf{R}).,\ a,\ b \in \mathbf{R})$$

называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m\left(a+bx^n\right)^p$. Эти интегралы выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

– если $p \in \mathbf{Z}$, то используется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

– если $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, то используется подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$;

– если $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$, то используется подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях, как было показано П.Л. Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

4.4 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Известно, что любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, т. е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Ниже приводятся примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции:

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2} dx$ – *интеграл Пуассона,*

$Si(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx$ – *интегральный синус,*

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ – *интегральный косинус,*

$li(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$ – *интегральный логарифм,*

$\int \cos(x^2) dx$, $\int \sin(x^2) dx$ – *интегралы Френеля,*

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$ – *эллиптический интеграл первого рода,*

$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$ – *эллиптический интеграл второго рода.*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Каждый из приведенных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$?

2 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$?

3 Какие подстановки называются подстановками Эйлера?

4 Для вычисления каких интегралов удобно применять тригонометрические подстановки?

5 В каких случаях можно вычислить интеграл от дифференциального бинома?

6 Приведите примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции.

Решение типовых примеров

1 Вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3}-\sqrt{2x+1}}$;

в) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$;

г) $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$;

е) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

и) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Решение. а) имеем:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}x=t^4,\\ dx=4t^3dt\end{bmatrix}=\int\frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt=4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt=$$

$$=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=4\int\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)=4t+2\ln\left(t^2+1\right)-$$

$$-4\operatorname{arctg}t+C=\left[t=\sqrt[4]{x}\right]=4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(\sqrt[2]{x}+1\right)-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$$

б) имеем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3}-\sqrt{2x+1}}=\begin{bmatrix}2x+1=t^6,\\ x=\frac{1}{2}\left(t^6-1\right),\\ dx=3t^5dt\end{bmatrix}=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=3\int\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C=\left[t=\sqrt[6]{2x+1}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

в) $$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}=\left[t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}\right]=$$

$$=-3\int\frac{dt}{t^3-1}=-\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

г) имеем:

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx=\begin{bmatrix}t=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\\ x=\dfrac{2t-1}{1-t^2},dx=2\dfrac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{-2tdt}{1-t^2}=\ln\left|1-t^2\right|+C=\left[t=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right]=$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= \ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C;$$

д) имеем:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x-1=\frac{1}{t}, \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{bmatrix} = \int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}} =$$

$$= -\int\frac{\sqrt{t^2}\,dt}{t\sqrt{-1-2t}} = -\int\frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}} = \begin{bmatrix} |x|<1 \Rightarrow x-1<0 \\ \Rightarrow\ t<0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\int\frac{-t\,dt}{t\sqrt{-1-2t}} = \int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} = \int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t) = -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C = \left[t=\frac{1}{x-1}\right] =$$

$$= -\left(-1-2\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

е) имеем:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=a\cos t; \\ dx=-a\sin t\,dt \end{bmatrix} = \int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}(-a)\sin t\,dt =$$

$$= -a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t\,dt = -a^2\int\sin^2 t\,dt = \frac{-a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \left[t=\arccos\frac{x}{a}\right] =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{4}\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right) + C =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{a^2 x}{8a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2} + C;$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ж) имеем: $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left[\begin{array}{l} a=b=1, m=0, n=4, p=-\frac{1}{4} \\ 1+x^{-4}=t^4, dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt \end{array} \right] =$

$$= -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C;$$

и) имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \left[\begin{array}{l} a=b=1; p=-\frac{3}{2} \notin \mathbf{Z}; m=-2; n=2; \\ \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}; \frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbf{Z}; \\ t^2 = x^{-2}+1; x = \left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}; dx = -\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}} 2tdt \end{array} \right] =$$

$$= -\int \left(t^2-1\right)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}} tdt = -\int \frac{t^2-1}{t^2}dt = -\int dt + \int t^{-2}dt =$$

$$= -t - \frac{1}{t} + c = \left[t = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right] = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + C.$$

2 Выразить через функции *Si(x), li(x)* и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\ln^2 x}, x<1$; б) $\int Si(x)dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{xdx}{x\ln^2 x} = \left[\begin{array}{l} u=x, dv=\frac{dx}{x\ln^2 x}, \\ du=dx, v=\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln x} = -\frac{x}{\ln x} + li(x) + C;$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

б) имеем: $\int Si(x)dx = \left[\begin{array}{l} u = Si(x),\ dv = dx, \\ du = d(Si(x)) = d\left(\int \frac{\sin x}{x}dx\right) = \frac{\sin x}{x}dx, \\ v = x \end{array}\right] =$

$= xSi(x) - \int \sin x dx = xSi(x) + \cos x + C$.

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}dx$;

б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$;

г) $\int \frac{\left(1 - \sqrt[6]{x^3}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

д) $\int \sqrt{1 - 2x - x^2}\,dx$;

е) $\int \sqrt{x^2 - 2x + 10}\,dx$;

ж $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

и) $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1 + x^2}}$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^2}$;

л) $\int \frac{dx}{\left(x^2 - 3\right)\sqrt{4 - x^2}}$;

м) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x^2}dx$;

н) $\int x^2\sqrt{x^2 - 4}dx$.

2 Выразить через функции *Si(x), li(x), $\Phi_0(x)$* и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{e^x}{x}dx, x < 0$;

б) $\int \frac{x\sin x - \cos x}{x^2}dx$;

в) $\int e^{-(2x^2 + 4x - 5)}dx$;

г) $\int \Phi_0(x)dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Задания для домашней работы

1 Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+5}$;

в) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$;

д) $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$;

е) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;

ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+4}}$;

з) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$;

и) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6}dx$;

к) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

л) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}dx$;

м) $\int x\sqrt{x^2-9}dx$

2 Выразить через функции $Si(x)$, $li(x)$, $\Phi_0(x)$ и элементарные функции интегралы:

а) $\int \frac{1-x}{x}e^{-x}dx, x>0$;

б) $\int \frac{\sin 3x}{x^3}dx\,4$;

в) $\int x^2 e^{-x^2}dx$;

г) $\int li(x)dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Практическое занятие 5 **Интегрирование трансцендентных функций**

5.1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

5.2 Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$

5.3 Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$

5.4 Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)dx$

5.1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Вычислить интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно различными методами: преобразованием подынтегрального выражения с помощью тригонометрических формул, применением методов замены переменной или интегрирования по частям.

Существует общая универсальная схема вычисления таких интегралов, основанная на универсальной тригонометрической подстановке

$$t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Этой подстановкой интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t, который всегда выражается в элементарных функциях. Функции $\sin x$, $\cos x$ и дифференциал dx выражаются через t по формулам:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$x = 2\operatorname{arctg} t\ ,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}\ .$$

С помощью универсальной подстановки удобно вычислять интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}\ .$$

Хотя универсальная подстановка всегда позволяет вычислить интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, однако ее используют сравнительно редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому в ряде случаев более удобно использовать частные подстановки.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\sin x$:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\cos x = t$.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то используют подстановку $\sin x = t$.

Если подынтегральная функция *четна* относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

5.2 Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$

Если в интеграле $\int \sin^n x \cos^m x dx$, m, $n \in \mathbf{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\ .$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если m, $n \in \mathbf{Q}$, то подстановками $t = \sin x$ или $t = \cos x$ интеграл $\int \sin^n x \cos^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, вычисляются подстановками $\operatorname{tg} x = t$ и $\operatorname{ctg} x = t$ соответственно.

Если $t = \operatorname{tg} x$, то $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Последний интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично если

$$t = \operatorname{ctg} x, \text{ то } x = \operatorname{arcctg} t, \ dx = -\frac{dx}{1+t^2},$$

поэтому

$$\int \operatorname{ctg}^n x dx = -\int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

5.3 Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$

Данные интегралы вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right), \ m, n \in \mathbf{R}$$

и сводятся к табличным.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5.4 Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$

Интегралы вида $\int R(e^x)dx$ сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $t = e^x$. При этом

$$x = \ln t\,,\ dx = \frac{dt}{t}\,.$$

Интегралы $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$ всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$. В этом случае

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}\,,\ \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,,\ dx = \frac{2dt}{1-t^2}\,.$$

Интегралы вида $\int \operatorname{ch}^n x \operatorname{sh}^m x dx$ ($m \geq 0$, $n \geq 0$, $m, n \in \mathbf{Z}$) в случае, если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1+\operatorname{ch} 2x}{2}\,,\ \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}\,,\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x\,.$$

Если m, $n \in \mathbf{Q}$, то подстановками $t = \operatorname{sh} x$ или $t = \operatorname{ch} x$ интеграл $\int \operatorname{ch}^n x \operatorname{sh}^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$? Какие возможны частные случаи?

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2 Как вычисляются интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$?

3 Какие формулы используются при вычислении интегралов вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$?

4 Какая подстановка применяется при вычислении интегралов вида $\int R(e^x) dx$?

5 Какие подстановки используются при вычислении интегралов вида $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x) dx$?

Решение типовых примеров

Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$;

б) $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$

в) $\int \cos^2 x \sin x dx$;

г) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$;

д) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

е) $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$;

ж) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x dx$;

и) $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} + 1}$;

к) $\int \mathrm{ch}^2 x \, \mathrm{sh}^3 x \, dx$.

Решение. а) подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, получим:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$=2\int\frac{dx}{2t^2+8t+8}=\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+c=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=$$

$$=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C;$$

б) подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$. Поэтому применяем подстановку $\cos x=t$. Тогда получим

$$\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{\cos 2x}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} t=\cos x,\ \sin^2 x=1-t^2, \\ \cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1, \\ dt=-\sin x dx\Rightarrow dx=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dt=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\sqrt{1-t^2}-\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{2t^2-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(2\sqrt{2}t)}{(2\sqrt{2}t)^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C$$

$$=[t=\cos x]=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C;$$

в) имеем: $\int\cos^2 x\sin x dx=-\int\cos^2 x d(\cos x)=-\frac{\cos^3 x}{3}+C$;

г) имеем:

$$\int\cos^2 x\sin^2 x dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x dx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

д) имеем:

$$\int \mathrm{tg}^2\, x dx=\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x=t;\\ x=\mathrm{arctg}\, t;\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{t^2 dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt=$$

$$=t+\mathrm{arctg}\, t+C=[t=\mathrm{tg}\, x]=\mathrm{tg}\, x+\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)+C=\mathrm{tg}\, x+x+C;$$

е) имеем:

$$\int\sin 2x\cdot\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin(-3x))dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 7x dx-\frac{1}{2}\int\sin 3x dx=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C;$$

ж) имеем:

$$\int\sin 7x\sin 5x dx=\left[\sin 5x\sin 7x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 12x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 12x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 12x}{12}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C;$$

и) имеем:

$$\int\frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1}=\left[\begin{array}{l}t=e^x;\\ x=\ln t,\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{array}\right]=\int\frac{t^3\cdot\frac{dt}{t}}{t^2+1}=\int\frac{t^2 dt}{t^2+1}=\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=t-\mathrm{arctg}\, t+C=[t=e^x]=e^x-\mathrm{arctg}(e^x)+C;$$

к) имеем:

$$\int\mathrm{ch}^2\, x\,\mathrm{sh}^3\, x\, dx=\int\mathrm{ch}^2\, x\,\mathrm{sh}^2\, x\,\mathrm{sh}\, x\, dx=\int\mathrm{ch}^2\, x(\mathrm{ch}^2\, x-1)d(\mathrm{ch}\, x)=$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= \int \mathrm{ch}^4 x\, d(\mathrm{ch}\, x) - \int \mathrm{ch}^2 x\, d(\mathrm{ch}\, x) = \frac{\mathrm{ch}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{ch}^3 x}{5} + C.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти интегралы:

а) $\int \sin 3x \cos 5x dx$;

б) $\int \cos\frac{x}{6} \cos\frac{5x}{6} dx$;

в) $\int \sin x \cos^7 x dx$;

г) $\int \frac{dx}{9 + 4\cos x}$;

д) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$;

е) $\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x\, dx$;

ж) $\int \mathrm{sh}^3 x\, dx$;

и) $\int \mathrm{ch}\, 5x\, \mathrm{sh}\, x\, dx$;

к) $\int \frac{e^{2x} dx}{5 + e^x}$;

л) $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$;

м) $\int \frac{\sin x dx}{1 - \sin x}$;

н) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$;

о) $\int \frac{dx}{2 + 3\sin x + 2\cos x}$;

п) $\int \mathrm{tg}^5 x dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$;

с) $\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}\, x\, dx$;

т) $\int x\, \mathrm{ch}\, 2x\, dx$;

у) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$;

ф) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$;

х) $\int \sqrt{\mathrm{th}\, x} dx$.

Задания для домашней работы

1 Найти интегралы:

а) $\int \cos 7x \cos 9x dx$;

б) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$;

л) $\int \sin\frac{x}{5} \sin\frac{4x}{5} dx$;

м) $\int \sin^3 x dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

в) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$;

г) $\int \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x} dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x+2\cos^2 x}}$;

е) $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x\, dx$;

ж) $\int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 3x\, dx$;

и) $\int \frac{e^x dx}{4-3e^x}$;

к) $\int \operatorname{ch}^5 x \sqrt[3]{\operatorname{sh} x} dx$;

н) $\int \frac{dx}{4+3\sin x}$;

о) $\int \frac{dx}{3+\sin x-3\cos x}$;

п) $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;

р) $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$;

с) $\int x \operatorname{sh} 3x\, dx$;

т) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x-2}}$;

у) $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Тема 2 Определенный интеграл

Практическое занятие 1 Формула Ньютона-Лейбница

1.1 Определение интеграла Римана
1.2 Критерий интегрируемости Дарбу
1.3 Основные свойства определенного интеграла
1.4 Формула Ньютона-Лейбница

1.1 Определение интеграла Римана

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$, точками $x_0, x_1, ..., x_n$ (рисунок 1.1): $a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$.

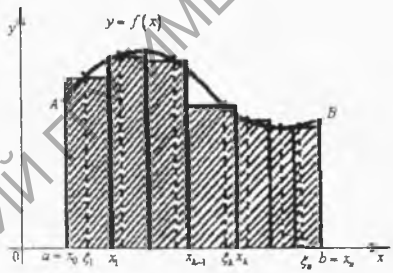

Рисунок 1.1 – Определение интеграла Римана

На каждом частичном отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму:

$$\sigma_n(f;\xi_k) = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (1.1)$$

Сумма (1.1) называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k = \overline{1,n}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n, называемая *диаметром разбиения*

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k .$$

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$ (или *интегрируемой по Риману*), если существует конечный предел при $\lambda \to 0$ интегральной суммы (1.1):

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \qquad (1.2)$$

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, a и b – соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Класс всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$, обозначается $\mathrm{R}_{[a,b]}$.

Определение интеграла Римана на языке ε - δ формулируется следующим образом.

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda < \delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство

$$|\sigma_n(f;\xi_k) - I| < \varepsilon .$$

Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т.е.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy .$$

Обозначение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ похоже на обозначение неопределенного интеграла от той же функции $\int f(x)dx$. Вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции (п.1.4). Однако между определенным и неопределенным интегралами имеется существенное различие: *определенный интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ есть некоторое число, в то время как *неопределенный интеграл* представляет собой множество всех первообразных функций $F(x)+C$ данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если $\int_a^b f(x)dx$ *существует, то функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[a;b]$.

1.2 Критерий интегрируемости Дарбу

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$.

Нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма

$$s_n(f;\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k .$$

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$S_n(f;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

Если функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Тогда суммы Дарбу $s_n(f;\xi_k)$ и $S_n(f;\xi_k)$ при любом разбиении τ_n принимают конечные значения.

Нижним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I_* грань возможных ее нижних сумм Дарбу $s_n(f;\xi_k)$:

$$I_* = \sup_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n} s_n(f;\xi_k).$$

Верхним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I^* грань возможных ее верхних сумм Дарбу $S_n(f;\xi_k)$:

$$I^* = \inf_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n} S_n(f;\xi_k).$$

Очевидно, что $I_* \le I^*$.

Теорема 2 (Критерий Дарбу). Для того чтобы функция $y=f(x)$, ограниченная на отрезке $[a;b]$, была интегрируема по Риману на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу удовлетворяли условию

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n - s_n)=0 .$$

Следствия. 1 Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k = 0,$$

где $\omega_k(f)=|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ – колебание функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k=\overline{1,n}$.

2. Если функция $y=f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и $s_n(f;\xi_k)$, $S_n(f;\xi_k)$ – ее суммы Дарбу, то

$$\lim_{\lambda\to 0} s_n = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \int_a^b f(x)dx .$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 3 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4 Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

1.3 Основные свойства определенного интеграла

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

– если нижний и верхний пределы интегрирования равны $(a=b)$, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

– если $f(x)=1$, то $\int_a^b dx = b-a$;

– при перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

– постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbf{R};$$

– определенный интеграл от суммы (разности) конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен сумме (разности) определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx;$$

– *(аддитивность)* если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и справедливо

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a \le c \le b.$$

Геометрический смысл свойства аддитивности состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$ (рисунок 1.2);

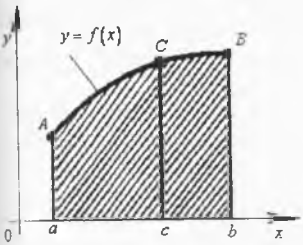

Рисунок 1.2 – Геометрический смысл свойства аддитивности

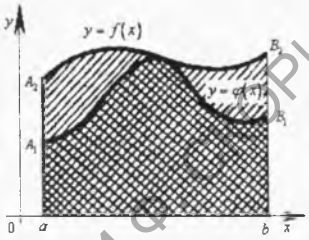

Рисунок 1.3– Геометрический смысл свойства монотонности

– *(интегрирование неравенств)* если $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0,\ a < b;$$

– *(монотонность)* если интегрируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \ge \varphi(x) \quad \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx,\ a < b.$$

Геометрическая интерпретация данного свойства: площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b (рисунок 1.3);

– если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то и функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b f(x)dx;$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

– если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a); \qquad (1.3)$$

Геометрический смысл заключается в том, что площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b равна $M(b-a)$, а площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго (рисунок 1.4).

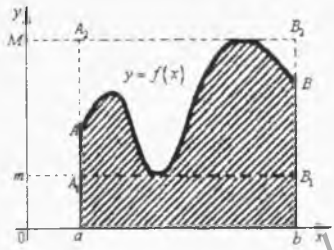

Рисунок 1.4 – Геометрический смысл неравенства (1.3)

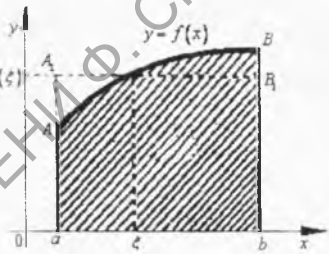

Рисунок 1.5 – Геометрический смысл неравенства (1.4)

– если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (1.4)$$

Число $f(\xi)$, называется *интегральным средним значением функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$.

Геометрически данное свойство означает, что существует такая точка $\xi \in [a;b]$, для которой площадь прямоугольника aA_1B_1b равна площади криволинейной трапеции $aABb$.

1.4 Формула Ньютона-Лейбница

Пусть в определенном интеграле нижний предел интегриро-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

вания a остается постоянным, а верхний x изменяется так, что $x \in [a;b]$. Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt = F(x),\ x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом* и является функцией верхнего предела x.

С *геометрической* точки зрения, функция $F(x)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции $aACx$ (рисунок 1.6).

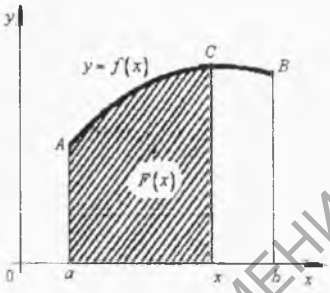

Рисунок 1.6 – Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом

Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt = G(x),\ x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным нижним пределом* и является функцией нижнего предела x.

Теорема 5 Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны на $[a;b]$.

Теорема 6 Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна в точке $x \in [a;b]$, то функции $F(x)$, $G(x)$ дифференцируемы в этой точке и

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \qquad G'(x) = \left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x = -f(x).$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a;b]$. Тогда на этом отрезке у нее существует первообразная. При этом для любой точки $x \in [a;b]$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функций $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ представляет собой неопределенный интеграл:

$$\int_a^x f(t)dt = \int f(x)dx + C.$$

Таким образом, установлена связь между неопределенным и определенным интегралами.

Теорема 7 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – какая-нибудь первообразная на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Она также записывается в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм, что позволяет вычисление определенного интеграла свести к вычислению неопределенного интеграла.

Теорема 8 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1;t_2]$, причем $\varphi([t_1;t_2]) = [a;b]$ и $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то справедлива формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

При вычислении интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются соответственно и пределы интегрирования.

Теорема 9 Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$, $v'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u\,v'\,dx = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,u'\,dx\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется интегрируемой на отрезке?

2 Сформулируйте определение интеграла Римана.

3 Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функций.

4 Дайте определения верхних и нижних сумм Дарбу.

5 Дайте определения верхних и нижних интегралов. Сформулируйте критерий интегрируемости Дарбу.

6 Сформулируйте теорему об интегрируемости непрерывной на отрезке функции.

7 Является ли монотонная на отрезке функция интегрируемой на нем?

8 Перечислите основные свойства определенного интеграла.

9 Что называется определенным интегралом с переменным верхним пределом?

10 Является ли интеграл с переменным верхним пределом непрерывной функцией?

11 Можно ли дифференцировать интеграл по переменному верхнему пределу? При каких условиях это возможно?

12 Какая формула связывает неопределенный и определенный интегралы?

13 Сформулируйте теорему о замене переменной в определенном интеграле.

14 Сформулируйте теорему об интегрировании по частям в определенном интеграле.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Решение типовых примеров

1 Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^2 dx$, рассматривая его как предел интегральных сумм.

Решение. Разделим отрезок интегрирования $[1;2]$ на n равных частей длины $\Delta x = \frac{1}{n}$. Точки деления

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{1}{n},\ x_2 = 1 + \frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n},\ x_n = 2.$$

В качестве точек ξ_k выберем, например, левые концы каждого частичного отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(x_{n-1}) = \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right).$$

Применяя формулу суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2}.$$

Тогда

$$\int_1^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

2 Оценить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Решение. При $0 \le x \le 1$ имеем $1 \le 1 + x^4 \le 2$.
Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \le 1.$$

Отсюда $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b - a = 1$.

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le I \le 1.$$

3 Найти $I'(x)$, если $I(x) = \int\limits_0^{x^2} e^{-t^2} dt$.

Решение. Используя теорему 6, получим

$$I'(x) = \left(\int\limits_0^{x^2} e^{-t^2} dt \right)' = e^{-(x^2)^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{-x^4}.$$

4 Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$;

в) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$;

г) $\int\limits_{-1}^0 e^{-2x} dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 1;$$

б) имеем:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

в) имеем:

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int_1^6 (3+x)^{-1/2} d(3+x) = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right) = 2;$$

г) имеем: $\int_{-1}^{0} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\left(e^0 - e^2\right) = \frac{e^2-1}{2}$.

5 Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Решение. Имеем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

6 Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. Имеем

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\ du = \frac{1}{x} dx; \\ dv = dx;\ v = x \end{bmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x dx = e - \int_1^e dx =$$

$$= e - x\Big|_1^e = 1.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить по определению интегралы:

а) $\int_0^5 (1+x) dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2 Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а) $\int_{-2}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\int_{-1}^{1} x^3 e^x\,dx$.

3 Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$ и $\int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ и $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) x^3, $[0;1]$; б) $\cos x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5 Оценить интегралы:

а) $\int_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\,dx$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

6 Доказать, что если функция $f(x)$ четная на $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

7 Найти производные следующих функций:

а) $\int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$; б) $\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\,dt$.

8 Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$;

б) $\int_1^2 e^{-x}\,dx$; д) $\int_2^5 \frac{dx}{3x+1}$;

в) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

9 Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int\limits_{1}^{6}\frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; б) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{1+e^{x}}}$; в) $\int\limits_{0}^{3}x^{2}\sqrt{9-x^{2}}\,dx$.

10 Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int\limits_{1}^{e}\ln^{2}x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}x\arcsin x\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\cos^{2}x}$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм:

а) $\int\limits_{0}^{10}e^{x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{x^{2}}$.

2 Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}x\ln x\,dx$; б) $\int\limits_{-3}^{2}(1+x)dx$.

3 Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^{2}}$ и $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^{3}}$; б) $\int\limits_{0}^{1}e^{-x}\sin^{2}x\,dx$ и $\int\limits_{0}^{1}e^{-x^{2}}\sin^{2}x\,dx$.

4 Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) $\sqrt[3]{x}$, $[0;1]$; б) $\cos^{3}x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5 Оценить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{(1+x^{3})(1+x)}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

6 Доказать, что если функция $f(x)$ нечетная на $[-a;a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

7 Найти производные следующих функций:

а) $\int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$; б) $\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$.

8 Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int_{1}^{2} (4x^3 - 2x + 3)\,dx$; г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$;

б) $\int_{3}^{4} \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$; д) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-8}$;

в) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; е) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

9 Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$; в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$;

б) $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; г) $\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$.

10 Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int_{0}^{1} xe^x\,dx$; б) $\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$; в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin 2x\,dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Практическое занятие 2 **Геометрические приложения определенного интеграла**

2.1 Площадь криволинейной трапеции
2.2 Длина дуги плоской кривой
2.3 Площадь поверхности вращения
2.4 Объем пространственного тела

2.1 Площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции в декартовой системе координат. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции $\{(x;y) \mid a \le x \le b;\ 0 \le y \le f(x)\}$ (рисунок 2. 1) вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (2.1)$$

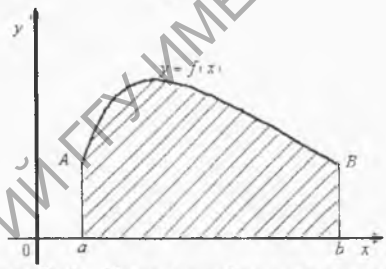

Рисунок 2. 1 –Криволинейная трапеция $aABb$

Если $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то и $\int_a^b f(x)dx \le 0$, $a < b$. Следовательно, площадь вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx .$$

Если же криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат Oy и прямыми $y = c$, $y = d$ (рисунок 2. 2), то ее площадь определяется формулами:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy=\int_c^d xdy\text{, если } \varphi(y)\geq 0 \quad \forall y\in[c;d],$$

$$S=\left|\int_c^d \varphi(y)dy\right|=-\int_c^d xdy\text{, если } \varphi(y)\leq 0 \quad \forall y\in[c;d],$$

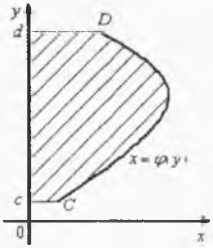

Рисунок 2. 2 – Криволинейная трапеция для функции $x=\varphi(y)$

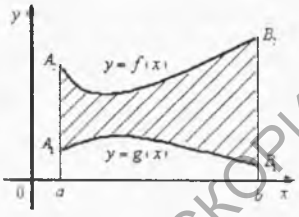

Рисунок 2. 3 – Криволинейная трапеция, ограниченная $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, то эту площадь рассматривают как разность площадей двух криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b (рисунок 2. 3). В этом случае можно воспользоваться одной из формул:

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx\text{, если } f(x)\geq g(x) \quad \forall x\in[a;b],$$

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx\text{, если } g(x)\geq f(x) \quad \forall x\in[a;b].$$

В параметрическом виде. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной уравнениями в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $t_1\leq t\leq t_2$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$, причем $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, то ее площадь S при $y(t)\geq 0$ вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \tag{2.2}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

которая получается заменой переменной

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

$$dx = x'(t)dt\ .$$

Пределы t_1, t_2 определяют из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

В полярной системе координат. Пусть фигура ограничена кривой l, заданной в полярной системе координат $\{O, r, \varphi\}$ уравнением

$$r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\ .$$

Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная линией $r = r(\varphi)$ и радиус-векторами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рисунок 2. 4).

При этом криволинейный сектор является *правильной фигурой*, если любой луч $\varphi = \varphi^*$, $\alpha \le \varphi^* \le \beta$, исходящий из полюса O, пересекает кривую $r = r(\varphi)$ не более чем в одной точке. И пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

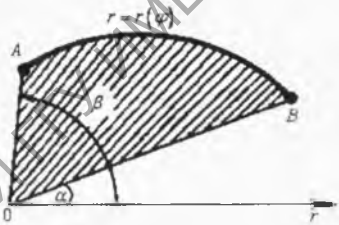

Рисунок 2. 4 – Криволинейный сектор

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi\ . \qquad (2.3)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2.2 Длина дуги плоской кривой

В декартовой системе координат. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дуга $\overset{\frown}{AB}$ – график этой функции, заключенный между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рисунок 2. 5).

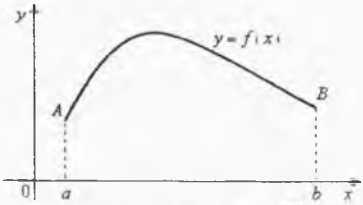

Рисунок 2. 5 –Дуга $\overset{\frown}{AB}$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то длина l дуги $\overset{\frown}{AB}$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx . \qquad (2.4)$$

Кривая $y = f(x)$ называется *спрямляемой*, если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$.

В параметрическом виде. Пусть уравнение кривой задано параметрическими уравнениями:

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

где $t \in [t_1;t_2]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t) \neq 0\ \ \forall t \in [t_1;t_2]$.

Для вычисления длины дуги кривой воспользуемся формулой $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, предварительно выполнив замену переменной: $x = x(t)$. Тогда $dx = x'(t)dt$ и $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Подставляя в формулу длины дуги, после преобразований получим:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$l = = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt\,. \qquad (2.5)$$

В полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ $\forall \varphi \in [\alpha;\beta]$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями:

$$x = r\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\varphi\ \ \forall \varphi \in [\alpha;\beta].$$

Учитывая, что $r = r(\varphi)$, получим:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi\,,\ \ y = r(\varphi)\sin\varphi\,,\ \forall \varphi \in [\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой.

Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$x_\varphi' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,,\ \ y_\varphi' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,.$$

Отсюда $(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2 = r^2 + (r')^2$. Следовательно,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi\,. \qquad (2.6)$$

2.3 Площадь поверхности вращения

В декартовой системе координат. Пусть функция $f(x)$ не отрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси Ox, имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле:

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,. \qquad (2.7)$$

В параметрическом виде. Пусть поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ \ y = y(t),$$

где $t \in [\alpha;\beta]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывны-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ми производными, причем $y(t) \geq 0$, $a \leq x(t) \leq b$ при $\alpha \leq t \leq \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. Тогда, производя в интеграле (2.7) замену переменной $x = x(t)$, после преобразований получим:

$$S_x = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \qquad (2.8)$$

В полярных координатах. Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, где $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha; \beta]$.

Тогда, учитывая формулы $\forall \varphi \in [\alpha; \beta]$ $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, из (2.8) получим:

$$S = 2\pi \int_a^b r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (2.9)$$

2.4 Объем пространственного тела

Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям. Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью. И пусть известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс (рисунок 2. 6). Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox. С изменением x площадь S поперечного сечения изменяется, т. е. является некоторой функцией от x. Обозначим ее $S(x)$.

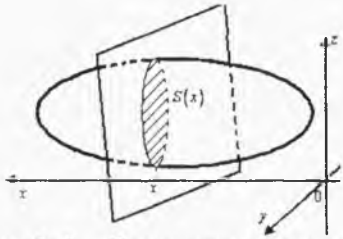

Рисунок 2. 6 – Пространственное тело с поперечным сечением $S(x)$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, где a и b – абсциссы крайних сечений тела T. Объем тела, заключенного между двумя плоскостями $x=a$ и $x=b$, с площадью $S=S(x)$ поперечного сечения вычисляется по формуле:

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

Вычисление объемов тел вращения. Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$ (рисунок 2. 7).

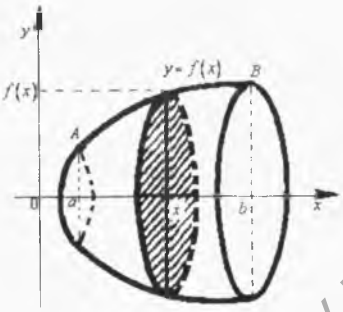

Рисунок 2. 7 – Тело, образованное вращением $aABb$ вокруг оси $0x$

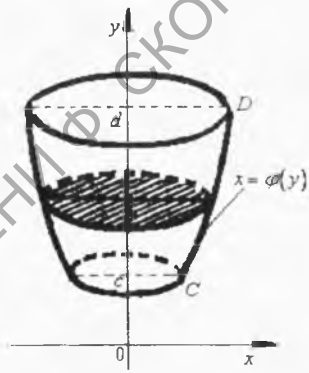

Рисунок 2. 8 – Тело, образованное вращением $cCDd$ вокруг оси $0y$

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox, получим круги, радиусы которых равны модулю ординат $y=f(x)$ точек данной кривой. Следовательно, площадь сечения рассматриваемого тела равна $S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$.

Применяя формулу $V=\int_a^b S(x)dx$, получаем формулу для вычисления объема тела вращения

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b (f(x))^2dx.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рисунок 2. 8), то его объем вычисляется по формуле $V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy$,

где $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, – уравнение кривой CD.

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi \, d\varphi .$$

Вопросы для самоконтроля

1 По каким формулам вычисляются площади криволинейных трапеций, ограниченных линиями, заданными в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат?

2 Приведите формулы для вычисления длин дуги кривой, заданной в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат.

3 Как вычисляется площадь поверхности тела?

4 Как вычисляется объем пространственных тел?

Решение типовых примеров

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной аркой синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = 0$ (рисунок 2.9).

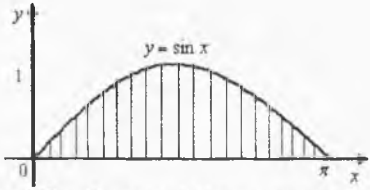

Рисунок 2.9 – Фигура, ограниченная линиями $y = \sin x$, $y = 0$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Решение. По формуле (2.1) находим:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2.$$

2 Вычислить площадь эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где $0\le t\le 2\pi$ (рисунок 2. 10).

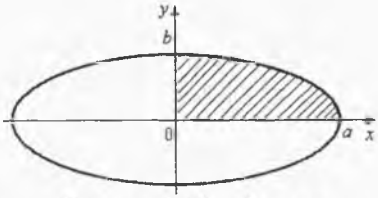

Рисунок 2. 10 – Эллипс

Решение. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому делят его на четыре одинаковые части. Следовательно, $S=4S_1$, где S_1 – площадь части эллипса, расположенная в первом квадранте. Тогда

$$S=4S_1=4\int_0^a y dx=\begin{bmatrix} x=a\cos t,\ y=b\sin t, \\ dx=-a\sin t\,dt, \\ x=0\ \Rightarrow\ t=\dfrac{\pi}{2}, \\ x=a\ \Rightarrow\ t=0. \end{bmatrix}=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt=$$

$$=-2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

3 Вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$, где $0\le\varphi\le 2\pi$.

Решение. По формуле (2.3) получим:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi}1d\varphi+2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi++\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right)=$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}+2\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

4 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{\frac{3}{2}}$, если $0\le x\le 5$.

Решение. По формуле (2.4) имеем:

$$l=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5=\frac{235}{27}.$$

5 Вычислить длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, если $0\le t\le 2\pi$.

Решение. По формуле (2.5) в силу симметричности астроиды относительно осей получим:

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\begin{bmatrix}x'=-3a\cos^2 t\sin t,\\ y'=3a\cos t\sin^2 t\end{bmatrix}=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=6a.$$

6 Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$.

Решение. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла $0\le\varphi\le 2\pi$. Поэтому по формуле (2.6):

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$

$$=a\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right).$$

7 Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, вокруг оси Ox.

Решение. По формуле (2.8) имеем:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + (a(1-\cos t))^2}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2 .$$

8 Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Решение. Пересечем эллипсоид плоскостью $x = h$. В сечении получим эллипс

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \\ x = h. \end{cases}$$

Площадь поперечного сечения равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)$.

Тогда $V = \displaystyle\int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)dh = \pi bc\left(x - \frac{h^2}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc$.

9 Вычислить объем тела, получающегося от вращения вокруг оси одной арки синусоиды $y = \sin x$.

Решение. Имеем

$$S = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x x dx\right) = \frac{\pi^2}{2} .$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x$ и $x = 4y$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{27}{x^2 + 9}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

5 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$$

6 Найти площадь петли кривой $x = a(t^2 + 1),\ y = b(t^3 - 3t)$.

7 Найти площадь одного лепестка кривой $r = a\sin 2\varphi$.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$, начиная с $\varphi = 0$.

9 Найти длину параболы $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 1$.

10 Найти длину одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

11 Найти длину петли кривой $x = t^2,\ y = t\left(\dfrac{1}{3} - t^2\right)$.

12 Найти длину кардиоиды $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

13 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кардиоиды $r = 2a(1 + \cos\varphi)$.

14 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси дуги Ox цепной линии $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch} 2x,\ 0 \le x \le 3$.

15 Найти объем тела , образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = a\cos t,\ y = a\sin 2t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, и осью Ox.

16 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $2y^2 = x^3$, $x = 4$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Задания для домашней работы

1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

2 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x = 0$

3 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой $y = 0$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{16}{x^2}$ и $y = 17 - x^2$ (первая четверть).

5 Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

6 Найти площадь петли кривой $x = \frac{1}{3}t(3 - t^2)$, $y = t^2$.

7 Найти площадь одного лепестка кривой $r = a\cos 3\varphi$.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

9 Найти длину кривой $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ между точками пересечения с осью Ox (первая четверть).

10 Найти длину кривой $x = a(3\cos t - 3\cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

11 Найти длину петли кривой $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$.

12 Найти длину кривой $r = a\cos^3 \frac{\varphi}{2}$.

13 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

14 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=\frac{1}{3}x^3$, $-1\le x\le 1$.

15 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y^2=x$, $x^2=y$.

16 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x=at^2$, $y=a\ln t$, $a>0$, и осью Ox.

17 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=\frac{1}{8}x^3$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Практическое занятие 3 **Физические приложения определенного интеграла**

3.1 Работа переменной силы
3.2 Работа электродвигателя переменной мощности
3.3 Сила давления жидкости
3.4 Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс

3.1 Работа переменной силы

Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы $\vec{F}$. За ось Ox примем прямую, вдоль которой движется материальная точка. Пусть начальная и конечная точки пути имеют абсциссы a и b $(a<b)$ соответственно. В каждой точке отрезка $[a;b]$ модуль силы принимает определенное значение и является некоторой функцией абсциссы, т. е $|\vec{F}|=F(x)$. Будем считать функцию $F(x)$ непрерывной. Тогда работа A переменной силы на прямолинейном пути от a до b задается формулой:

$$A=\int_a^b F(x)dx .$$

3.2 Работа электродвигателя переменной мощности

Пусть мощность электродвигателя в момент времени t равна $N(t)$. Работа A, совершаемая двигателем за промежуток времени $[a;b]$ выражается формулой:

$$A=\int_a^b N(t)dt .$$

3.3 Сила давления жидкости

Пусть пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость таким образом, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня на расстояниях a и b соответственно (рисунок 3.1).

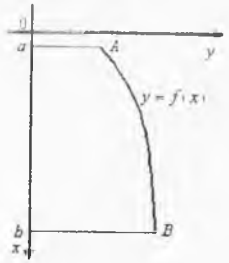

Рисунок 3.1 –Пластинка $aABb$, погруженная вертикально в жидкость

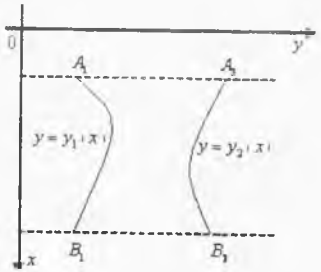

Рисунок 3.2 – Пластинка $A_1B_1B_2A_2$, погруженная вертикально в жидкость

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давлений P жидкости на эту пластинку будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластинка, а высотой – глубина h: $P=g\rho hS$, где $g=9{,}8$ м/с^2; ρ – плотность жидкости, S – площадь пластинки.

Если же пластинка погружена в жидкость вертикально, то давление жидкости – сила давления на единицу площади – изменяется с глубиной погружения. По закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково по всем направлениям, в том числе и на вертикальную пластинку.

Выберем систему координат так, как показано на рисунке 3.1. Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y=f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Сила давления жидкости на всю пластинку определяется интегралом:

$$P=g\int_a^b \rho x f(x)dx .$$

Если в жидкость вертикально погружена пластинка $A_1B_1B_2A_2$ (рисунок 3.2), ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, то сила давления на эту пластинку вычисляется по формуле:

$$P=g\int_a^b \rho x(y_2-y_1)dx .$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3.4 Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс

Основные определения. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. *Статическим моментом* материальной точки $A(x;y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси Ox (оси Oy): $M_x = my$ ($M_y = mx$).

Моментом инерции материальной точки $A(x;y)$ в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy, точки O) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси Ox (оси Oy, точки O):

$$I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_0 = I_x + I_y = m\left(x^2 + y^2\right).$$

Если дана система материальных точек $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, …, $A_n(x_n;y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты находятся по формулам:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,$$

а моменты инерции – по формулам:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2,\ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + y_k^2\right) m_k.$$

Центром масс системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ системы, то статический момент этой точки относительно любой ее оси равен статическому моменту данной системы материальных точек относительно той же оси.

Поэтому, обозначая центр масс системы $C(x_C;y_C)$, получаем:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = My_C, \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = Mx_C.$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Линия (фигура) называется *однородной*, если $\rho = \text{const}$ на всей линии (фигуре). Если при этом $\rho = 1$, то масса линии (фигуры) численно равна длине линии (площади фигуры).

Вычисление массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской кривой. Пусть на спрямляемой кривой AB, заданной уравнением $y = f(x)$, распределена масса с плотностью $\rho = \rho(x)$ (рисунок 3.3). По следующим формулам вычисляются:

масса кривой: $M = \int_a^b \rho\sqrt{1+(y')^2}\,dx$;

статические моменты кривой относительно осей Ox, Oy:

$$M_x = \int_a^b \rho y\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

координаты центра масс: $x_C = \frac{M_y}{M}$, $y_C = \frac{M_x}{M}$;

моменты инерции относительно осей Ox, Oy *и начала координат* $O(0,0)$:

$$I_x = \int_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad I_0 = I_x + I_y.$$

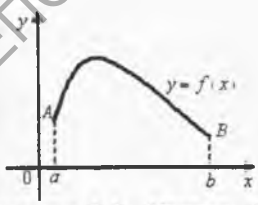

Рисунок 3.3 – Кривая AB

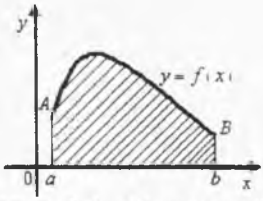

Рисунок 3.4 – Криволинейная трапеция $aABb$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для параметрического и полярного задания плоской линии AB соответствующие формулы приводятся в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской линии

Параметрическое задание $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta]$	Полярное задание $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha;\beta]$
Масса	
$M = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t))\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$	$M = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(r(\varphi)\cos\varphi)\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$
Статические моменты	
$M_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t))\,y(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$, $M_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t))\,x(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$	$M_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho\, r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$, $M_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho\, r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$, $\rho = \rho(r(\varphi)\cos\varphi)$
Моменты инерции	
$I_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t))\,y^2(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$, $I_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t))\,x^2(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$, $I_0 = I_x + I_y$	$I_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho\, r^2(\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$, $I_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho\, r^2(\varphi)\cos^2\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$, $\rho = \rho(r(\varphi)\cos\varphi)$

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры. Пусть дана материальная криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная графиком функции $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рисунок 3.4). И пусть на фигуре распределена масса с плотностью $\rho = \rho(x)$. По следующим формулам вычисляются:

масса фигуры: $M = \int\limits_{a}^{b} \rho\, y dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

статические моменты относительно осей координат:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho\, y^2 dx,\ M_y = \int_a^b \rho\, x\, y dx;$$

моменты инерции относительно осей Ox, Oy:

$$I_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^3 dx,\ I_y = \int_a^b \rho x^2 y dx;$$

координаты центра масс: $x_C = \dfrac{M_y}{M},\ y_C = \dfrac{M_x}{M}$.

Для параметрического и полярного задания плоской фигуры соответствующие формулы приводятся в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской фигуры

Параметрическое задание $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta]$	Полярное задание $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha;\beta]$
Масса	
$M = \int_\alpha^\beta \rho(x(t))\, y(t)\, x'(t) dt$	$M = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(r(\varphi)\cos\varphi) r^2(\varphi) d\varphi$
Статические моменты	
$M_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(x(t))\, y^2(t)\, x'(t) dt,$ $M_y = \int_\alpha^\beta \rho(x(t))\, x(t)\, x'(t) dt$	$M_x = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi,$ $M_y = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho r^3(\varphi)\cos\varphi d\varphi,$ $\rho = \rho(r(\varphi)\cos\varphi)$
Моменты инерции	
$I_x = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho(x(t))\, y^3(t)\, x'(t) dt,$ $I_y = \int_\alpha^\beta \rho(x(t))\, x^2(t)\, y(t)\, x'(t) dt,$	$I_x = \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta \rho r^4(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi,$ $I_y = \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta \rho r^4(\varphi)\cos^2\varphi d\varphi,$ $\rho = \rho(r(\varphi)\cos\varphi)$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для нахождения центра тяжести плоской фигуры, имеющей сложную форму, разбивают фигуру на простейшие фигуры, координаты центра масс которых либо известны, либо достаточно легко определяются. При этом сложную фигуру D представляют в виде объединения простейших фигур, из которых вырезаны некоторые фигуры. Эти фигуры (вырезанные) обозначим через D_1, D_2, ..., D_n, а их площади – S_1, S_2, ..., S_n. Тогда координаты центра масс фигуры D можно найти по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)x_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)y_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)},$$

где x_{C_k} y_{C_k} – координаты центра масс фигуры D_k; S_k – площадь фигуры D_k, $k=\overline{1,n}$. В этих формулах площадь фигуры берется со знаком «+», если $D_k \subset D$, и со знаком «–», если $D_k \not\subset D$, т.е. если элементарная фигура D_k вырезана. При нахождении координат центра масс используется также свойство симметрии фигуры: если фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

Решение типовых примеров

1 Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей Ox и Oy дуги цепной линии $y=\operatorname{ch} x$ при $0 \le x \le 1$.

Решение. Имеем

$$y' = \operatorname{sh} x, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+(\operatorname{sh} x)^2} = \operatorname{ch} x.$$

Тогда

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sh} x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2),$$

$$M_y = \int_0^1 x\operatorname{ch} x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = \operatorname{ch} x\,dx, \\ du = dx, v = \operatorname{sh} x \end{bmatrix} = x\operatorname{sh} x\Big|_0^1 -$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$-\int_0^1 \operatorname{sh} dx = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} x\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1,$$

$$I_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\,dx = \int_0^1 \left(1 + \operatorname{sh}^2 x\right)\operatorname{ch} x\,dx = \left(\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x\right)\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 \operatorname{ch} x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2, dv = \operatorname{ch} x\,dx, \\ du = 2x dx, v = \operatorname{sh} x \end{bmatrix} = x^2 \operatorname{sh} x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x \operatorname{sh} x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, dv = \operatorname{sh} x\,dx, \\ du = dx, v = \operatorname{ch} x \end{bmatrix} = \operatorname{sh} 1 - 2\left(x \operatorname{ch} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch} x\,dx\right) =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1 + +2\operatorname{sh} 1 = 3\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1.$$

2 Найти координаты центра масс дуги окружности

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Масса дуги окружности в первой четверти есть

$$M = \frac{\pi a}{2}.$$

Имеем

$$x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t,$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a.$$

Тогда

$$M_x = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = a^2 \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2,$$

$$M_y = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = -a^2 \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Следовательно,

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}, \qquad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ м/с. Требуется найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение. Так как путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени выражается интегралом $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$,

то имеем

$$S = \int_0^5 \left(2t + 3t^2\right)dt = \left(t^2 + t^3\right)\Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}.$$

4 Какую работу необходимо затратить, для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

Решение. Работа переменной силы $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, выражается интегралом

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{r^2},$$

где M – масса земли, r – расстояние массы m от центра земли, k – гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т.е. при $r = R$, имеем $F = mg$, то можно записать

$$mg = k\frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда получаем $kM = gR^2$. Тогда $F = mg\dfrac{R^2}{r^2}$.

Следовательно, искомая работа равна:

$$A = \int_R^{R+h} F\,dr = \int_R^{R+h} mgR^2\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^{R+h} = mgR\frac{h}{R+h}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Отсюда при $h \to \infty$ имеем

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR.$$

5 Вычислить кинетическую энергию однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если заданы радиус основания конуса R, высота H и плотность γ.

Решение. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, где I момент инерции тела относительно оси вращения. Пусть dm – элементарная масса полого цилиндра высоты h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рисунок 3.5)

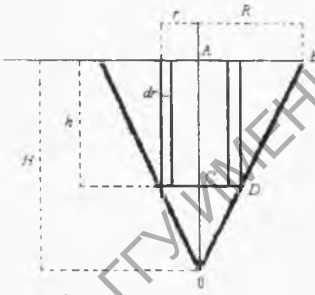

Рисунок 3.5 – Геометрическая интерпретация типового примера 5

Тогда

$$dm = 2\pi rh\gamma\, dr,\ 0 \le r \le R.$$

Из подобия треугольников OCD и OAB имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}.$$

Отсюда

$$h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Следовательно,

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$dm = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr\,,$$

и элементарный момент инерции dI равен

$$dI = dm\,r^2 = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3\,dr\,.$$

Таким образом, момент инерции всего конуса есть

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3\,dr = 2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\gamma H R^4,$$

и кинетическая энергия конуса равна

$$K = \frac{1}{20}\pi\gamma H R^4\omega^4\,.$$

6 Найти силу давления воды на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в воду вершиной вниз так, что основание находится на поверхности воды.

Решение. Согласно закону Паскаля сила давления P жидкости с удельным весом γ на площадку S при глубине погружения H равна

$$P = \gamma H S\,.$$

Введем систему координат (рисунок 3.6) Oxy и рассмотрим элементарную прямоугольную площадку, находящуюся на глубине x и имеющую основание b и высоту dx.

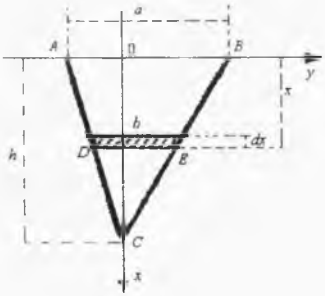

Рисунок 3.6 – Геометрическая интерпретация типового примера 6

Из подобия треугольников CAB и CDE имеем

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\frac{b}{a}=\frac{h-x}{h}.$$

Отсюда $b=\frac{a}{h}(h-x)$.

Следовательно, (для воды $\gamma=1$).

$$dS=b\,dx=\frac{a}{h}(h-x)dx,$$

$$dP=x\,dS=\frac{ax}{h}(h-x)dx$$

Таким образом, сила давления воды на всю пластину равна

$$P=\int_0^h x\,dS=\frac{a}{h}\int_0^h x(h-x)dx=\frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{ah^2}{6}.$$

7 Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удаления ее на 1см необходимо приложить силу в 1 кН.

Решение. Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину пропорциональна ее растяжению

$$F=k\,x,$$

где k – коэффициент пропорциональности, x – растяжение пружины (в метрах).

Так как по условию при $x=0{,}01$ м сила $F=1$ кН, то из равенства

$$1=0{,}01k,$$

получаем

$$k=100,\ F=100x.$$

Следовательно, искомая работа равна

$$A=\int_0^{0,1}100x\,dx=50x^2\Big|_0^{0,1}=0{,}5\ \text{кДж}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиною в 5 м, если на-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

долба имеет форму правильного тетраэдра с ребром 1м, плотность железобетона 2500 кг/м^3.

2 Найти работу, затраченную на выкачивание воды из сосуда, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r.

3 Водопроводная труба имеет диаметр 6 см.; один ее конец соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти полное давление на заслонку.

4 Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого 6 м и находится на поверхности воды (рисунок 3.7).

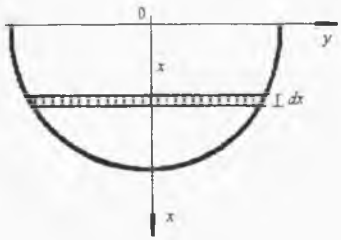

Рисунок 3.7 – К задаче 4 аудиторной работы

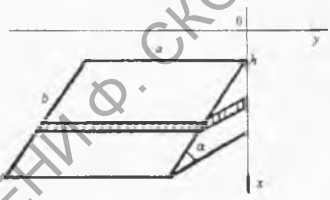

Рисунок 3.8 – К задаче 6 аудиторной работы

5 Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотою $h = 3{,}5$ м и радиусом $r = 1{,}5$ м, на его стенки, если плотность бензина $\rho = 900$ кг/м^3.

6 Какое давление испытывает прямоугольная пластинка длиною a и шириною b, $a > b$, если она наклонена к горизонту жидкости под углом α и ее большая сторона находится на глубине h (рисунок 3.8).

7 Найти момент инерции относительно оси Oy площади эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

8 Найти статические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

9 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Задания для домашней работы

1 Найти работу, затрачиваемую на выкачивание воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания r и высота h.

2 Из цилиндрической цистерны выкачивается жидкость. Какую работу надо затратить на это, если длина цистерны a, а диаметр d.

3 Подъемным краном при помощи каната, прикрепленного к вершине, поднимается конической формы камень из воды. Какую работу затратит подъемный кран на полное извлечение камня из воды, если вершина конуса находилась на поверхности воды. Радиус основания конуса 1 м, высота 3 м, плотность 2,5 г/см^3. *Указание*: $P(y) = 1500\pi + \frac{1000}{27}\pi y^3$.

4 В жидкость с плотностью ρ погружена треугольная пластинка вершиной вверх. Найти давление жидкости на пластинку, если основание треугольника a, высота h. Вершина треугольника расположена на поверхности.

5 Скорость точки меняется по закону $v = 100 + 8t$ м/сек. Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0;10]$.

6 Найти момент инерции параболического сегмента, ограниченного параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$ относительно Ox.

7 Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, расположенной в первой четверти, и осями координат.

8 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

9 Найти координаты центра тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

10 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Практическое занятие 4 Несобственные интегралы

4.1 Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования

4.2 Несобственный интеграл от неограниченных функций

4.3 Формулы для несобственных интегралов

4.4 Признаки сходимости несобственных интегралов

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что пределы интегрирования a и b являются конечными и подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. В этом случае определенные интегралы называются *собственными*.

Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интегралы называются *несобственными*. При этом определение интеграла Римана теряет смысл. Действительно, в случае бесконечного отрезка интегрирования его нельзя разбить на n частичных отрезков конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела.

4.1 Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, зависящий от верхнего предела b.

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной на промежутке $[a;\infty)$ функции $f(x)$ называется предел $b\to+\infty$:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется *сходящимся*, если этот предел не существует или равен ∞, то *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ называется интеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$.

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx,\ c\in(-\infty;\infty),$$

то по определению

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Этот несобственный интеграл называется *сходящимся*, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ называется *расходящимся*.

Интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ называются также *несобственными интегралами первого рода*.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $y = 0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь S (рисунок 4.1).

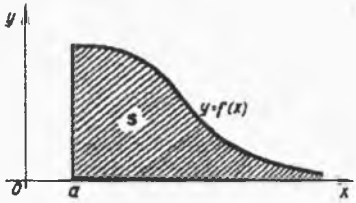

Рисунок 4.1 – Геометрический смысл несобственного интеграла 1-го рода

Интегралом в смысле главного значения называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b > 0.$$

Очевидно, что, если существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то и существует интеграл в смысле главного значения. Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения может существовать, а соответствующий ему несобственный интеграл – нет.

4.2 Несобственный интеграл от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка бесконечного разрыва), т. е. $\lim\limits_{x \to b-\varepsilon} f(x) = \infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x = b$ называется при $\varepsilon \to 0$ предел:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon > 0.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $(a;b]$:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \ \varepsilon > 0 .$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx .$$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ является *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Несобственные интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами второго рода*.

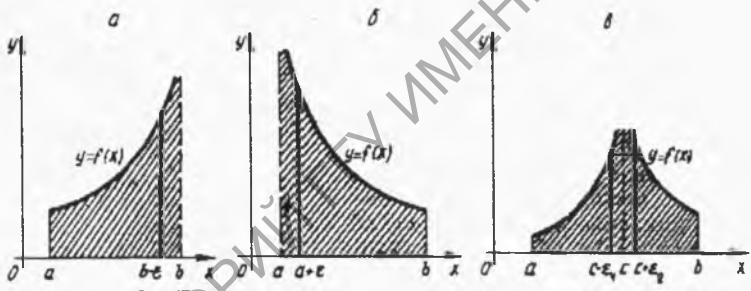

Рисунок 4.2 – Геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченных функций

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ $x = b$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Oy при $x \to b - 0$ (рисунок 4.2, а), ($x \to a + 0$, рисунок 4.2, б; $x \to c \pm 0$ рисунок 4.2,в), имеет конечную площадь S.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4.3 Формулы для несобственных интегралов

В силу свойств предела функции и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, многие свойства определенного интеграла предельным переходом переносятся на несобственные интегралы.

Не ограничивая общности, ниже приводятся свойства несобственного интеграла от функции, определенной на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$:

– *(формула Ньютона-Лейбница)* если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $F(x)$ какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a);$$

– *(линейность)* если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел α и β несобственный интеграл $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx$ также сходится и

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$$

– *(монотонность)* если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x \in [a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

– *(замена переменной)* если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$, $-\infty<\alpha<\beta\le+\infty$, и выполняются условия $\varphi([\alpha;\beta))=[a;b)$, $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

– *(интегрирование по частям)* пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ кусочно-непрерывны на любом отрезке $[a;\eta]$, $a\le\eta<b$. Тогда

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

4.4 Признаки сходимости несобственных интегралов

Будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a\le\eta<b$ (несобственный интеграл 1-го или 2-го рода).

Теорема 1 (признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a\le\eta<b$, причем $\forall x\in[a;b)$ справедливо $0\le f(x)\le g(x)$. Тогда

1) из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, 2) из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Следствие (предельный признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

функции $f(x)$ *и* $g(x)$, *интегрируемые на каждом конечном отрезке* $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, *причем* $\forall x \in [a;b)$ $g(x) \ne 0$. *и существует конечный предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Тогда 1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится,*

2) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится,*

3) если $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *то интегралы* $\int_a^b g(x)dx$ *и* $\int_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 2 (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла) Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η, *что для всех* η_1 *и* η_2, *удовлетворяющих условию* $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, *выполняется неравенство* $\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 3 Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

Обратное верно не всегда.

Теорема 4 (признак Дирихле) Пусть на промежутке $[a;b)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную, и функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. *Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Теорема 5 (признак Абеля) Пусть на промежутке $[a;b)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится и функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна. Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Вопросы для самоконтроля

1 Какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода? Когда несобственный интеграл первого рода сходится, расходится?

2 Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода? Когда несобственный интеграл второго рода сходится, расходится?

3 Перечислите основные свойства несобственных интегралов.

4 Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

5 Сформулируйте признак сравнения.

6 Сформулируйте предельный признак сравнения.

7 Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?

8 Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Решение типовых примеров

1 Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Решение. а) имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2};$$

б) при $p=1$ имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln b - \ln 1\right) = +\infty.$$

При $p \neq 1$ получим:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, \text{ если } p>1, \\ +\infty, \text{ если } p<1. \end{cases}$$

Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p \le 1$;

в) при $p=1$ имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln 1 - \ln \varepsilon\right) = +\infty.$$

При $p \neq 1$ имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^1 x^{-p} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, \text{ если } p<1, \\ +\infty, \text{ если } p>1. \end{cases}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Значит, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p \geq 1$.

2 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^n; dv = e^{-x}; \\ du = nx^{n-1}; v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

т. е. $I_n = n \cdot I_{n-1}$.

Поскольку

$$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

то, применяя последовательно рекуррентную формулу, получим

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \ldots = n!I_0 = n!.$$

3 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. а) сравним интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ с расходящимся интегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1}$. Поскольку

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$$

при $x \to 1$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = 1.$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ расходится;

б) сравним данный интеграл со сходящимся интегралом

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \ \forall x \in [1;+\infty)$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ согласно признаку сравнения следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ сходится.

4 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$, б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$.

Решение. а) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ сходится;

б) из неравенства

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

следует, что для любого $\eta > 1$ выполняется неравенство

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int_1^{\eta}\frac{|\sin x|dx}{x}\geq\frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_1^{\eta}\frac{\cos 2xdx}{x}.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится.

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2xdx}{x}$ сходится, поскольку

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2xdx}{x}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{d(\sin 2x)}{x}=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\Bigg|_1^{\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$$

и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ сходится ($\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится).

Значит, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|dx}{x}$ расходится.

5 Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^p}$.

Решение. Функция $f(x)=\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$, а функция $g(x)=\frac{1}{x^p}$, $p>0$, убывает при $x\to+\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$. Согласно признаку Дирихле интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^p}$ сходится.

6 Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\operatorname{arctg}xdx}{x^p}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Решение. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится, а функция $g(x)=\operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна. В силу признака Абеля интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$$

сходится.

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$;

б) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^6}$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\sin 2x\,dx$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$;

е) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$;

ж) $\int\limits_0^{+\infty}x e^{-x^2}dx$;

и) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{5x^4+2x^2+3}$;

б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$;

в) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx$;

г) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^{11}}}$.

3 Вычислить площадь бесконечной трапеции, ограниченной указанными линиями:

а) $y=xe^{-x}$, ($x\ge 0$), $y=0$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

б) $y=\dfrac{1}{x^2+9}$, $y=0$.

4 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$;

б) $\displaystyle\int_{1}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

в) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

г) $\displaystyle\int_{-8}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\operatorname{tg}x-x}$;

б) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$;

в) $\displaystyle\int_{0}^{1}\ln x\,dx$;

г) $\displaystyle\int_{0}^{0,4}\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;

д) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

е) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x dx}{\cos x}$;

ж) $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

и) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x}dx$.

6 Вычислить интеграл в смысле главного значения:

а) $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$; б) $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}x dx$; в) $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{13+x}{17+x^2}dx$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

д) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

б) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx$;

в) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2++6\right)^3}}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{x^2+1}$;

е) $\int\limits_{0}^{+\infty}x\cos x\,dx$;

ж) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}\,dx$;

и) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}\sin 3x\,dx$.

2 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}$;

в) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$;

г) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$.

3. Вычислить площадь бесконечной трапеции, ограниченной указанными линиями:

а) $y=e^{-x}$, ($x\geq 0$), $y=0$;

б) $y=\frac{1}{x^2-4}$, ($x\geq 5$), $y=0$.

4 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+x^4}$,

б) $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln^3 x}$,

в) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-1}$,

г) $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

5 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x-\cos x}$;

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$;

д) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

е) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{1-\cos x}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

в) $\int\limits_0^{0,51} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

ж) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

и) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\sin\frac{1}{x}dx$.

6 Вычислить интеграл в смысле главного значения:

а) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$;

б) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$;

в) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ – 1 Неопределенный и определенный интегралы

1 Найти неопределенные интегралы:

1.1 а) $\int \frac{3+\sqrt{x}-2x}{x^3}dx$; б) $\int \sin(2x-3)dx$;

в) $\int \sqrt[3]{5x+4}dx$; г) $\int \frac{dx}{(x+3)^5}$;

д) $\int \frac{(7x-2)dx}{x^2+4x+14}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;

ж) $\int (2x-3)\sin 3x\,dx$; и) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)(x-3)}$;

к) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$; л) $\int \frac{dx}{5+3\cos x+2\sin x}$;

м) $\int (\sin x - x^3)^3 dx$; н) $\int f''(3x)dx$.

1.2 а) $\int \frac{5-3\sqrt{x}-x^2}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \sin(5x+7)dx$;

в) $\int \sqrt{2x-4}dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x-2)^4}$;

д) $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+1}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$;

ж) $\int (3x-1)e^{-x}dx$; и) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-3)^2}$;

к) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$; л) $\int \frac{dx}{5+2\cos x-4\sin x}$;

м) $\int \frac{x^3\cos x - x^2\sin x}{x^2}dx$; н) $\int x^3 f'\left(\left(\frac{x}{3}\right)^4\right)dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.3 а) $\int \frac{5\sqrt{x}-3x+x^3}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \cos(4x-3)dx$;

в) $\int \sqrt[5]{3x+7}dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$;

д) $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+1}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+3}}$;

ж) $\int (3x-4)\cos(2x-1)dx$; и) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

к) $\int \frac{3x-11}{(x^2+8x+18)(x^2+1)}dx$; л) $\int \frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}dx$;

м) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$; н) $\int f'(2x)dx$.

1.4 а) $\int \frac{4\sqrt[3]{x}+x^2\sqrt{x}-5}{\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \frac{(3\sin x-2\cos)dx}{1+\cos x}$;

в) $\int \sqrt[3]{x+5}dx$; г) $\int \frac{dx}{(5x-2)^3}$;

д) $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+6x+3}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$;

ж) $\int (5x+2)\sin(x-3)dx$; и) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

к) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)^2}$; л) $\int \frac{dx}{2x+5}$;

м) $\int \frac{e^x+e^{3x}}{1-e^{2x}+e^{4x}}dx$; н) $\int x^2 f''((2x+1)^3)dx$.

1.5 а) $\int \frac{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+x^3}{x^4}dx$; б) $\int \sin(3x+4)dx$;

в) $\int (4x-3)e^{-5x}dx$; г) $\int \frac{dx}{(x-2)^5}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

д) $\int \frac{(2x+6)dx}{x^2+4x+15}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$;

ж) $\int \sqrt[4]{6x+5}dx$;

и) $\int \frac{7x-8}{(x^2+5x+6)(x^2+1)}dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$;

л) $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$;

м) $\int x\sin x\cos 2x dx$;

н) $\int f'''(4x)dx$.

1.6 а) $\int \frac{7\sqrt{x}-4x^3+x^5}{\sqrt[4]{x}}dx$;

б) $\int \cos(x+7)dx$;

в) $\int \sqrt[6]{x-4}dx$;

г) $\int \frac{dx}{(x+9)^4}$;

д) $\int \frac{3x-1}{x^2+6x-10}dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+1}}$;

ж) $\int (x+6)\cos(5x+3)dx$;

и) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)^2(x+3)}$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

л) $\int \frac{dx}{8+7\cos x-4\sin x}$;

м) $\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})dx$;

н) $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx$.

1.7 а) $\int \frac{11+3\sqrt{x}-x^4}{4\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int \sin(6x-7)dx$;

в) $\int \sqrt[4]{x+7}dx$;

г) $\int \frac{dx}{(3x+7)^3}$;

д) $\int \frac{(4x+1)dx}{x^2-6x+3}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{65-x^2-8x}}$;

ж) $\int (5x+3)e^{-x+2}dx$;

и) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x - 1}}$; л) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$;

м) $\int x \arccos(5x - 2)dx$; н) $\int f''(2x + 5)dx$.

1.8 а) $\int \frac{5\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 6x^2}{\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int \cos(3x + 5)dx$;

в) $\int \sqrt[7]{(x - 4)^2}\, dx$; г) $\int \frac{dx}{(7x + 6)^6}$;

д) $\int \frac{(6x + 3)dx}{x^2 + 4x + 7}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}$;

ж) $\int (x + 7)\sin(5x - 1)dx$; и) $\int \frac{dx}{(x - 1)(x - 2)^2(x + 3)}$;

к) $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$; л) $\int \frac{dx}{5\cos x + 10\sin x}$;

м) $\int \frac{dx}{(1 - e^x)^4}$; н) $\int \frac{f'(\ln(x + 1))}{x + 1} dx$.

1.9 а) $\int \frac{7\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} + x^2}{x^5} dx$; б) $\int \sin(x + 13)dx$;

в) $\int \sqrt[5]{2x + 3}\, dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x + 7)^4}$;

д) $\int \frac{(2x - 3)dx}{x^2 - 4x + 6}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$;

ж) $\int (3x - 1)\cos(x + 1)dx$; и) $\int \frac{x^5 dx}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$;

к) $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x - 1}}$; л) $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$;

м) $\int e^x \ln(1 + e^{-x})dx$; н) $\int \cos x f'(\sin x)dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.10 а) $\int \frac{x^3+7\sqrt{x}-x^5}{5\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \cos(5x+7)dx$;

в) $\int \sqrt[3]{x+4}dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x+6)^5}$;

д) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+8x+63}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-x^2-4x}}$;

ж) $\int (3x-7)e^{2x+6}dx$; и) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x-4)}$;

к) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$; л) $\int \frac{dx}{3+3\cos x+2\sin x}$;

м) $\int x^7 \operatorname{arcctg} x\, dx$; н) $\int f'''\left(\frac{x}{3}+1\right)dx$.

1.11 а) $\int \frac{3\sqrt{x}-4x^2+2x^5}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; б) $\int \sin(3x-7)dx$;

в) $\int \sqrt[5]{2x+7}dx$; г) $\int \frac{dx}{(5x-2)^4}$;

д) $\int \frac{(4x+6)dx}{x^2-6x+35}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{63-x^2+8x}}$;

ж) $\int (2x+5)e^{-2x+3}dx$; и) $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$; л) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

м) $\int \frac{dx}{2-e^x-e^{2x}}$; н) $\int e^{x+1}f'(e^{x+1})dx$.

1.12 а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^5}-x^2+2x^5+3}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; б) $\int \cos(7x-4)dx$;

в) $\int \sqrt{6x-7}dx$; г) $\int \frac{dx}{(5x+3)^3}$;

д) $\int \frac{(2x-7)dx}{x^2+4x-3}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

ж) $\int x^2 \sin(5x+3)dx$; и) $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$; л) $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$;

м) $\int (x^2-2x+2)e^{-x}dx$; н) $\int \sin x f'(\cos x)dx$.

1.13 а) $\int \frac{1+2\sqrt{x}-2x+\sqrt[3]{x^4}}{x^2}dx$; б) $\int \sin(7x-1)dx$;

в) $\int \sqrt[4]{5x-3}dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x-1)^5}$;

д) $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+7}}$;

ж) $\int \sin(2x-7)e^{-4x+5}dx$; и) $\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$; л) $\int \frac{dx}{-4\cos x+3\sin x}$;

м) $\int \sqrt{x} \operatorname{arcctg}\sqrt{x}\, dx$; н) $\int x^2 f'(x^3)dx$.

1.14 а) $\int \frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt{x}-5x^6}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \cos(3x+4)dx$;

в) $\int \sqrt[5]{2x+7}dx$; г) $\int \frac{dx}{(4x+3)^4}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

д) $\int \frac{2x+1}{4x^2-8x+5}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$;

ж) $\int \frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x^2-4)(x^2-2x-3)}dx$; и) $\int \ln\left(x^2+4\right)dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+2}}$; л) $\int \frac{dx}{2+3\cos x+4\sin x}$;

м) $\int \frac{dx}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}}$; н) $\int \cos 2x f'(\sin 2x)dx$.

1.15 а) $\int \frac{7\sqrt[4]{x}+5\sqrt{x}+x^3+1}{x^6}dx$; б) $\int \sin(5x+11)dx$;

в) $\int \sqrt[6]{3x+2}dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x-2)^7}$;

д) $\int \frac{(2x+7)dx}{1-x^2-4x}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+11}}$;

ж) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)(x-3)}$; и) $\int \ln\left(4x^2+1\right)dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+2}}$; л) $\int \frac{dx}{5+3\cos x+\sin x}$;

м) $\int x^7 e^{-x^2}dx$; н) $\int f'(3x+2)dx$.

1.16 а) $\int \frac{2\sqrt{x}-5x^3+3x^5}{\sqrt[4]{x^5}}dx$; б) $\int \cos(2x-7)dx$;

в) $\int \sqrt[8]{7x+5}dx$; г) $\int \frac{dx}{(8x+7)^4}$;

д) $\int \frac{(4x-7)dx}{x^2+12x+1}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{11-x^2+4x}}$;

ж) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)^2(x+3)}$; и) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

л) $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x+3}$;

м) $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx$;

н) $\int xf'(3x^2)dx$.

1.17 а) $\int \frac{8+3\sqrt{x}-2x^2}{x^3}dx$;

б) $\int \sin(4x+7)dx$;

в) $\int \sqrt[4]{3x-4}dx$;

г) $\int \frac{dx}{(5x+2)^6}$;

д) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+6x+12}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+1}}$;

ж) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$;

и) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$;

к) $\int \frac{(2-\sin x+3\cos x)dx}{1+\cos x}$;

л) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$;

м) $\int \frac{(x\ln x)^2}{\sqrt{x}}dx$;

н) $\int x^3 f'(x^4)dx$.

1.18 а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^4}-2x+x^3+4}{\sqrt[5]{x^2}}dx$;

б) $\int \cos(5x-7)dx$;

в) $\int \sqrt{9x+5}dx$;

г) $\int \frac{dx}{(3x+5)^3}$;

д) $\int \frac{2x-3}{4x^2+8x-5}dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$;

ж) $\int (4-16x)\sin(4x+7)dx$;

и) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$;

к) $\int \frac{x^3+3}{(x^2+4x+14)(x^2+9)}dx$;

л) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$;

м) $\int \frac{dx}{3\cos x+5+4\sin x}$;

н) $\int e^{x-4} f''(e^{x-4})dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.19 а) $\int \frac{2\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt{x} + 6x^3 - 5}{x^4} dx$;

б) $\int \cos(3x+7) dx$;

в) $\int \frac{(7 + 6\sin x - 5\cos x) dx}{1 + \cos x}$;

г) $\int \frac{dx}{(3x-2)^4}$;

д) $\int \frac{(4x-1) dx}{x^2 + 4x + 12}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - 14x}}$;

ж) $\int (1 - 6x)\sin(4x - 6) dx$;

и) $\int e^{\arcsin x} dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 2}}$;

л) $\int \sqrt[7]{2x+5} dx$;

м) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)^2(x+3)}$;

н) $\int \frac{f''(\ln x)}{x} dx$.

1.20 а) $\int \frac{8\sqrt[4]{x} - 6\sqrt{x} + x^5}{x^6} dx$;

б) $\int \sin(8x+2) dx$;

в) $\int \frac{(2x^2 + 41x - 91) dx}{(x-1)(x+3)(x-4)}$;

г) $\int \sqrt[9]{5x-4} dx$;

д) $\int \frac{(6\sin x + \cos x) dx}{1 + \cos x}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$;

ж) $\int (4x+7)\ln 3x \, dx$;

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 2}}$;

л) $\int \frac{dx}{(2x-7)^8}$;

м) $\int \frac{(2x-4) dx}{x^2 + 2x - 1}$;

н) $\int \sin x f''(\cos x) dx$.

1.21 а) $\int \frac{3x^3 + \sqrt{x} - 2x - \sqrt[3]{x^2}}{x^3} dx$;

б) $\int \sin(2x+7) dx$;

в) $\int \sqrt[4]{7x+6} dx$;

г) $\int \frac{dx}{(5x+2)^4}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

д) $\int \frac{(8x-5)dx}{4x^2+12x+1}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$;

ж) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)(x+3)}$;

и) $\int x^3 e^{3x} dx$;

к) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-2}}$;

л) $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$;

м) $\int (7x-10)e^{-4x+7} dx$;

н) $\int x f''(2x^2) dx$.

1.22 а) $\int \frac{10-\sqrt{x}-x^5}{\sqrt[3]{x^4}} dx$;

б) $\int \cos(3x+11) dx$;

в) $\int \sqrt[6]{x-14} dx$;

г) $\int \frac{dx}{(2x-13)^5}$;

д) $\int \frac{(4x+9)dx}{x^2+2x+7}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-12x^2-4x}}$;

ж) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x+8} dx$;

и) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4} dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$;

л) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$;

м) $\int (2x+1)e^{\operatorname{arcctg} x} dx$;

н) $\int e^x f'(e^x) dx$.

1.23 а) $\int \frac{4\sqrt[3]{x^5}-2x^2-3x^5}{\sqrt[5]{x^4}} dx$;

б) $\int \sin(6x+1) dx$;

в) $\int \frac{(x^4-3x^3-11x^2+4x+15)dx}{x^3-5x^2-x+5}$;

г) $\int \frac{dx}{(3x-7)^9}$;

д) $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+4x+13}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{24-x^2-10x}}$;

ж) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} dx$;

и) $\int \sqrt[5]{3x+1} dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-2}}$; л) $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$;

м) $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}dx$; н) $\int \cos(x+1)f'(\sin(x+1))dx$.

1.24 а) $\int \frac{4\sqrt{x}-x^3+3x^5}{3\sqrt[4]{x^3}}dx$; б) $\int \cos(5x-1)dx$;

в) $\int \sqrt[3]{5x-10}dx$; г) $\int \frac{dx}{(7x+5)^4}$;

д) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+12x+37}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-18x+80}}$;

ж) $\int (3x+5)\operatorname{arctg} x\, dx$; и) $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^2(x^2+2)}dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$; л) $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$;

м) $\int x^2 \ln\sqrt{x}dx$; н) $\int xf''(x^2)dx$.

1.25 а) $\int \frac{6\sqrt[4]{x}+2\sqrt{x}+3x^3}{x^5}dx$; б) $\int \sin(5x+11)dx$;

в) $\int \sqrt[3]{4x+7}dx$; г) $\int \frac{dx}{(5x-2)^8}$;

д) $\int \frac{(4x+12)dx}{x^2-4x+3}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14x+6}}$;

ж) $\int (3x+7)\sin(4x-8)dx$; и) $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$; л) $\int \frac{dx}{3\cos x+3+5\sin x}$;

м) $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$; н) $\int 4x^2 f''(4x^3)dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.26 а) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x^5}+x+5}{10x^2}dx$; б) $\int \cos(2x-4)dx$;

в) $\int \sqrt[6]{3x+4}dx$; г) $\int \frac{dx}{(7x-9)^5}$;

д) $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+14x+11}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2-8x}}$;

ж) $\int (8x-5)\operatorname{arctg} 2x\, dx$; и) $\int \frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2+x}}$; л) $\int \frac{dx}{3\cos x+4-4\sin x}$;

м) $\int \frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}dx$; н) $\int e^{2x} f''(e^{2x})dx$.

1.27 а) $\int \frac{6\sqrt{x}+2x^3+x+1}{3\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \sin(3x+7)dx$;

в) $\int \sqrt{9x+5}dx$; г) $\int \frac{dx}{(3x+12)^4}$;

д) $\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-4x+5}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$;

ж) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x+3)^2}$; и) $\int (3x+5)e^{2-4x}dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2+x}}$; л) $\int \frac{dx}{-3\cos x+2+\sin x}$;

м) $\int \sin(x-2)f''(\cos(x-2))dx$; н) $\int x^3 \ln^3 x dx$.

1.28 а) $\int \frac{12-2\sqrt{x}-x^4}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \cos(2x-7)dx$;

в) $\int \frac{(x^4-x^3-9x^2-10x-14)dx}{(x^2-2x-8)(x^2+16)}$; г) $\int \frac{dx}{(5x+1)^8}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

д) $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-14x+48}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x+1}}$;

ж) $\int (3x+5)\operatorname{arctg} 2x\, dx$;

и) $\int \sqrt[5]{3x+5}\, dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2-x}}$;

л) $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$;

м) $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$;

н) $\int x e^{x^2} f'(e^{x^2}) dx$.

1.29 а) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x} + x^4 - 6}{x^5} dx$;

б) $\int \sin(3x+8) dx$;

в) $\int \sqrt[7]{4x-3}\, dx$;

г) $\int \frac{dx}{(6x-1)^4}$;

д) $\int \frac{(4x-5)dx}{x^2+6x+10}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{50-x^2-14x}}$;

ж) $\int \frac{(3x^3-x^2-x+1)dx}{(x^2-5x+4)(x^2+4)}$;

и) $\int x \ln(x-7)\, dx$;

к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-x^2+x}}$;

л) $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$;

м) $\int e^{-x} \arcsin e^x dx$;

н) $\int \left(\frac{x}{3}\right)^3 f''(x^4) dx$.

1.30 а) $\int \frac{4\sqrt{x} - 8x^3 + 4x^5 - 2}{\sqrt[4]{x^3}} dx$;

б) $\int \cos(5x-7) dx$;

в) $\int \sqrt[9]{4x-7}\, dx$;

г) $\int \frac{dx}{(7x+3)^6}$;

д) $\int \frac{x\, dx}{x^2+12x-1}$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ж) $\int (x-7)e^{-3x+4}dx$;

и) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2+x}}$;

к) $\int \frac{dx}{3\cos x+5}$;

л) $\int (x^3+x)e^{-x^2}dx$;

м) $\int \frac{30x^5+90x^4+165x^3+341x^2+271x+30}{x^3+3x^2+2x}dx$;

н) $\int x^2 f'\left(\left(\frac{x}{3}\right)^3\right)dx$.

2 Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ как предел интегральных сумм. Составить нижнюю s и верхнюю S суммы Дарбу. Для произвольного $\varepsilon > 0$ указать такое разбиение отрезка $[a, b]$, при котором $S - s < \varepsilon$:

2.1 $f(x) = \sin x$, $[0, \pi/2]$.

2.2 $f(x) = 1 + x$, $[-1, 4]$.

2.3 $f(x) = x^3$, $[2, 3]$.

2.4 $f(x) = 2^x$, $[0, 10]$.

2.5 $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

2.6 $f(x) = \cos x$, $[0, \pi/2]$.

2.7 $f(x) = x^2$, $[0,1]$.

2.8 $f(x) = x-1$, $[1,2]$.

2.9 $f(x) = x^2+1$, $[1,2]$.

2.10 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $[1,2]$.

2.11 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $[1,2]$.

2.12 $f(x) = 3^x$, $[2,3]$.

2.13 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $[1,10]$.

2.14 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $[0,1]$.

2.15 $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

2.16 $f(x) = \frac{1}{x}$, $[1, 2]$.

2.17 $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.18 $f(x) = x^2 + 2$, $[0,1]$.

2.19 $f(x) = x^3 + 1$, $[1,10]$.

2.20 $f(x) = x^3 - 1$, $[0,10]$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2.21 $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $[1, 2]$.

2.22 $f(x)=5^x$, $[0, 1]$.

2.23 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

2.24 $f(x)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$, $[1, 2]$.

2.25 $f(x)=e^{2x}$, $[0, 2]$.

2.26 $f(x)=x^2+4$, $[0, 2]$.

2.27 $f(x)=x^2-4$, $[0, 2]$.

2.28 $f(x)=e^x$, $[0,4]$.

2.29 $f(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

2.30 $f(x)=3^x$, $[0, 1]$.

3 Вычислить:

3.1 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

3.2 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{b}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

3.3 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{x^3}\sqrt{1+t^4}\,dt$.

3.4 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^2}\,dt$.

3.5 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x}\sqrt{x^2+t^2}\,dt$.

3.6 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{4}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

3.7 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

3.8 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{x}$.

3.9 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{\sqrt{x}}e^{t^2}\,dt$.

3.10 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+x^2}}$.

3.11 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2\,dt}{x}$.

3.12 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2}e^{t^2}\,dt$.

3.13 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{t^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

3.14 $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}$.

3.15 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}\,dt$.

3.16 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{t^3}\frac{dt}{\sqrt{1+x^4}}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3.17 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

3.18 $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\int\limits_0^x \sin t^2 dt}{x}$.

3.19 $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^4}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

3.20 $\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{t^2+a^4}}$.

3.21 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}$.

3.22 $\dfrac{d}{dx}\int\limits_a^b\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

3.23 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int\limits_0^x e^{-t^3}dt}{x}$.

3.24 $\dfrac{d}{dt}\int\limits_{a^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{a^2-t^4}}$.

3.25 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt}$.

3.26 $\lim\limits_{x\to+a}\dfrac{\int\limits_a^x\sqrt{\operatorname{ctg} t}\,dt}{x-a}$

3.27 $\lim\limits_{x\to+2}\dfrac{\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x}}\sin t\,dt}{x-2}$

3.28 $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{\cos x}^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt$.

3.29 $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{x}\sin t^2 dt$.

3.30 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int\limits_0^x\arcsin t\,dt}{x}$.

4 Сравнить интегралы:

4.1 $\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{x}dx$ и $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}dx$.

4.2 $\int\limits_0^1 e^{-x}\cos x\,dx$ и $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\cos x\,dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4.3 $\int\limits_1^2 e^{x^2}dx$ и $\int\limits_1^2 5^{x^2}dx$

4.4 $\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ и $\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}dx$.

4.5 $\int\limits_0^{\pi/4} e^{-x}\cos xdx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} e^{-x}\cos xdx$.

4.6 $\int\limits_1^{10} 2^{x^3}dx$ и $\int\limits_1^{10} 5^{x^3}dx$.

4.7 $\int\limits_0^1 e^{-x}\sin xdx$ и $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\sin xdx$.

4.8 $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$ и $\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$.

4.9 $\int\limits_2^4 \ln x^2 dx$ и $\int\limits_2^6 \ln x^2 dx$.

4.10 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}dx$.

4.11 $\int\limits_0^1 3^x dx$ и $\int\limits_0^3 3^x dx$.

4.12 $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}$ и $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}dx$.

4.13 $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 xdx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 xdx$.

4.14 $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 xdx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 xdx$.

4.15 $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ и $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

4.16 $\int\limits_0^1 2^x dx$ и $\int\limits_0^2 2^x dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4.17 $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$ и $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$.

4.18 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

4.19 $\int\limits_0^1 e^x dx$ и $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$.

4.20 $\int\limits_0^{\pi/6} \operatorname{tg} x^2 dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x^2 dx$.

4.21 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ и $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} dx$.

4.22 $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x^2 dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x^3 dx$.

4.23 $\int\limits_1^2 \arcsin x^2 dx$ и $\int\limits_0^4 \arcsin x^3 dx$.

4.24 $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

4.25 $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x^2 dx$ и $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x^3 dx$.

4.26 $\int\limits_0^{10} 5^x dx$ и $\int\limits_1^3 5^x dx$.

4.27 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$ и $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} dx$.

4.28 $\int\limits_0^1 e^x \cos x dx$ и $\int\limits_0^1 e^{x^2} \cos x dx$.

4.29 $\int\limits_0^1 \sqrt{x} dx$ и $\int\limits_0^1 x^2 dx$.

4.30 $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ и $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5 Вычислить интегралы:

5.1 а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x\,dx$; в) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$;

б) $\int\limits_{0}^{16} \sqrt{256 - x^2}\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-2x}}$.

5.2 а) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^3}$;

б) $\int\limits_{0}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2}\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$.

5.3 а) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin 3x\,dx$

б) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$; г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

5.4 а) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4}\,dx$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$; г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$.

5.5 а) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \cos^6 \frac{x}{2}\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$; г) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{4-x^2}$.

5.6 а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\,dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

б) $\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x-3}}$.

5.7 а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x\, dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} x 2^{-x} dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}$;

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$.

5.8 а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x\, dx$;

в) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx$;

б) $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

5.9 а) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\, dx$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(3x+1)}{x} dx$;

б) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$;

г) $\int\limits_{-3}^{1} \frac{dx}{9-x^2}$.

5.10 а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\, dx$;

в) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$;

б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,

г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-2}}$.

5.11 а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x\, dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x dx$;

б) $\int\limits_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2}\, dx$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{x^2-1}$.

5.12 а) $\int\limits_0^{2\pi} 2^4 \cos^8 x\, dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

б) $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$; г) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{25-x^2}$.

5.13 а) $\int\limits_0^{2\pi} 2^4 \sin^8 \frac{x}{4} dx$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

б) $\int\limits_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2}\, dx$; г) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{x^2-4}$.

5.14 а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$;

б) $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3+1}$.

5.15 а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\, dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos 2x dx$;

б) $\int\limits_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$; г) $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{x^2-25}$.

5.16 а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x\, dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \sin 4x dx$;

б) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx$; г) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-9}$.

5.17 а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x\, dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x+1}$;

б) $\int\limits_0^{2\sqrt{21}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$; г) $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3-8}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5.18 а) $\int\limits_0^{\pi} \sin^8 x\,dx$;

б) $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} e^x \sin x dx$;

г) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{xdx}{x^4-16}$.

5.19 а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,dx$;

б) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

в) $\int\limits_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\int\limits_0^{1} \frac{xdx}{x^2-1}$.

5.20 а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^4\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}\,dx$;

б) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} x5^{-x}\,dx$;

г) $\int\limits_0^{3} \frac{x^2dx}{x^3-27}$

5.21 а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2^8 \sin^2 x\cos^6 x\,dx$;

б) $\int\limits_0^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx$;

в) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln 2x}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^{4} \frac{xdx}{x^4-64}$.

5.22 а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \cos^8 x\,dx$;

б) $\int\limits_0^{2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}dx$;

г) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4}$.

5.23 а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x\,dx$;

б) $\int\limits_2^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$;

г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2dx}{x^3+1}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5.24 а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x\,dx$;

б) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x+6)}{x}dx$;

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

5.25 а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4}dx$;

б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2x dx$;

г) $\int\limits_{-2}^0 \frac{x^2 dx}{x^3+8}$.

5.26 а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \cos^8 x\,dx$;

б) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{x-1}$;

г) $\int\limits_{-1}^0 \frac{xdx}{x^4-1}$.

5.27 а) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2}dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$,

в) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

г) $\int\limits_0^3 \frac{xdx}{x^2-9}$.

5.28 а) $\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2^8 \sin^8 x\,dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$;

в) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln 3x}{x}dx$;

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$.

5.29 а) $\int\limits_0^{2\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^4 x\,dx$;

в) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

б) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4-1}$.

5.30 а) $\int\limits_0^{\pi} \sin^4 x \cos x \, dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$

б) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx$; г) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x^2-16}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ИДЗ – 2 **Приложения определенного интеграла**

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:

1.1 $r = 3\sqrt{\cos\varphi}$.

1.2 $y = x^2$, $y = 3 - x$.

1.3 $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$.

1.4 $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

1.5 $r = 4\cos 3\varphi$.

1.6 $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$.

1.7 $r = 3\cos 2\varphi$.

1.8 $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

1.9 $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$.

1.10 $r = 2(1 + \cos\varphi)$.

1.11 $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $y = 0$, $t \in [0.\pi]$.

1.12 $r^2 = 2\sin 2\varphi$.

1.13 $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

1.14 $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.

1.15 $r = 2\sin 3\varphi$.

1.16 $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $y = 0$, $t \in [0.\pi]$.

1.17 $y^2 = x^3$, $y = 4$, $x = 0$.

1.18 $x = 5\cos t$, $y = 4\sin t$.

1.19 $r = 2 + \cos\varphi$.

1.20 $x = 5\cos^3 t$, $y = 5\sin^3 t$.

1.21 $y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

1.22 $r = 4\sin^2\varphi$.

1.23 $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

1.24 $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

1.25 $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1.26 $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$.

1.27 $r = 3\sin 4\varphi$.

1.28 $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

1.29 $x = 4(\cos t + t\sin t)$, $y = 4(\sin t - t\cos t)$, $y = 0$, $t \in [0.\pi]$.

1.30 $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.

2 Найти длину дуги кривой:

2.1 $y = \ln\sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

2.2 $y = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.3 $y = \ln\cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.4 $y = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.5 $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$, $x \in [1,3]$.

2.6 $y = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.7 $y = \ln x + 1$, $x \in \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right]$.

2.8 $x = a(\mathrm{sh}t - t)$, $y = a(\mathrm{ch}t - 1)$, $0 \le y \le 7a$, $x \ge 0$.

2.9 $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [2,7]$.

2.10 $x = t - \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t$, $y = 2\,\mathrm{ch}\,t$, $t \in [0,1]$.

2.11 $y = e^{x+4}$, $x \in [0,1]$.

2.12 $x = \mathrm{ch}^3 t$, $y = \mathrm{sh}^3 t$, $t \in [0,1]$.

2.13 $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0,\pi]$.

2.14 $r = \sin^3\frac{\varphi}{3}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2.15 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9^2}$.

2.16 $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

2.17 $y=1-\ln\cos x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

2.18 $r=\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2.19 $r=3(1-\cos\varphi)$, $t\in[0,2\pi]$.

2.20 $x=9(t-\sin t)$. $y=9(1-\cos t)$, $t\in[0,\pi]$.

2.21 $r=3\sin\varphi$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2.22 $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$, $x\in[0,2]$.

2.23 $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$, $t\in[0,\pi]$.

2.24 $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$.

2.25 $r=6\sin 2\varphi$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2.26 $r=5(1+\cos\varphi)$, $t\in[0,2\pi]$.

2.27 $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$.

2.28 $y=\ln x-1$, $x\in\left[\sqrt{3},\sqrt{8}\right]$.

2.29 $y^2=(x-1)^3$ от точки $A(2;-1)$ до точки $B(5;-8)$.

2.30 $x=4(\cos t+t\sin t)$, $y=4(\sin t-t\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$.

3 Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

3.1 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, $z=3y$, $z=0$, ($y\geq 0$).

3.2 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=1$, $z=0$.

3.3 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$, $z=5$, $z=0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3.4 $z = x^2 + 9y^2$, $z = 3$.

3.5 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1$, $z = 1$, $z = 0$.

3.6 $z = x^2 + 5y^2$, $z = 5$.

3.7 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, $z = 2$, $z = 0$.

3.8 $z = 2x^2 + 18y^2$, $z = 6$.

3.9 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$, $z = 5y$, $z = 0$, $(y \geq 0)$.

3.10 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, $z = 3$, $z = 0$.

3.11 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$, $z = 5$, $z = 0$.

3.12 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, $z = 4y$, $z = 0$, $(y \geq 0)$.

3.13 $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{25} = 1$, $z = 5$, $z = 0$.

3.14 $z = x^2 + 4y^2$, $z = 2$.

3.15 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 3y$, $z = 0$, $(y \geq 0)$.

3.16 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $z = 1$, $z = 0$.

3.17 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $z = 4$, $z = 0$.

3.18 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $z = y$, $z = 0$, $(y \geq 0)$.

3.19 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, $z = 1$, $z = 0$.

3.20 $z = 2x^2 + 8y^2$, $z = 4$.

3.21 $x^2 + y^2 = 1$, $z = y$, $z = 0$, $(y \geq 0)$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3.22 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, $z=3$, $z=0$.

3.23 $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, $z=3$, $z=0$.

3.24 $\frac{x^2}{25}+y^2=1$, $z=5y$, $z=0$, ($y\geq 0$).

3.25 $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{25}=1$, $z=5$, $z=0$.

3.26 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, $z=3$, $z=0$.

4 Вычислить площадь и объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной графиками функций:

4.1 $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

4.2 $y=3\sin x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

4.3 $y=e^x$, $x=0$, $x=\ln 2$, $y=0$.

4.4 $y=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

4.5 $y=(x-1)^2$, $x=2$, $y=0$.

4.6 $y=2\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.

4.7 $y=e^{2x}$, $x=0$, $x=\ln 2$, $y=0$.

4.8 $y=2\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

4.9 $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $x=9$, $y=0$.

4.10 $y=(x-2)^2$, $x=3$, $y=0$.

4.11 $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.

4.12 $y=2\sqrt{x}$, $x=4$, $x=9$, $y=0$.

4.13 $y=e^x$, $x=0$, $x=\ln 3$, $y=0$.

4.14 $y=\sqrt{x-1}$, $x=5$, $x=10$, $y=0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4.15 $y=(x+1)^2$, $x=2$, $y=0$.

4.16 $y=4\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.

4.17 $y=\sqrt{x+1}$, $x=3$, $x=8$, $y=0$.

4.18 $y=3\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

4.19 $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.

4.20 $y=(x+2)^2$, $x=1$, $y=0$.

4.21 $y=\frac{1}{2}\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.

4.22 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $x=0$, $x=\ln 4$, $y=0$.

4.23 $y=-\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

4.24 $y=\sqrt{x+2}$, $x=2$, $x=7$, $y=0$.

4.25 $y=x^2+1$, $x=2$, $y=0$.

4.26 $y=3\sin x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

4.27 $y=e^{x}$, $x=0$, $x=\ln 4$, $y=0$.

4.28 $y=\frac{1}{2}\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

4.29 $y=2^{x}$, $x=0$, $x=\ln 2$, $y=0$.

4.30 $y=x^2+1$, $x=2$, $y=0$.

5 Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рисунок 3.1). Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2. *Указание* : давление на глубине x равно $\rho g x$.

5.1 $a=4{,}5$ м, $b=5{,}5$ м, $h=3$ м.

5.2 $a=5{,}5$ м, $b=4{,}5$ м, $h=2$ м.

5.3 $a=2{,}5$ м, $b=7{,}5$ м, $h=4$ м.

5.4 $a=1{,}5$ м, $b=8{,}5$ м, $h=2$ м.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

5.5 $a = 7{,}3$ м, $b = 2{,}7$ м, $h = 3$ м.
5.6 $a = 4{,}5$ м, $b = 6{,}5$ м, $h = 6$ м.
5.7 $a = 4{,}2$ м, $b = 5{,}8$ м, $h = 3$ м.
5.8 $a = 4{,}3$ м, $b = 5{,}7$ м, $h = 1$ м.
5.9 $a = 2{,}5$ м, $b = 7{,}5$ м, $h = 5$ м.
5.10 $a = 7{,}5$ м, $b = 2{,}5$ м, $h = 1$ м.
5.11 $a = 6{,}5$ м, $b = 13{,}5$ м, $h = 3$ м.
5.12 $a = 1{,}5$ м, $b = 18{,}5$ м, $h = 6$ м.
5.13 $a = 2{,}5$ м, $b = 17{,}5$ м, $h = 4$ м.
5.14 $a = 7{,}5$ м, $b = 12{,}5$ м, $h = 3$ м.
5.15 $a = 5{,}5$ м, $b = 14{,}5$ м, $h = 2$ м.
5.16 $a = 3{,}3$ м, $b = 6{,}7$ м, $h = 5$ м.
5.17 $a = 2{,}1$ м, $b = 7{,}9$ м, $h = 8$ м.
5.18 $a = 4{,}8$ м, $b = 5{,}2$ м, $h = 3$ м.
5.19 $a = 3{,}1$ м, $b = 6{,}9$ м, $h = 2$ м.
5.20 $a = 4{,}9$ м, $b = 5{,}1$ м, $h = 4$ м.
5.21 $a = 2{,}6$ м, $b = 7{,}4$ м, $h = 3$ м.
5.22 $a = 7{,}4$ м, $b = 2{,}6$ м, $h = 6$ м.
5.23 $a = 6{,}9$ м, $b = 3{,}1$ м, $h = 7$ м.
5.24 $a = 3{,}2$ м, $b = 6{,}8$ м, $h = 3$ м.
5.25 $a = 2{,}3$ м, $b = 17{,}7$ м, $h = 4$ м.
5.26 $a = 1{,}4$ м, $b = 8{,}6$ м, $h = 1$ м.
5.27 $a = 2{,}4$ м, $b = 7{,}6$ м, $h = 5$ м.
5.28 $a = 2{,}3$ м, $b = 7{,}7$ м, $h = 8$ м.
5.29 $a = 4{,}5$ м, $b = 6{,}5$ м, $h = 6$ м.
5.30 $a = 3{,}5$ м, $b = 8{,}5$ м, $h = 3$ м.

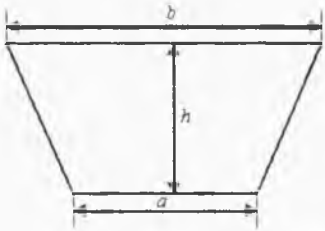

Рисунок 2.1– К задаче 5 ИДЗ - 2

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

6 Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли R=6380 км. Ускорение свободного падения у поверхности Земли положить равным 9,8 м/с^2.

6.1 m=5 т, H=200 км.
6.2 m=6 т, H=300 км.
6.3 m=3 т, H=500 км.
6.4 m=4 т, H=400 км.
6.5 m=5 т, H=700 км.
6.6 m=6 т, H=800 км.
6.7 m=7 т, H=500 км.
6.8 m=8 т, H=400 км.
6.9 m=9 т, H=600 км.
6.10 m=8 т, H=900 км.
6.11 m=7 т, H=700 км.
6.12 m=5 т, H=300 км.
6.13 m=3 т, H=400 км.
6.14 m=8 т, H=600 км.
6.15 m=4 т, H=300 км.
6.16 m=5 т, H=400 км.
6.17 m=6 т, H=800 км.
6.18 m=4 т, H=700 км.
6.19 m=7 т, H=600 км.
6.20 m=6 т, H=800 км.
6.21 m=9 т, H=900 км.
6.22 m=3 т, H=400 км.
6.23 m=4 т, H=600 км.
6.24 m=6 т, H=400 км.
6.25 m=5 т, H=300 км.
6.26 m=5 т, H=400 км.
6.27 m=7 т, H=500 км.
6.28 m=3 т, H=600 км.
6.29 m=8 т, H=700 км.
6.30 m=6 т, H=400 км.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

7 Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103, кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h вниз (рисунок 2.2). *Указание* : уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p – давление, V – объем.

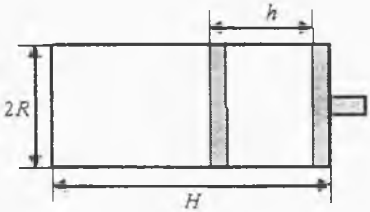

Рисунок 2.2 – К задаче 7 ИДЗ - 2

7.1 H =1,4 м, h= 0,3 м, R =0,1 м.
7.2 H =1,5 м, h= 0,7 м, R =0,1 м.
7.3 H =1,8 м, h= 0,6 м, R =0,2 м.
7.4 H =1,3 м, h= 0,5 м, R =0,2 м.
7.5 H =1,5 м, h= 0,7 м, R =0,3 м.
7.6 H =1,3 м, h= 0,4 м, R =0,3 м.
7.7 H =1,9 м, h= 0,9 м, R =0,4 м.
7.8 H =1,6 м, h= 0,6 м, R =0,4 м.
7.9 H =1,2 м, h= 0,5 м, R =0,1 м.
7.10 H =1,4 м, h= 0,3 м, R =0,2 м.
7.11 H =1,2 м, h= 0,5 м, R =0,3 м.
7.12 H =0,8 м, h= 0,3 м, R =0,4 м.
7.13 H =1,4 м, h= 0,6 м, R =0,3 м.
7.14 H =1,5 м, h= 0,8 м, R =0,2 м.
7.15 H =1,3 м, h= 0,3 м, R =0,1 м.
7.16 H =1,4 м, h= 0,3 м, R =0,1 м.
7.17 H =1,2 м, h= 0,4 м, R =0,2 м.
7.18 H =1,3 м, h= 1,2м, R =0,1 м.
7.19 H =1,6 м, h= 1,3 м, R =0,3 м.
7.20 H =1,7 м, h= 1,6 м, R =0,3 м.
7.21 H =1,8 м, h= 1,5 м, R =0,4 м.
7.22 H =1,9 м, h= 1,1 м, R =0,4 м.
7.23 H =2,0 м, h= 0,5 м, R =0,2 м.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

7.24 $H=1{,}3$ м, $h=0{,}8$ м, $R=0{,}2$ м.
7.25 $H=1{,}1$ м, $h=1{,}6$ м, $R=0{,}1$ м.
7.26 $H=1{,}0$ м, $h=0{,}6$ м, $R=0{,}1$ м.
7.27 $H=1{,}5$ м, $h=0{,}8$ м, $R=0{,}3$ м.
7.28 $H=0{,}9$ м, $h=0{,}5$ м, $R=0{,}3$ м.
7.29 $H=0{,}6$ м, $h=0{,}2$ м, $R=0{,}4$ м.
7.30 $H=0{,}4$ м, $h=0{,}1$ м, $R=0{,}4$ м.

8 Найти координаты центра масс и моменты инерции фигуры, ограниченной кривыми:

8.1 $x^2+y^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

8.2 $y=x^3$, $x+y=2$, $x=0$.

8.3 $y^2=x^3$, $x=0, y=1$.

8.4 $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$.

8.5 $x^2+y^2=16$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

8.6 $y=x^3$, $x+y=1$, $x=0$.

8.7 $r=2\sin 2\varphi$, $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

8.8 $y=\dfrac{2}{\pi}x$, $y=\sin x, y=0$.

8.9 $x=5(t-\sin t)$, $y=5(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$.

8.10 $x^2+y^2=9$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

8.11 $y=x^3$, $x+y=3$, $x=0$.

8.12 $r=3\sin 2\varphi$, $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

8.13 $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$.

8.14 $r=2(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in[0;\pi]$.

8.15 $x^2+y^2=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

8.16 $y=x^3$, $x+y=\dfrac{1}{2}$, $x=0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

8.17 $r = 5\sin 2\varphi$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

8.18 $y = \frac{4}{\pi}x$, $y = 2\sin x, y = 0$.

8.19 $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

8.20 $x^2 + y^2 = 25$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

8.21 $y^2 = x^3$, $x = 0, y = 2$.

8.22 $r = 3(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0; \pi]$.

8.23 $y^2 = 2x$, $x + y = 4$.

8.24 $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

8.25 $x^2 + y^2 = 81$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

8.26 $y^2 = x^3$, $x = 0, y = 3$.

8.27 $r = \sin 3\varphi$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

8.28 $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

8.29 $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

8.30 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Литература

1 Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1970.

2 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

3 Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ [Текст] : учебное пособие для вузов: в 6 ч. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление / Э. И. Зверович. – Мн. : БГУ, 2003.

4 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

5 Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев и [др.] – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

6 Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1984.

7 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

8 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 2 / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

9 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны універсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть третья

Интегральное исчисление функции
действительной переменной

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать 11.10.07. Бумага писчая №1.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл. печ. л. 8,71. Уч. - изд. л. 9,37. Тираж 100 экз.
Заказ № 56.

1510-76

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ